This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

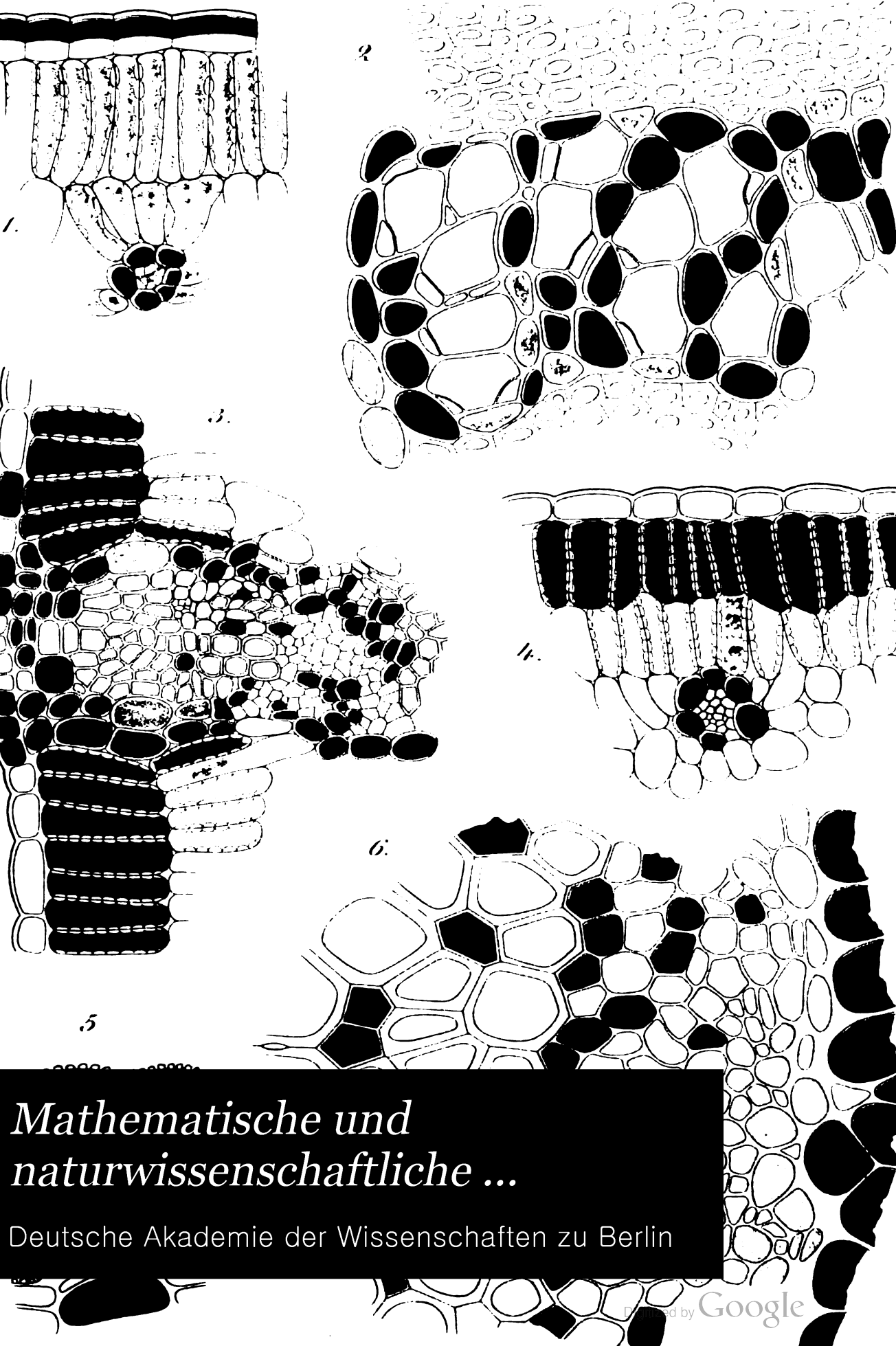
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Mathematische und naturwissenschaftliche ...

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin

Digitized by Google

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

13,892

Exchange

June 24, 1914.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH

PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

JAHRGANG 1885.

BERLIN, 1885.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ & GOSSMANN.

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALT.

		Seite
1.	Fuchs: Über den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabeln	1
2.	Wilsing: Über die Anwendung des Pendels zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde	9
3.	Virchow: Die Verbreitung des blonden und des brünetten Typus in Mitteleuropa	13
4.	Hausmaninger: Zur Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Körper	23
5.	Weisky: Über die Vanadinsäure enthaltenden Bleierze aus der Provinz Cordoba in Argentina	37
6.	Rammelsberg: Über die Oxyde des Mangans und des Urans	39
7.	Koganei: Untersuchungen über den Bau der Iris	47
8.	Mendelssohn: Untersuchungen über Reflexe	49
9.	Schering: Zum dritten Gauss'schen Beweise des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste	55
10.	Fritsch: Zur Organisation des Gymnarchus niloticus	61
11.	Siemens: Über die von Hrn. Fritts in New York entdeckte elektromotorische Wirkung des beleuchteten Selens	73
12.	Schulze: Über das Verhältniss der Spongien zu den Choanoflagellaten	75
13.	Röntgen: Versuche über die elektromagnetische Wirkung der diëlektrischen Polarisation	89
14.	Hellmann: Über gewisse Gesetzmässigkeiten im Wechsel der Witterung aufeinanderfolgender Jahreszeiten	93
15.	E. du Bois-Reymond: Bericht über die Wirksamkeit der Humboldt-Stiftung für Naturforschung und Reisen	103
16.	Landolt: Über die Zeitdauer der Reaction zwischen Jodsäure und schwefliger Säure	107
17.	Braun: Über die Thermoelektricität geschmolzener Metalle	143
18.	Schwendener: Einige Beobachtungen an Milchsaftgefässen (hierzu Taf. I)	153
19.	Albrecht: Über die im Laufe der phylogenetischen Entwickelung entstandene, angeborene Spalte des Brustbeinhandgriffes der Brüllaffen	167
20.	Rüdorff: Über die Löslichkeit von Salzgemischen	185
21.	Müller-Erzbach: Die Dissociation wasserhaltiger Salze und daraus abgeleitete Folgerungen über die Constitution der Salzbestandtheile	201
22.	Kronecker: Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen	209
23.	Hölder: Über eine neue hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function durch die Fourier'sche Reihe	223
24.	Nörtling: Über Crustaceen aus dem Tertiär Aegyptens (hierzu Taf. III)	239
25.	Steiner: Die Lehre von den Zwangsbewegungen des Frosches	253
26.	Chun: Über die cyklische Entwickelung der Siphonophoren (hierzu Taf. II)	263
27.	Roth: Über die von Hrn. Dr. Paul Güssfeldt in Chile gesammelten Gesteine	283
28.	Burmeister: Berichtigung zu Coelodon (hierzu Taf. IV)	287
29.	Rammelsberg: Über die Gruppe des Skapoliths	295
30.	Aus dem Bericht über die Leibniz-Sitzung: Antrittsrede von Hrn. Fr. Eilhard Schulze und Antwort des Classensecretars Hrn. E. du Bois-Reymond	315
31.	Weierstrass: Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Erste Mittheilung	321
32.	Kronecker: Über das Dirichlet'sche Integral	329
33.	E. du Bois-Reymond: Lebende Zitterrochen in Berlin. Zweite Mittheilung	355

Digitized by Google

Seite

34. Himstedt: Eine Bestimmung des Ohms 415
35. Kronecker: Zur Theorie der elliptischen Functionen 421
36. Kronecker: Über den Cauchy'schen Satz 445
37. Weierstrass: Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Zweite Mittheilung 449
38. Noetling: Vorläufiger Bericht über die geognostische Beschaffenheit des Ost-Jordanlandes . . 467
39. H. F. Weber: Das Wärmeleitungsvermögen der tropfbaren Flüssigkeiten 469
40. Wien: Über den Einfluss der ponderabeln Theile auf das gebeugte Licht 477
41. Hofmann: Über die Sulfocyanursäure 481
42. Hofmann: Über das Amin des Pentamethylbenzols 493
43. Kronecker: Über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel 501
44. Berendt: Das Tertiär im Bereiche der Mark Brandenburg (hierzu Taf. V) 523
45. Schwendener: Über Scheitelwachsthum und Blattstellungen (hierzu Taf. VI) 547
46. Hofmann: Über die Einwirkung des Ammoniaks und der Amine auf den Sulfocyanursäuremethyläther und das Cyanurchlorid. Normale alkylirte Melamine 565
47. Hofmann: Über die den Alkylcyanamiden entstammenden alkylirten Isomelamine und über die Constitution des Melamins und der Cyanursäure 593
48. G. Kirchhoff: Zur Theorie der Gleichgewichtsvertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln 615
49. v. Lendenfeld: Beitrag zur Kenntniss des Nerven- und Muskelsystems der Hornschwämme . . 623
50. Wiebe: Über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Nachwirkungs-Erscheinungen bei Thermometern 629
51. Kronecker: Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen 637
52. v. Jhering: Über die Fortpflanzung der Gürtelthiere 643
53. Kundt: Über die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes im Eisen . . 647
54. Weierstrass: Zu Lindemann's Abhandlung: »Über die Ludolph'sche Zahl« 657
55. Schneider: Der unterirdische Gammarus von Clausthal *(G. pulex, var. subterraneus)* (hierzu Taf. VII) 677
56. Leonh. Weber: Mittheilung über einen Differential-Erd-Inductor 695
57. Westermaier: Zur physiologischen Bedeutung des Gerbstoffes in den Pflanzen (hierzu Taf. VIII) 705
58. Virchow: Über krankhaft veränderte Knochen alter Peruaner 717

Namenregister 729
Sachregister 731

Digitized by Google

13,892

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DÉN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH

PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT I.

JANUAR 1885.

BERLIN 1885.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN.

Digitized by Google

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Separatabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

Digitized by Google

1. Über den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabeln.

Von L. Fuchs.

(Vorgetragen am 15. Januar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. II]; — ausgegeben am 22. Januar.)

Als Jacobi die für ein elliptisches Integral erster Gattung gelungene Umkehrung auf die hyperelliptischen Integrale auszudehnen suchte, erkannte er, dass dieses Problem nicht ausführbar sei, indem er nachwies,[1] dass die obere Grenze eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung insofern nicht als analytische Function des Integralwerthes aufgefasst werden kann, als jedem Werthe der letzteren Grösse jeder Werth der ersteren entspricht, und umgekehrt. — Erst durch Einführung mehrerer Systeme von Integralen erster Gattung, mit von einander unabhängigen oberen Grenzen, gelangte er zu einer Gattung von Functionen mehrerer Variabeln,[2] welche eine vollständige Analogie mit den elliptischen Functionen darbieten.

Ist $R(x)$ eine ganze rationale Function höheren als vierten Grades, so lässt sich das Jacobi'sche Resultat auch dahin aussprechen, dass die Integrale x der Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad \frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$$

nicht als analytische Functionen von u aufgefasst werden können.

Es ist selbstverständlich, dass alle Differentialgleichungen, welche aus (α) durch analytische Transformationen hervorgehen, die gleiche Eigenschaft besitzen.

Es ist aber ein für die Grundlagen der Theorie der Differentialgleichungen wesentlicher Umstand, dass es auch unter den Differentialgleichungen jeder Ordnung und jeden Grades, welche nicht nur Transformationen von (α) sind, Classen solcher Art giebt, welche zwischen der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen keine functionale Beziehung im gewöhnlichen Sinne des Wortes festsetzen, so lange die Veränderlichen complexe Werthe annehmen dürfen. Wir er-

[1] Crelle's Journal Bd. 13 S. 55 ff.
[2] Crelle's Journal Bd. 9 S. 394 ff.

Digitized by Google

lauben uns im Folgenden (Nr. 1 und 2) den Nachweis hierfür an dem Beispiele zweier Classen von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung zu führen. Dasselbe Beispiel zeigt zu gleicher Zeit den Weg, auf welchem man zu anderen Differentialgleichungen von höherem Grade und höherer Ordnungszahl von gleicher Eigenschaft gelangen kann.

Wenn wir unsere Betrachtungen auf algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(\beta) \qquad f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = 0$$

beschränken und die Annahme machen, dass die Integrale derselben nicht mit den Anfangswerthen stetig verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen,[1] sei es, dass y als Function von z, sei es, dass z als Function von y aufgefasst wird, so ist durch (β) stets y als analytische Function von z definirt (Nr. 3).

Wenn dagegen die Integrale der Gleichung (β), entweder wenn man y als Function von z oder wenn man z als Function von y betrachtet, mit den Anfangswerthen verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, so kann es eintreten, dass die Gleichung (β) durch keine analytische Function y von z befriedigt wird.

1.

Es sei eine Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + p\frac{dy}{dz} + qy = 0$$

gegeben, von der Beschaffenheit, dass

$$(2) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{1}{z-a_1} + \dfrac{1}{z-a_2} + \dfrac{1}{z-a_3} + P \\ q = \dfrac{\beta_1}{z-a_1} + \dfrac{\beta_2}{z-a_2} + \dfrac{\beta_3}{z-a_3} + Q, \end{cases}$$

wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ constante Grössen, P, Q rationale Functionen von z sind, welche für keinen der Werthe a_1, a_2, a_3 von z unendlich werden.

Ist a_i einer der singulären Punkte a_1, a_2, a_3, so gehört[2] zu a ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1) der Form $\phi_i, \psi_i + \phi_i \log(z-a_i)$, wo ϕ_i, ψ_i in der Umgebung von a_i eindeutige, endliche und stetige Functionen bezeichnen.

---

[1] S. meine Arbeit Sitzungsberichte 26. Juni 1884 S. 699.

[2] S. meine Arbeit Borchardt's Journal Bd. 66 S. 121 ff.

Digitized by Google

Es lässt sich nun zeigen, dass a_1, a_2, a_3 so gewählt werden können, dass die Gleichung (1) ein Integral ϕ besitzt, welches in der Umgebung jedes dieser Punkte eindeutig, endlich und stetig ist. Man hat alsdann

$$\phi_i = \gamma_i \phi \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \tag{3}$$

und γ_i eine constante Grösse.

Es sei nunmehr

$$y = A_1\gamma_1\phi + B_1(\psi_1 + \gamma_1\phi \log(z - a_1)) \tag{4}$$

ein beliebiges Integral der Gleichung (1), also A_1, B_1 beliebig vorgeschriebene constante Grössen. Nach einem $k$maligen Umlaufe von z um a_1 gehe y über in y_k, so ist

$$y_k = y + 2\pi k i B_1\gamma_1 \cdot \phi. \tag{5}$$

Es sei ferner dasselbe Integral y aus Gleichung (4) dargestellt durch das zu a_2 gehörige Fundamentalsystem

$$y = A_2\gamma_2\phi + B_2\big(\psi_2 + \gamma_2\phi \cdot \log(z - a_2)\big), \tag{6}$$

so wird y_k nach einem $l$maligen Umlauf von z um a_2 in

$$y_{kl} = y + (2\pi k i B_1\gamma_1 + 2\pi l i B_2\gamma_2)\phi \tag{7}$$

übergehen.

Ist endlich dasselbe Integral y ausgedrückt durch das zu a_3 gehörige Fundamentalsystem

$$y = A_3\gamma_3\phi + B_3\big(\psi_3 + \gamma_3\phi \log(z - a_3)\big), \tag{8}$$

so geht y_{kl} nach einem $m$maligen Umlauf von z um a_3 über in

$$y_{klm} = y + (2\pi k i B_1\gamma_1 + 2\pi l i B_2\gamma_2 + 2\pi m i B_3\gamma_3)\phi. \tag{9}$$

Setzt man $B_k\gamma_k = b_k + c_k\sqrt{-1}$, so findet im Allgemeinen zwischen den Grössen $b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1$ nicht eine lineare homogene Gleichung mit realen und ganzzahligen Coefficienten statt. Es wird daher nach den von JACOBI[1] entwickelten Principien durch geeignete Wahl von k, l, m

$$kB_1\gamma_1 + lB_2\gamma_2 + mB_3\gamma_3 = G \tag{10}$$

werden, wo G eine beliebig vorgeschriebene Grösse bedeutet.[2]

Unter den gemachten Voraussetzungen wird demnach das allgemeine Integral y der Gleichung (1) für jeden Werth von z jeden beliebigen Werth annehmen können.

---

[1] CRELLE's Journal Bd. 13 S. 55 flgd.

[2] Vergl. KRONECKER, Sitzungsberichte 1884, S. 1182 §. 2.

Digitized by Google

2.

Es sei y ein bestimmter Zweig eines Integrals der Gleichung (1) voriger Nummer, und es werde

$$u = \frac{d \log y}{dz} \tag{1}$$

gesetzt, so folgt aus Gleichung (1) voriger Nummer

$$\frac{du}{dz} + u^2 + pu + q = 0. \tag{2}$$

Ist y durch Gleichung (4) voriger Nummer definirt, so wird u in

$$u_{klm} = \frac{\frac{dy}{dz} + 2\pi i(kB_1\gamma_1 + lB_2\gamma_2 + mB_3\gamma_3)\frac{d\phi}{dz}}{y + 2\pi i(kB_1\gamma_1 + lB_2\gamma_2 + mB_3\gamma_3)\phi} \tag{3}$$

übergehen, wenn z successive k Umläufe um a_1, l Umläufe um a_2 und m Umläufe um a_3 gemacht hat. Ist daher H eine beliebig vorgeschriebene Grösse, so können k, l, m so gewählt werden, dass für jeden bestimmten Werth von z

$$u_{klm} = H \tag{4}$$

werde. Man hat zu dem Zwecke die Grösse G in voriger Nummer nur nach der Gleichung

$$G = \frac{Hy - \frac{dy}{dz}}{2\pi i\left(\frac{d\phi}{dz} - H\phi\right)} \tag{5}$$

zu wählen.

Betrachtet man in der Differentialgleichung (2) z als die unabhängige Veränderliche, so hat das Integral u derselben die Eigenschaft, dass seine Verzweigungspunkte nicht mit den Anfangswerthen stetig verschiebbar sind.[1]

Betrachtet man dagegen in derselben Gleichung u als unabhängige Veränderliche, so haben die Integrale z derselben mit den Anfangswerthen stetig verschiebbare Verzweigungspunkte, da $\frac{dz}{du}$ für willkürliche Werthe von u und dazu gehörige nach der Gleichung

$$u^2 + pu + q = 0 \tag{6}$$

zu bestimmende Werthe von z unendlich wird.[2]

[1] S. meine Arbeit, Sitzungsberichte 1884 S. 708.
[2] Ebendaselbst S. 704.

Digitized by Google

Die Gleichung (2) liefert demnach ein Beispiel zu der im Eingange erwähnten Classe von Differentialgleichungen erster Ordnung, welchen keine analytische Beziehung zwischen u und z zugehört.

3.

Es sei

$$(1) \qquad f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = 0$$

wo f eine rationale Function der Argumente bedeutet. Setzen wir voraus, dass die Integrale derselben nicht mit den Anfangswerthen stetig verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, sei es, dass man z, sei es, dass man y als unabhängige Variable betrachtet, so hat Gleichung (1) zunächst die Form

$$(2) \qquad \phi_{2m}(z)\left(\frac{dy}{dz}\right)^m + P_1 \cdot \left(\frac{dy}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + P_{m-1} \cdot \frac{dy}{dz} + \psi_{2m}(y) = 0,^1$$

worin $\phi_{2m}(z)$ eine ganze rationale Function von z von höchstens dem $2m$ten Grade mit von y unabhängigen Coefficienten, $\psi_{2m}(y)$ eine ganze rationale Function von y von höchstens dem $2m$ten Grade mit von z unabhängigen Coefficienten bedeutet.

Es sei nach den Bezeichnungen meiner Arbeit[2]

$$(3) \qquad D(z, y) = 0$$

die Discriminantengleichung der algebraischen Function $\frac{dy}{dz}$ von z und y, welche durch Gleichung (2) definirt wird. Für einen Zweig der algebraischen Function (3), welcher nicht von z unabhängige Werthe von y, oder von y unabhängige Werthe von z liefert, ergiebt sich nach den über die Gleichung (2) gemachten Voraussetzungen aus meiner citirten Arbeit,[3] dass die daselbst auftretenden Grössen k und α resp. die Werthe Null und Eins annehmen, oder was dasselbe ist:

Die durch die Gleichung (2) definirte algebraische Function $\frac{dy}{dz}$ von y, z verzweigt sich nach den über diese Gleichung gemachten Voraussetzungen, als Function von y aufgefasst, nur für von z unabhängige Werthe $y = \eta$, und, als

---

[1] Ebendaselbst S. 707.
[2] Ebendaselbst S. 702.
[3] Ebendaselbst S. 702—705.

Digitized by Google

Function von z aufgefasst, nur für von y unabhängige Werthe $z = \xi$.

Nach Satz II Nr. 3 meiner citirten Arbeit[1] sind η und ξ Integrale der Gleichung (2), wenn man resp. y als Function von z und z als Function von y betrachtet. Da aber η von z und ξ von y unabhängig ist, so folgt

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{d\eta}{dz} = 0 \\ \frac{d\xi}{dy} = 0, \end{cases}$$

d. h. die Werthe $y = \eta$ und die Werthe $z = \xi$, für welche $\frac{dy}{dz}$ sich bezüglich verzweigt, je nachdem dasselbe als Function von y oder als Function von z aufgefasst wird, sind resp. Wurzeln der Gleichung

$$(5) \qquad \psi_{2m}(y) = 0$$

$$(6) \qquad \phi_{2m}(z) = 0.$$

Findet für $y = \eta$ eine $\alpha - 1$fache Verzweigung von $\frac{dy}{dz}$ als Function von y statt, so muss nach Satz III Nr. 3 meiner oben citirten Arbeit (da in der Gleichung (E) daselbst $\zeta = 0$ zu setzen ist und dieselbe demzufolge in unsere Gleichung (5) übergeht), $y = \eta$ mindestens eine $\alpha - 1$fache Wurzel der Gleichung (5) sein. Findet ebenso für $z = \xi$ eine $\beta - 1$fache Verzweigung für $\frac{dz}{dy}$ als Function von z statt, so ist aus demselben Grunde ξ mindestens eine $\beta - 1$fache Wurzel der Gleichung (6). Es folgt hieraus, dass die Anzahl der Verzweigungen von $\frac{dy}{dz}$, sowohl wenn dasselbe als Function von y, als auch wenn es als Function von z aufgefasst wird, nicht grösser als $2m$ ist. Nach einer von Riemann[2] herrührenden Relation zwischen der Anzahl der Verzweigungen einer algebraischen Function, dem Grade der Gleichung, welcher sie genügt, und ihrem Range, ergiebt sich demnach, dass $\frac{dy}{dz}$ vom Range Null oder Eins ist, ebensowohl wenn dasselbe als Function y, als auch wenn es als Function von z aufgefasst wird. Die vorhergehende Untersuchung führt also zu dem Resultat:

---

[1] Sitzungsber. 1884. S. 704.

[2] Borchardt's Journal Bd. 54 S. 129.

Digitized by Google

Wenn die Differentialgleichung (1) in Bezug auf ihre Argumente algebraisch ist und die Eigenschaft besitzt, dass die Verzweigungspunkte der Integrale derselben sich nicht mit den Anfangswerthen stetig verschieben, sei es, dass man y als Function von z, sei es, dass man z als Function von y betrachtet, so ist die algebraische Function $\frac{dy}{dz}$ von y ebenso wie die algebraische Function $\frac{dz}{dy}$ von z vom Range Null oder Eins.

Man kann nun nach den Principien meiner oben citirten Arbeit Nr. 6 bis 7 zeigen, dass alsdann das Integral y der Gleichung (2) eine analytische Function von z darstellt.

4.

Von den Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale mit den Anfangswerthen stetig verschiebbare Verzweigunspunkte besitzen, hat man nun zunächst diejenigen auszuscheiden, welche durch eine algebraische Transformation in eine Differentialgleichung übergeführt werden können, deren Integrale nur feste Verzweigungspunkte haben. Denn so wie es einleuchtend ist, dass man Differentialgleichungen der letzteren Art durch eine willkürliche algebraische Transformation in solche der ersteren Art umwandeln kann, so ergiebt sich auch, dass, wenn eine Differentialgleichung der ersteren Art in eine solche der letzteren Art algebraisch umgeformt werden kann, dieselbe nicht zu wesentlich anderen Transscendenten führt, wie die Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten.

Für die Differentialgleichungen dagegen, für welche der Rang der durch dieselben definirten Function $\frac{dy}{dz}$ entweder als Function von y oder als Function von z die Einheit übersteigt, und welche nicht algebraisch transformirbar sind in andere Differentialgleichungen, deren Integrale sich nur in festen Punkten verzweigen, ist zu untersuchen, ob diejenigen Werthe von y, welche ein und demselben willkürlichen Werthe von z entsprechen, resp. diejenigen Werthe von z, welche ein und demselben willkürlichen Werthe von y entsprechen, wie in dem in Nr. 2 gegebenen Beispiele, eine oder mehrere Flächen stetig bedecken, oder in endlicher oder unendlicher Anzahl sich in discreten Punkten über die Ebene vertheilen.

Digitized by Google

Im ersteren Falle wird durch die Differentialgleichung y ebenso wenig als analytische Function von z bestimmt, wie die obere Grenze eines einzigen ABEL'schen Integrals erster Gattung als analytische Function des Integralwerthes aufzufassen ist.

Digitized by Google

2. Über die Anwendung des Pendels zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde.

Von Dr. J. Wilsing
in Potsdam.

(Vorgelegt von Hrn. Auwers am 15. Januar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. II]; — ausgegeben am 22. Januar.)

Die erste experimentelle Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde, welche Maskelyne und Hutton ausführten, beruht auf der Beobachtung von Lothabweichungen in der Nähe des Shehallien. Sie wird beeinträchtigt durch die Unsicherheit, welche die unvollständige Kenntniss der Masse und Dichtigkeit des ablenkenden Gebirgszuges verursacht, ein Übelstand, der auch die von Carlini und Airy aus Pendelschwingungen abgeleiteten Werthe trifft. Man hat deshalb die Anwendung des Pendels zu Gunsten der Torsionswage aufgegeben, da dasselbe nicht empfindlich genug ist, um durch kleinere, genau bestimmbare Massen in merklicher Weise beeinflusst zu werden.

Ohne Schwierigkeit lässt sich aber die nöthige Empfindlichkeit dadurch erreichen, dass man den Schwerpunkt des Pendels dicht unter die Drehungsaxe verlegt. Mit einem Versuchsapparat, welcher zur Orientirung über die praktische Durchführbarkeit dieser Modification dienen sollte, wurden bereits im September vergangenen Jahres Beobachtungen am Observatorium angestellt. Derselbe bestand aus einer 1^m langen prismatischen Stange aus dünnem Eisenblech, an deren Enden Bleikugeln von je 300^{gr} Gewicht befestigt waren. Die stählerne Schneide, welche sich auf Achatlagern dreht, war in der Mitte der Stange angebracht. Der Apparat wurde so justirt, dass seine Axe in der Ruhelage nahe mit der Richtung der Verticalen zusammenfiel. Die Bewegung wurde durch Spiegelablesung beobachtet. Ist die Gleichgewichtsstellung gefunden, und werden dann die anziehenden Massen horizontal neben die Bleikugeln gebracht, so lässt sich aus der Ablenkung des Pendels unmittelbar das Verhältniss ihrer Anziehung zur Gravitationsconstante bestimmen. Durch Umkehrung der Richtung der ablenkenden Kraft kann man die zu messende Wirkung verdoppeln.

Digitized by Google

Das Verfahren darf als eine Combination der beiden ältesten Methoden angesehen werden. Es bietet im Vergleich mit der von Hrn. von Jolly mit ausgezeichnetem Erfolg angewandten Methode der Wägung den Vortheil, dass die Empfindlichkeit des Pendels eine beträchtlich grössere ist.

Obgleich die rohe Construction des erwähnten Versuchsinstruments die Ausführung der nöthigen Correctionen sehr erschwerte — dasselbe war auf einem hölzernen Stativ gegen Erschütterungen und Luftströmungen nicht genügend geschützt angebracht — konnte leicht eine Schwingungsdauer von 150^s erreicht werden, ohne dass sich Unregelmässigkeiten, welche als wesentliche angesehen werden müssten, gezeigt hätten. Es lässt sich dies dadurch erklären, dass partielle Schwingungen nach Möglichkeit ausgeschlossen sind, und die Axe des Pendels nur wenige Grad zu beiden Seiten von der Verticalen abweicht, also die Durchbiegung der Stange nur einen äusserst geringen Betrag erreichen kann. Die der oben angegebenen, bereits erreichten Schwingungsdauer entsprechende Empfindlichkeit würde schon genügen, um die Anziehung von Kugeln von wenigen Centnern Gewicht zu messen, wie dies bei Anwendung der Torsionswage möglich ist.

Die Empfindlichkeit des Apparats wurde aus Schwingungsbeobachtungen durch Hinzufügung von Gewichten bestimmt, welche in bekannter Entfernung von der Schneide am unteren Ende des Pendels aufgesetzt wurden. Ist gm das Gewicht des Zusatzstückes, d die Entfernung seines Schwerpunkts von der Schneide, so wird die Schwingungsdauer für unendlich kleine Schwingungen:

$$T = \pi \sqrt{\frac{MK^2 + mk^2 + md^2}{g(Ms + md)}}.$$

Hieraus findet man in Verbindung mit der Schwingungsdauer des unbelasteten Pendels die Grösse gMs, welche den Nenner des Ausdrucks für den Ablenkungswinkel

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{g'ml}{gMs}$$

bildet, wo g' die Anziehung der ablenkenden Masse, m die Masse der Pendelkugel, l die Entfernung ihres Mittelpunktes von der Schneide bedeutet. Eine genauere Betrachtung zeigt, dass die Anwendung dieses Verfahrens auch dann noch erlaubt ist, wenn der Auftrieb der Luft, der Bessel'sche Correctionsfactor für das Trägheitsmoment und eine etwa vorhandene Abstumpfung der Schneide in Rechnung gezogen wird, da die Form der Gleichungen sich nicht ändert und nur die Grössen gMs und MK^2 eine andere Bedeutung erhalten.

Digitized by Google

Als Beispiel für die Bestimmung mögen hier die Resultate zweier Beobachtungsreihen folgen. Bei der ersten ergab sich die Dauer der freien Schwingung:

$$\begin{aligned} & T_0 = 59^s.20 \\ \text{Zulagegewicht } 1^{gr} \quad & T_1 = 22.00 \\ \text{» } \quad 5^{gr} \quad & T_5 = 10.46 \\ \text{» } \quad 10^{gr} \quad & T_{10} = 7.48 \end{aligned}$$

Für *gMs* in Gramm und Millimeter ausgedrückt findet man resp. die Werthe: 81.96, 81.25, 81.89. —

Bei der zweiten Reihe betrug die Dauer der freien Schwingung:

$$\begin{aligned} & T_0 = 145^s.20 \\ \text{Zulagegewicht } 1^{gr} \quad & T_1 = 23.64 \\ \text{» } \quad 3^{gr} \quad & T_3 = 13.66 \\ \text{» } \quad 8^{gr} \quad & T_8 = 8.41 \end{aligned}$$

und *gMs*: 13.75, 13.50, 13.50. —

Die Übereinstimmung dieser von einander unabhängigen Zahlen ist auch durch die Fehler der Zulagegewichte noch etwas beeinträchtigt, deren Betrag nicht bekannt war. Doch zeigen die Versuche zur Genüge, dass sich die Reductionsgrösse bei einem zweckmässig ausgeführten Apparat mit grosser Sicherheit bestimmen lassen wird.

Ausser der Berechnung der Gravitation der Pendelkugel gegen die anziehenden Massen, welche allen Methoden gemeinsam ist, sind dann noch zwei Messungen nothwendig, der Entfernung des Zulagegewichts und des Mittelpunkts der Pendelkugeln von der Schneide. Diese Messungen erfordern aber keine anderen Hülfsmittel, als sie beim Reversionspendel in Gebrauch sind. Eine Genauigkeit von einigen Zehntel Millimetern ist bei den in Aussicht genommenen Dimensionen des Pendels genügend.

Das Ergebniss der bisher angestellten Versuche lässt daher kaum zweifelhaft, dass das Pendel, welches in allen Problemen der Schwerebestimmung so vorzügliche Dienste leistet, auch für den vorliegenden Zweck brauchbare Resultate liefern wird, und hoffe ich in nächster Zeit mit einem von REPSOLD in Hamburg ausgeführten Apparate die Beobachtungen auf dem Astrophysikalischen Observatorium weiter fortführen und zum Abschluss bringen zu können.

Digitized by Google

Digitized by Google

3. Die Verbreitung des blonden und des brünetten Typus in Mitteleuropa.

Von R. Virchow.

(Vorgetragen am 29. Januar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. V]; — ausgegeben am 5. Februar.)

Die von der Deutschen anthropologischen Gesellschaft veranlassten Untersuchungen über die Farbe der Haut, der Haare und der Augen bei den Schulkindern in Deutschland hatten ebenso entscheidende, als überraschende Ergebnisse in Bezug auf die Verbreitung der Blonden und der Braunen im Deutschen Reiche geliefert, aber sie hatten eine Anzahl der wichtigsten Fragen offen gelassen, deren Lösung erst dann erwartet werden konnte, wenn ähnliche Untersuchungen auch in den Nachbarländern angestellt sein würden. Die Anregung dazu ist in der That von Erfolg gewesen: ganz analoge Erhebungen haben in Belgien und der Schweiz stattgefunden und der soeben veröffentlichte Bericht über die Schulen des cisleithanischen Österreich hat den vorläufigen Abschluss für Mitteleuropa gebracht. Es mag daher jetzt gestattet sein, eine kurze Übersicht über die Erforschung dieses grossen Gebietes zu geben.

Die vorliegende Statistik umfasst aus

Deutschland	6758827
Belgien	608698
Schweiz	405609
Österreich	2304501
im Ganzen	10077635

Schulkinder. Niemals früher ist ein gleich grosses und, ich darf im Rückblick auf die gewonnenen Resultate sagen, gleich gutes Material für anthropologische Zwecke zusammengebracht worden. Mit Ausnahme der Niederlande ist in vollem Zusammenhange die Jugend fast aller Schulen vom Pregel im Norden und von dem oberen Dniester im Süden bis zum Ärmelcanal und bis zu den Vogesen, von der Ost- und Nordsee bis zum adriatischen Meere und den Alpen durch die Untersuchung erfasst worden. Die verschiedensten Stammes- und Sprachgebiete, einzelne ganz, andere theilweise, sind Gegenstand der gleichen somatologischen Betrachtung geworden.

Digitized by Google

Die Erhebung geschah im Wesentlichen überall nach denselben Gesichtspunkten. Man ging davon aus, dass es sich nicht darum handele, einfach die numerische Verbreitung der einzelnen Farben für Haut, Haare und Iris zu ermitteln, sondern dass festgestellt werden müsse, in welcher Häufigkeit sich bei den einzelnen Individuen eine bestimmte Farbe des Haares mit einer bestimmten Farbe der Iris oder der Haut zusammen findet. Daraus ergab sich für das Erhebungsformular, welches den Lehrern vorgelegt wurde, eine grössere Reihe von Combinationen, und zwar zunächst 11; andere, ungewöhnliche Combinationen blieb ihnen überlassen hinzuzufügen.

Für die generelle Betrachtung haben diese Combinationen einen sehr ungleichen Werth. Da es in erster Linie darauf ankommt, den blonden und den brünetten Typus zu fixiren, so müssen die Mischformen ausgeschieden werden, denn sie haben erst eine secundäre Bedeutung. Demgemäss sind nur solche Individuen der blonden Rasse zugerechnet worden, welche alle jene Eigenschaften vereinigten, welche schon die classischen Schriftsteller als Merkmale der Germanen aufgeführt haben, nämlich blondes Haar, blaue Augen und weisse Haut. Im Gegensatze hierzu würde für den brünetten Typus zu fordern sein: braunes Haar, braune Augen und dunkle Haut. Wir haben jedoch hier die Concession gemacht, auch diejenigen Combinationen aufzunehmen, wo nicht braunes, sondern schwarzes Haar aufgeführt, sowie diejenigen, wo neben brauner Iris und braunen Haaren nicht dunkle, sondern weisse Haut angegeben ist. Wir haben uns damit der allgemeinen Auffassung angeschlossen, und zwar um so leichter, als die Grenze zwischen dunkler und heller Haut nicht immer ganz sicher zu ziehen ist.

Von dieser Methode ist nur der Leiter der belgischen Erhebungen abgewichen. Hr. VANDERKINDERE hat die Bestimmung der Haut ganz weggelassen und für den blonden Typus nur helle Augen gefordert, d. h. ausser blauen Augen auch graue zugelassen. In Folge davon haben seine Aufstellungen für den blonden Typus leider einen sehr zweifelhaften Werth, dagegen sind sie für den brünetten Typus mit den übrigen in voller Übereinstimmung.

Auf eine Erörterung der Einwendungen, welche gegen die von uns angewendete Methode gemacht worden sind, gehe ich hier nicht ein. Sie werden in dem der anthropologischen Gesellschaft abzustattenden Gesammtbericht ihre Besprechung finden. Insbesondere werden dort auch das Maass des Nachdunkelns der Haare und die aus dieser Erscheinung abgeleiteten Bedenken berührt werden. Hier mag nur das ausgesprochen werden, dass jedes Kind, welches im schulpflichtigen Alter blonde Haare, blaue Augen und weisse

Digitized by Google

Haut besitzt, unbedenklich dem blonden Typus zugesprochen werden muss.

Was nun die Frequenz der Typen betrifft, so ergeben sich für den rein blonden Typus

in Deutschland	2149027
» Österreich	456260
» der Schweiz	44865
im Ganzen	2650152

Schulkinder, d. h. auf 9468557 überhaupt gezählte Kinder etwas mehr als $^1/_4$. Auf den brünetten Typus fallen

in Deutschland	949822
» Österreich	534091
» Belgien	167401
» der Schweiz	104410
im Ganzen	1755724

Schulkinder. d. h. auf 10077635 gezählte Individuen etwas mehr als $^1/_6$. Mehr als die Hälfte aller Schulkinder in Mitteleuropa fällt also den Mischtypen zu.

Die Vertheilung der reinen Typen ist aber eine sehr verschiedenartige. Es fanden sich nämlich

	Blonde.	Brünette.
in Deutschland	31.80 Procent	14.05 Procent
» Österreich	19.79 »	23.17 »
» der Schweiz	11.10 »	25.70 »
» Belgien	— »	27.50 »

Ergiebt sich daraus mit Sicherheit, dass das Deutsche Reich in seinem gegenwärtigen Bestande noch immer den rein blonden Typus in der grössten Häufigkeit unter den mitteleuropäischen Staaten darbietet, so ist doch auch in seinen Grenzen die Vertheilung eine höchst ungleiche. Eine Nachweisung darüber habe ich schon auf der Generalversammlung der Deutschen anthropologischen Gesellschaft in Constanz geliefert.[1] Ich beschränke mich daher hier darauf, zu wiederholen, dass sich eine sehr regelmässige Abnahme des blonden und eine entsprechende Zunahme des brünetten Typus von Norden nach Süden darstellt, so dass Norddeutschland zwischen 43.35 (Schleswig-Holstein) und 33.5 (Lippe-Detmold), Mitteldeutschland zwischen 32.5 (Reuss j. L.) und 25.29 (Reuss ä. L.), Süddeutschland zwischen 24.46 (Württemberg) und 18.44 (Elsass-Lothringen) Blonde zeigt, während dagegen die Zahl der Brünetten in Süddeutschland zwischen 25 und

[1] Correspondenzblatt der Deutschen Gesellschaft für Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte. 1877. No. 9 S. 96.

Digitized by Google

19, in Mitteldeutschland zwischen 18 und 13, in Norddeutschland zwischen 12 und 7 Procent schwankt.

Durch diesen Nachweis war zunächst die von französischer Seite ausgegangene Behauptung, dass der eigentlich germanische Typus in Süddeutschland zu suchen sei, Norddeutschland dagegen von einem brünetten Mischvolk, aus Finnen und Slaven hervorgegangen, bewohnt werde, als eine willkürliche Erfindung dargethan. Noch jetzt stellt Norddeutschland das eigentliche Land der Blonden dar, und zwar stehen an der Spitze der Frequenzliste

Schleswig-Holstein	mit 43.35	Procent,
Oldenburg	» 42.73	»
Pommern	» 42.64	»
Meklenburg-Strelitz	» 42.63	»
Meklenburg-Schwerin	» 42.03	»
Braunschweig	» 41.03	»
Hannover	» 41.00	»

Nichts läge näher, als diese Verhältnisse mit den alten Stammessitzen der germanischen Stämme im Norden und Osten in Zusammenhang zu bringen, aber es leuchtet bei einiger Erwägung sofort ein, dass damit wohl für Schleswig-Holstein, Oldenburg, Braunschweig und Hannover eine zutreffende Erklärung gegeben ist, aber nicht für Pommern und Meklenburg, welche Jahrhunderte lang nach dem Abzuge der deutschen Stämme in ungeschmälertem Besitz der Slaven gewesen sind. Die Meinung, dass die Slaven ein mehr brünettes Volk seien, ist weit verbreitet, und ein Blick auf die Karte des brünetten Typus bringt sofort zahlreiche Belege dafür. Oberschlesien und Posen zeichnen sich vor den Nachbarbezirken durch dunklere Töne aus; der masurische Grenzbezirk von Ostpreussen ist so deutlich, wie auf einer Sprachenkarte, abgesetzt, und selbst die polnischen Sprachinseln, welche das linke Weichselufer bis zur Küste hin begleiten, sind auf der chromatologischen Karte leicht wiederzufinden. Auch die österreichische Erhebung hat in Böhmen und Mähren, in Kärnthen und Krain höchst auffällige Frequenzverhältnisse für den braunen Typus ergeben. Ich werde darauf noch zurückkommen; hier kann ich, Angesichts der erwähnten Thatsache, auch meinerseits nur aussprechen, dass das Vorwiegen der Blonden in Meklenburg, Pommern und selbst Ostpreussen auch mich sehr überrascht hat.

Meiner Meinung nach ist der Hauptgrund dieser Erscheinung in einer starken Rückwanderung der Deutschen zu suchen. So oft die Geschichte der Colonisation von Ostdeutschland auch behandelt worden ist, so ist doch ihre cardinale Bedeutung für die Bildung des Volksthums in diesen Provinzen nicht ganz gewürdigt worden.

Digitized by Google

Es scheint mir ein besonderes Verdienst unserer Erhebungen und unserer Karten zu sein, dieses Verhältniss wenigstens für die physiognomonischen Merkmale klargelegt zu haben. Ich will nicht darüber streiten, wie viel oder wie wenig Germanen nach dem Abzuge ihrer Stämme im Lande zurückgeblieben und von den nachrückenden Slaven aufgenommen worden sind. Wir wissen darüber recht wenig. Aber wir wissen, dass gerade diejenigen Provinzen, welche einst slavisch waren und nachher völlig regermanisirt worden sind, von bestimmten Gegenden in Mittel- und Westdeutschland aus ihre Einwanderung erhalten haben. Flamänder, Holländer und Friesen sind nach Holstein, der Altmark, ja bis in die Mittelmark gekommen; Westfalen und Braunschweiger haben Meklenburg und Pommern besetzt. Aus Ostfranken kam die Colonisation, welche Sachsen, Schlesien und Nordböhmen füllte. Die Bayern besiedelten Österreich.

Nun ist nichts mehr charakteristisch, als die Congruenz der Farben, welche jeder dieser besiedelten Striche auf unserer Karte mit dem Mutterlande zeigt, von dem er seine Colonen erhielt. Vergleicht man z. B. die Sprachkarte von Rich. Andrée, so fällt die Grenze zwischen Nieder- und Oberdeutsch genau auf den Nordrand des Gebietes, in welchem unsere Farbenkarte dasselbe dunklere Braun und dasselbe hellere Blau zeigt, welche das eigentliche Mitteldeutschland bezeichnen. Ja, ich möchte glauben, dass eine Reihe weniger blonder und mehr brünetter Kreise, welche sich längs der Oder bis in das östliche Meklenburg hineinziehen, derselben fränkischen Einwanderung zuzurechnen sind, welche Niederschlesien besetzt hat. Noch grösser ist die Congruenz in Nordböhmen, namentlich in den westlichen Theilen. Am stärksten aber überrascht die völlige Übereinstimmung zwischen Bayern und Österreich längs der Donau. Schon früher hatte ich darauf hingewiesen, dass die bayerischen Verhältnisse erst fassbar werden würden, wenn wir die österreichischen Zahlen und Karten haben würden. Jetzt zeigt sich ein grosses, fast homogenes Farbengebiet vom Lech bis zur Leitha. Die Zahl der Brünetten übertrifft hier um eben so viel die Zahl im Nordwesten von Böhmen, als der brünette Typus von Niederbayern den von Oberfranken.

Wir müssen also in Bezug auf die Wanderungen der deutschen Stämme zwei Perioden streng von einander scheiden: die eine umfasst die älteren Wanderungen, welche nach Süden und Westen gerichtet waren und mit der Aufrichtung des fränkischen Reiches ihre Endschaft fanden; die andere begreift die Rückwanderungen nach Osten, welche erst in der Carolinger Zeit ihren Anfang nahmen und noch jetzt nicht ganz abgeschlossen sind. Diese letzteren sind es, welche zu bleibender Colonisation und zur Gestaltung neuen, rein deutschen Volksthums

Digitized by Google

geführt haben, und es ist gewiss nicht ohne Bedeutung, dass sowohl das Kaiserthum der Habsburger, als das der Hohenzollern hier ihre eigentlichen Grundlagen gefunden haben. Von den südlichen und westlichen Wanderungen der früheren Zeit ist trotz aller der Reiche, welche Ost- und Westgothen, Sueven und Longobarden, Franken und Angelsachsen errichtet haben, nichts rein Deutsches übrig geblieben. In den meisten der Länder, welche diese Reiche umfassten, suchen wir vergeblich nach Spuren unserer Landsleute in der jetzigen Bevölkerung, und in den wenigen, wo sie unzweifelhaft noch vorhanden sind, erfordert es ein besonderes Studium, um sie aus der Umwickelung vieler anderer Stämme herauszuschälen.

Diese Schwierigkeit tritt schon auf dem uns direct beschäftigenden Gebiet von Mitteleuropa, ja in Deutschland selbst hervor. Ich wähle als Beispiel dafür den Nachweis der suevischen und alemannischen Stämme. Eines ist allerdings durch die combinirten deutsch-schweizerischen Erhebungen in ganz überraschender Klarheit dargelegt: es geht eine breite Zone relativer Hellfarbigkeit vom Main bis zum Bodensee und zum Allgäu; daran schliesst sich eine noch mehr abgeschwächte, aber ganz scharf begrenzte Zone, welche über die schwäbische Alp und den Schwarzwald den Ober-Elsass und die Nordschweiz erreicht, sich von da über den Aargau, die Cantone Bern, Uri und Schwyz bis in das Hochgebirge erstreckt und noch darüber hinaus die Cantone Wallis und Tessin umfasst. Dabei kommt die Merkwürdigkeit vor, dass das abgelegene Saanenthal mit 28.3 Procent das höchste Verhältniss der Blonden in der Schweiz zeigt,[1] dieselbe Verhältnisszahl, welche in der mitteldeutschen Gruppe Sachsen-Meiningen ergeben hat, während im Berner Jura nur 8, im Berner Tiefland 10 und im ganzen Berner Oberland 13 Procent ermittelt wurden.[2] Ebenso sinkt die Procentzahl der Brünetten im Ober-Elsass in den Kreisen Thann und Rappoltsweiler auf 13, Gebweiler auf 14 Procent, während sie im Nieder-Elsass 23 bis 31 Procent beträgt. Aber vergeblich suchen wir in der West-Schweiz, vielleicht mit einziger Ausnahme des Cantons Genf, Spuren der Burgunder, und selbst die Alemannen in der Ost-Schweiz verkriechen sich unter brünetten Zeichen. Glarus hat nur 7 Procent Blonde, so wenig wie kein einziger Bezirk in Deutschland, dagegen 31 Procent Brünette, — ein Verhältniss, das im Deutschen Reiche nur einmal, im Kreise Schlettstadt im Nieder-Elsass, constatirt ist. Mir waren die Glarner Zahlen so auffällig, dass ich

[1] Th. Studer: Über die statistische Aufnahme der Farbe der Haut und der Augen im Canton Bern. 1880. S. 4.

[2] Kollmann. Die statistischen Erhebungen über die Farbe der Augen, der Haare und der Haut in den Schulen der Schweiz. 1881. S. 25.

Digitized by Google

selbst an Ort und Stelle einen Theil derselben nachgeprüft habe, aber ich muss im Wesentlichen die Richtigkeit derselben anerkennen.

Unzweifelhaft ist also die schwäbisch-alemannische Bewegung in unseren Zahlen zu erkennen, aber weder in ihrer ganzen Breite, noch in ihrer Intensität. Wer war darauf vorbereitet, die Blonden in den scheinbar reinsten Theilen der Centralschweiz so spärlich gesät zu treffen! Freilich konnten schon der Schwarzwald und die rauhe Alp darauf vorbereiten. In vielen Bezirken Badens und mehreren Württembergs kommen sich die Blonden und Brünetten im Procentverhältniss ganz nahe (z. B. 24 gegen 22). Ja, noch viel weiter rückwärts ist diese, man darf es wohl im germanischen Sinne so nennen, Anomalie zu verfolgen, denn noch in Thüringen macht sich die Abnahme der Blonden und die Zunahme der Brünetten bemerkbar. Sachsen-Coburg-Gotha hat nur 21.57 Procent Blonde und 15.37 Procent Brünette; Sachsen-Weimar 24.33 Blonde und 14.42 Brünette. Dazu kommt, was hier nur beiläufig erwähnt sein mag, in diesem ganzen Gebiet eine höchst auffällige Zahl brachycephaler Kopfformen, welche dem sogenannten Reihengräbertypus der Alemannen und Franken in keiner Weise entsprechen, sowie eine ungewöhnliche Häufigkeit brauner und grauer Augen innerhalb der Mischtypen.

Dieselbe Erscheinung tritt in einem zweiten Arm der alemannischen Strömung zu Tage, demjenigen, welcher die historisch so häufig benutzte Einbruchspforte nach Italien durch das Oberinn- und Oberetschthal gefüllt hat. Hier folgen sich von Norden nach Süden die Schulbezirke mit schwachen Zahlen für die Blonden und hohen, zugleich schnell wachsenden für die Brünetten:

	Unter 100 christlichen Schülern blonde	braune
Reutte	19.7 Procent,	18.7 Procent,
Imst	18.4 »	22.8 »
Landeck	19.7 »	23.3 »
Meran	16.8 »	24.0 »

Um so auffälliger erscheint das durch italienische Vorposten abgeschnittene Pusterthal, das im Bezirk Brunecken 14.9 Procent Blonde und nur 20.4 Procent Braune zeigt.

Am meisten überrascht jedoch die Stärke der brünetten Mischung in dem bayerisch-österreichischen Donaugebiet. Genau genommen beginnt dieselbe schon bei Ulm; von da folgt sie in ziemlich gleichmässiger Weise dem Strome bis über Straubing hinab, steigert sich in der Nähe der österreichischen Grenze und geht jenseits derselben mit mehreren localen Schwankungen bis Wien fort. Nur auf dem linken Donauufer, in Niederösterreich und von da bis nach

Digitized by Google

Mähren und Böhmen hinaufgreifend, erscheint eine deutliche Abnahme der Brünetten und eine entsprechende Zunahme der Blonden. Dieses Verhältniss culminirt in

	Blonde.	Braune.
Waidhofen a. d. Th.	25.5 Procent,	20.6 Procent,
Nikolsburg	25.2 »	19.5 »
Stadt Znaim	26.1 »	25.2 »

Dies sind aber gerade Gebiete, in welchen, wie Hr. SCHIMMER[1] mit Recht hervorhebt, auch in römischer Zeit anhaltend deutsche Stämme sassen. Ja, man darf wohl, Angesichts der im nördlichen Mähren und in Österreichisch-Schlesien in ähnlicher Weise hervortretenden Verhältnisse, daran erinnern, dass dies die alte Völkerstrasse war, auf welcher die Stämme der Ostseeküste und des Odergebietes ihre Einbrüche gegen die Donau und das römische Reich vollzogen.

Auf dem rechten Ufer der Donau folgen endlich, in sehr merklicher Weise dem blonden Typus zugewandt, die steyerischen und kärntnerischen Schulbezirke. Von ihnen nenne ich

	Blonde.	Brünette.
Bruck	21.0 Procent,	23.5 Procent,
Judenburg	24.4 »	19.7 »
Murau	23.3 »	18.8 »
Wolfsburg	22.3 »	23.8 »
Windischgrätz	23.5 »	20.5 »
Cilli, Stadt	27.7 »	23.1 »
» Umgebung ..	25.1 »	19.5 »

In Niederbayern ist kein einziger Amtsbezirk, der so »helle« Zahlen ergiebt; in Oberbayern nur ein einziger, der sich den steyerischen annähert, das Bezirksamt Wasserburg am Inn, welches sowohl für die Blonden, als für die Brünetten die Procentzahl 20 hat. Die Zahlen der genannten steyerischen und niederösterreichischen Bezirke schliessen sich vielmehr an die mittelfränkischen an.

Wie ist diese ausgedehnte Dunkelung der mittel- und noch mehr der süddeutschen Stämme zu erklären? Auf den ersten Blick könnte man glauben, sie sei klimatischen Einflüssen zuzuschreiben; es sei eine Art von Transformation im Sinne DARWIN's. Aber ein Blick auf unsere Karte lehrt, dass in gleichen Breiten die grössten Verschiedenheiten bestehen. Was für Belgien gilt, ist ganz werthlos für Deutschland; Böhmen ist nicht maassgebend für Galizien; die Steyermark steht weder dem Ober- noch dem Tiefland des Cantons Bern parallel.

---

[1] G. A. SCHIMMER, Erhebungen über die Farbe der Augen, der Haare und der Haut bei den Schulkindern Österreichs. Wien 1884. S. X.

Digitized by Google

Verhältnisse, wie sie der Oberelsass, das Saanen- und Pusterthal zeigen, liegen ausserhalb jeder klimatologischen Betrachtung.

Es bleibt daher keine andere Erklärung als die durch Erblichkeit. Hier würde sich die Frage stellen: waren die suevischen Stämme schon in höherem Maasse brünett, als sie aus dem Norden auswanderten? Wird diese Frage verneint, wie es wohl in Rücksicht auf unsere Karte nicht anders sein kann, so bleibt keine andere Erklärung übrig, als die durch Mischung mit anderen, mehr oder weniger brünetten Völkern. Aber welche waren dies? Thatsächlich ersehen wir auf unserer Karte, dass Deutschland im Westen, Süden und Osten von brünetten Stämmen umwohnt ist. Die Wallonen, die Rhätier, die Ladiner und Italiener, die Slovenen und Czechen, die Wallachen — sie alle zeigen sich hier als eminent brünette Stämme. Vor dieser Thatsache verschwindet zunächst jede andere Rücksicht. Man mag noch so viel auf das Zeugniss der klassischen Schriftsteller hinweisen, dass auch die Gallier blond gewesen seien, dass selbst die Slaven nur durch geringe graduelle Unterschiede von den Germanen verschieden waren, der brünette Typus der Wallonen und der Czechen wird dadurch nicht berührt.

Freilich darf man diese Thatsachen nicht als allgemein gültige ansehen. Aus dem brünetten Typus der Wallonen folgt keineswegs, dass alle Belgae brünett waren, so wenig als das Braun der Czechen das relative Blond der Krakusen und Mazuren vertilgen kann. Unsere Wenden haben nichts weniger an sich, als den Typus der heutigen Czechen. Aber die Czechen und Slovenen sind nicht so weit in Deutschland eingedrungen, dass man daraus das starke Braun der süd- und mitteldeutschen und der schweizerischen Bevölkerungen erklären könnte. Hier giebt es meiner Auffassung nach ausser den verhältnissmässig begrenzten Einwirkungen der Römer, der Rhätier und Illyrier nur die Annahme, dass starke Überreste celtischer oder praeceltischer Bewohner zurückgeblieben waren, welche sich der germanischen Einwanderung zumischten.

Dies weiter auszuführen, muss einer anderen Betrachtung vorbehalten bleiben.

Digitized by Google

Digitized by Google

4. Zur Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Körper.

Von Victor Hausmaninger
in Graz.

(Vorgelegt von Hrn. G. Kirchhoff am 8. Januar: — gedruckt im Bericht vom 29. Januar [St. V]; — ausgegeben am 5. Februar.)

Eine von der gewöhnlichen Newton'schen abweichende Theorie des elastischen Stosses cylindrischer Stäbe wurde bekanntlich zuerst von Cauchy[1] und St. Venant[2] entwickelt. Aus Versuchen von Hrn. Boltzmann,[3] Hrn. Voigt[4] und mir[5] geht zweifellos hervor, dass in der That der Erfolg des Stosses zweier cylindrischer Stäbe ausser von den Massen auch von der Zeit der Rückkehr der Longitudinalwelle bedingt ist, die in jedem Stab entsteht und an dessen freiem Ende reflectirt wird, und dass demnach immer Abweichungen von der alten Stosstheorie im Sinne der St. Venant'schen auftreten.

Diese Abweichungen sind jedoch niemals ganz so gross, meist sogar sehr bedeutend kleiner, als sie die St. Venant'sche Theorie erfordert. Eine Vermittelung dieser letzteren und der alten Theorie schien daher sehr wünschenswerth. Eine solche wurde bisher meines Wissens nur von den HH. W. Voigt und H. Hertz versucht. Hr. Voigt sieht die Ursache der Abweichung zwischen der Theorie St. Venant's und der Erfahrung in der dieser Theorie zu Grunde liegenden Annahme, wornach beide Stäbe von dem Momente an, wo überhaupt eine merkliche Wechselwirkung beginnt, sich sofort in ihren gesammten Endflächen direct berühren und genau wie zwei vollkommen fest verbundene Körper aufeinander wirken. In diesem Falle können aber die Stäbe nach Hrn. Voigt's Ansicht nicht durch eine beliebig kleine Dilatation getrennt werden, und wenn dieselbe gross genug wäre, um die Cohäsion eines Stabes selbst zu überwinden, so würde — bei

[1] Cauchy, Bull. d. Scienc. d. l. Soc. Phil. 1826.
[2] St. Venant, Liouville's Journal 1867.
[3] L. Boltzmann, Sitzb. d. W. A. d. W. Bd. LXXXIV. Dec. 1881.
[4] W. Voigt, Berl. Sitzb. Juni 1882.
[5] V. Hausmaninger, Wiener Sitzb. Bd. LXXXVIII. Juli 1883.

Digitized by Google

gleicher Beschaffenheit der Stäbe — eine Trennung des ganzen Systems nicht gerade an der Berührungsstelle, sondern dort erfolgen, wo die Dilatation zuerst auftritt. Da nun bei dem Phänomen, das man gemeiniglich als »Stoss« bezeichnet, die Trennung immer an der Berührungsstelle erfolgt, so schliesst Hr. Voigt, dass die beiden Stäbe während ihrer Berührung nicht als Ganzes anzusehen sind, sondern dass vielmehr in Folge verschiedener Ursachen (Krümmung, Unebenheiten und namentlich condensirte Gasschichten an den stossenden Endflächen) ein von zwei der Berührungsstelle unendlich nahen Querschnitten begrenztes Element, die sogenannte »Zwischenschicht«, ganz andere Eigenschaften besitzt, als ein Element im Innern der Stäbe. Den Einfluss dieser Zwischenschicht zieht nun Hr. Voigt durch Einführung einer gewissen Constanten c in Rechnung, deren Abhängigkeit von der Natur der Zwischenschicht durch die Beziehung

$$c = \frac{e \cdot q}{\delta}$$

bestimmt ist. Darin ist q der Querschnitt, δ die Dicke und e der während des Stosses als constant vorausgesetzte und darum als der »mittlere« bezeichnete Elasticitätscoefficient der Zwischenschicht. Für $c = \infty$ geht die Voigt'sche Theorie in die St. Venant'sche, für $c = 0$ in die alte Stosstheorie über. Eine Wechselwirkung zwischen beiden Stäben findet so lange statt, als an ihrer Berührungsstelle eine Compression vorhanden; den Moment, wo eine Dilatation sich zu bilden beginnt, bezeichnet Hr. Voigt als das Ende des Stosses.

Nach Hrn. Hertz[1] findet in Folge der Krümmung der Endflächen die Berührung im ersten Momente nur in einem Punkte und im Verlaufe des ganzen Stosses immer nur in einem Kreise statt, dessen Flächeninhalt kleiner als jede der Endflächen ist.

Die beiden genannten Herren haben jedoch ihre Theorien nur so weit entwickelt, dass sie zeigten, dass dieselben mit der alten Newton'schen Theorie übereinstimmen, wenn die erzeugte Longitudinalwelle die beiden Stäbe während der Dauer ihrer Weehselwirkung sehr oft durchläuft. Dagegen haben sie gar keine Rechnungen zur Bestimmung der Abweichungen ihrer Theorien von der alten Newton'schen versucht. Eine Annäherungsformel für diese Abweichungen wurde von Hrn. Prof. Boltzmann aus der Voigt'schen Theorie entwickelt und von mir in meiner citirten Abhandlung mitgetheilt. Doch auch diese bezieht sich nur auf den Fall, dass der von der Welle während der Stossdauer zurückgelegte Weg λ gross ist gegenüber der Länge der Stäbe. Da nun sowohl meine Messungen

[1] H. Hertz, Borchardt's Journal Bd. 92 S. 156.

Digitized by Google

der Stossdauer als auch die Grösse der experimentell gefundenen Abweichungen von den alten Stossformeln es mir wahrscheinlich machten, dass obige Bedingung nur in geringem Grade erfüllt ist, so hielt ich es nicht für überflüssig, zunächst die VOIGT'sche Theorie gerade im entgegengesetzten Falle, wo λ nicht viel grösser ist als die doppelte Länge des längeren Stabes, für ein Paar Specialfälle zu entwickeln. Denn eine Vergleichung mit der Erfahrung ist nur durch eine quantitative Berechnung der Abweichungen zwischen der alten und den neuen Theorien möglich. Eine analoge Behandlung der HERTZ'schen Hypothese behalte ich mir für später vor. (Ein vorläufiger Vergleich der von mir beobachteten mit der nach den HERTZ'schen Formeln berechneten Stossdauer zeigte eine ganz gute Übereinstimmung.)

Ich lege mit Hrn. VOIGT die Z-Axe in die Mittellinie der beiden Stäbe von ihrer Berührungsstelle aus, bezeichne mit w_1, E_1, d_1, m_1, q_1, l_1 Verschiebung, Elasticitätscoefficient, Dichte, Masse, Querschnitt und Länge des ersten, mit w_2, E_2, d_2, m_2, q_2 und l_2 die analogen Grössen des zweiten Stabes und setze zur Abkürzung

$$\frac{E_1}{d_1} = a_1^2 ; \; E_1 q_1 = b_1$$
$$\frac{E_2}{d_2} = a_2^2 ; \; E_2 q_2 = b_2 ,$$

dann ist die Hypothese des Hrn. VOIGT in folgenden Gleichungen ausgesprochen:

1.
$$\frac{d^2 w_1}{dt^2} = a_1^2 \frac{d^2 w_1}{dz^2}$$
$$\frac{d^2 w_2}{dt^2} = a_2^2 \frac{d^2 w_2}{dz^2} .$$

2.
$$\left.\begin{aligned} \frac{dw_1}{dz} &= 0 \\ \frac{dw_2}{dz} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } z = -l_1$$
$$\left.\begin{aligned} \frac{dw_1}{dz} &= 0 \\ \frac{dw_2}{dz} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ » } z = l_2 .$$

3. $$b_1 \frac{dw_1}{dz} = b_2 \frac{dw_2}{dz} = c\,(w_2 - w_1) \text{ für } z = 0 .$$

4.
$$\left.\begin{aligned} w_1 &= 0 \\ w_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } t = 0 \quad \begin{aligned} -l_1 < z < 0 \\ 0 < z < l_2 . \end{aligned}$$

5.
$$\left.\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= V_1^0 \\ \frac{dw_2}{dt} &= V_2^0 \end{aligned}\right\} t = 0 \quad \begin{aligned} -l_1 < z < 0 \\ 0 < z < l_2 . \end{aligned}$$

Digitized by Google

Für meine Zwecke scheint mir die Integration obiger Gleichungen durch willkürliche Functionen auf übersichtlicherem Wege zum Ziele zu führen, als dies mit Hülfe periodischer Reihen möglich ist. Ich setze deshalb:

$$w_1 = f(z + a_1 t) + g(z - a_1 t)$$
$$w_2 = \phi(z + a_2 t) + \gamma(z - a_2 t).$$

Gemäss der Bedingung 2. muss für die freien Stabenden

$$f'(-l_1 + a_1 t) + g'(-l_1 - a_1 t) = 0$$
$$\phi'(l_2 + a_2 t) + \gamma'(l_2 - a_2 t) = 0$$

und zwar zu allen Zeiten sein; ich führe daher statt $a_1 t$ und $a_2 t$ die willkürliche Variable u ein, so dass

$$f'(-l_1 + u) + g'(-l_1 - u) = 0$$
$$\phi'(l_2 + u) + \gamma(l_2 - u) = 0$$

wird. Daraus folgt:

6.
$$g'(-u) = -f'(u - 2l_1)$$
$$\phi'(u) = -\gamma'(-u + 2l_2).$$

Ich beschränkte meine Rechnungen auf den wichtigsten Fall, dass das Material beider Stäbe dasselbe ist. Dann ist $a_1 = a_2$ und aus Gleichung 3. folgt:

$$b_1 f'(u) + b_1 g'(-u) = b_2 \phi'(u) + b_2 \gamma'(-u)$$
$$b_1 f'(u) + b_1 g'(-u) = c\phi(u) + c\gamma(-u) - cf(u) - cg(-u),$$

woraus man findet:

7.
$$\gamma'(-u) = \frac{b_1}{b_2} f'(u) + \frac{b_1}{b_2} g'(-u) - \phi'(u)$$

und

8.
$$f''(u) + \frac{c(b_1 + b_2)}{b_1 b_2} f'(u) = \frac{c(b_2 - b_1)}{b_1 b_2} g'(-u) + \frac{2c}{b_1} \phi'(u) + g''(-u).$$

Die Gleichungen 6., 7. und 8. gelten für alle u. Gemäss der Bedingung 4. ist, wenn ich für z gleichfalls u schreibe,

9.
$$f(u) + g(u) = 0 \quad \text{für} \quad -l_1 < u < 0$$
$$\phi(u) + \gamma(u) = 0 \quad \text{»} \quad 0 < u < l_2$$

und nach 5., wenn ich zur Abkürzung

10.
$$\frac{V_1^0}{2a_1} = s$$
$$\frac{V_2^0}{2a_1} = \sigma$$

Digitized by Google

setze:

$$11. \qquad \begin{aligned} f'(u) - g'(u) &= 2s \quad \text{für } -l_1 < u < 0 \\ \phi'(u) - \gamma'(u) &= 2\sigma \quad \text{» } 0 < u < l_2. \end{aligned}$$

Durch Ableitungen der Gleichungen 9. folgt in Verbindung mit 11.

$$12. \qquad \left.\begin{aligned} f'(u) &= s \\ g'(u) &= -s \end{aligned}\right\} \text{für } u = -l_1 \text{ bis } u = 0$$

$$13. \qquad \left.\begin{aligned} \phi'(u) &= \sigma \\ \gamma'(u) &= -\sigma \end{aligned}\right\} \text{von } u = 0 \text{ bis } u = l_2.$$

Das Problem liesse sich allerdings noch weiter in voller Allgemeinheit behandeln, die Rechnung wird jedoch bald so complicirt, dass sich schon jetzt eine Specialisirung empfiehlt, umsomehr als man es in der Praxis ja doch nur mit gewissen Specialfällen zu thun hat, in denen die Längen- und Querschnitte der Stäbe in einem bestimmten, einfachen, rationalen Verhältnisse stehen. Ich werde 1. Stäbe von gleicher Länge und gleichem Querschnitt, 2. Stäbe von gleichem Querschnitt, von denen der eine Stab doppelt so lang als der andere, 3. Stäbe, von denen der eine die doppelte Länge aber den halben Querschnitt des andern besitzt, betrachten.

I. Fall.

$$l_1 = l_2 = l\,;\; b_1 = b_2 = b.$$

Die Gleichungen 6. 7. und 8. gehen für diesen Fall über in

$$14. \qquad g'(-u) = -f'(u - 2l)$$

$$15. \qquad \phi'(u) = -\gamma'(-u + 2l)$$

$$16. \qquad \gamma'(-u) = f'(u) + g'(-u) - \phi'(u)$$

$$17. \qquad f''(u) + \frac{2c}{b} f'(u) = \frac{2c}{b}\phi'(u) + g'(-u)$$

Nun folgt aus 12. und 14.

$$g'(-u) = -s \text{ von } 0 \text{ bis } 2l$$

ebenso aus 13. und 15.

$$\phi'(u) = \sigma \qquad \text{von } 0 \text{ bis } 2l.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen 16. und 17., so erhält man

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \gamma'(-u) &= f'(u) - s - \sigma \\ f''(u) + \frac{2c}{b} f'(u) &= \frac{2c\sigma}{b} \end{aligned}\right\} \text{o bis } 2l.$$

Die Integration der letzten Gleichung liefert, wenn ich zur Abkürzung

$$\frac{2c}{b} = \alpha$$

setze

$$f'(u) = (s-\sigma)e^{-\alpha u} + \sigma = f_1'(u)$$

so dass:

$$\gamma'(-u) = f_1'(u) - (s+\sigma$$

} o bis $2l$

Weiter folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen 14. und 15.

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -(s-\sigma)e^{-\alpha(u-2l)} - \sigma \\ \phi'(u) &= -(s-\sigma)e^{-\alpha(u-2l)} + s \end{aligned}\right\} 2l \text{ bis } 4l.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in 17. erhält man

$$f'(u) = (s-\sigma)e^{-\alpha u}\{e^{2\alpha l}[-2\alpha u + 4\alpha l - 1] + 1\} + s = f_2'(u)$$

und

$$\gamma'(-u) = f_2'(u) - (s+\sigma)$$

} von $2l$ bis $4l$.

Analog findet man:

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -f_2'(u-2l) \\ \phi'(u) &= -f_2'(u-2l) + (s+\sigma) \\ f'(u) &= (s-\sigma)e^{-\alpha u}\{e^{4\alpha l}[2\alpha^2u^2 - 16\alpha^2 lu + 32\alpha^2 l^2 + 1] + \\ &\quad + e^{2\alpha l}[-2\alpha u + 4\alpha l - 1] + 1\} + \sigma = f_3'(u) \end{aligned}\right\} \text{von } 4l \text{ bis } 6l.$$

$$\gamma'(-u) = f_3'(u) - (s+\sigma)$$

und

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -f_3'(u-2l) \\ \phi'(u) &= -f_3'(u-2l) + (s+\sigma) \\ f'(u) &= (s-\sigma)e^{-\alpha u}\{e^{6\alpha l}[-\tfrac{4}{3}\alpha^3u^3 + (24\alpha^3 l + 2\alpha^2)u^2 \\ &\quad - (144\alpha^3 l^2 + 24\alpha^2 l + 2\alpha)u + 288\alpha^3 l^3 + 72\alpha^2 l^2 + 12\alpha l - 1] \\ &\quad + e^{4\alpha l}[2\alpha^2u^2 - 16\alpha^2 lu + 32\alpha^2 l^2 + 1] + e^{2\alpha l}[-2\alpha u + 4\alpha l - 1] + 1\} \\ &\quad + s = f_4'(u) \end{aligned}\right\} \text{von } 6l \text{ bis } 8l$$

$$\gamma'(-u) = f_4'(u) - (s+\sigma)$$

Ich sah von einer Ableitung des allgemeinen Bildungsgesetzes der Functionen f', g', ϕ und γ' vorläufig ab und schlug folgenden, für meine Zwecke auch vollkommen genügenden Weg ein. Ich fragte mich, wie gross c respective α gewählt werden muss, damit der Stoss zu Ende ist, wenn die Welle ein bestimmtes, willkürlich angenommenes Wegstück λ durchlaufen hat, und

Digitized by Google

berechnete hernach die dazu gehörigen Schwerpunktsgeschwindigkeiten. Der ST. VENANT'schen Theorie zufolge kann der Stoss erst für $\lambda = 2l$ zu Ende sein. Für diesen Fall wird nach der Hypothese des Hrn. VOIGT c und somit auch die von mir mit α bezeichnete Grösse unendlich. Da nun derselben Theorie gemäss das α einen endlichen Werth besitzen soll, so muss $\lambda > 2l$ sein. Ich setze zunächst

$$u = \lambda = 2l + \varepsilon l,$$

worin

$$0 < \varepsilon \leq 2.$$

Als Bedingung für das Ende des Stosses bilde ich

$$\left(\frac{dw_1}{dz}\right)_{\substack{z=0 \\ u=2l+\varepsilon l}} = (s-\sigma)\, e^{-\alpha(2l+\varepsilon l)} \{e^{2\alpha l}[-2\alpha(2l+\varepsilon l) + 4\alpha l - 2] + 1\} + s - \sigma = 0$$

oder

$$18. \qquad e^{-2\alpha l} - 2\alpha\varepsilon l + e^{\alpha\varepsilon l} - 2 = 0.$$

Behufs bequemerer Rechnung bezeichne ich die reelle, positive Wurzel der transcendenten Gleichung

$$e^x = 2x + 2$$

mit ξ, so dass $\xi = 1.67835$ ist, und setze $\alpha\varepsilon l = \xi - \eta$. Dann geht Gleichung 18. über in

$$19. \qquad e^{-2\alpha l} = 2(\xi + 1)(1 - e^{-\eta}) - 2\eta.$$

Für Berechnung einer Tabelle ist es am bequemsten, dem η willkürlich gewählte Werthe zu ertheilen und die zugehörigen Werthe von αl aus Gleichung 19. zu bestimmen, wobei es von Vortheil ist, die Exponentielle durch ihre Reihe zu ersetzen. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist

$$v_1 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0}\left(\frac{dw_1}{dt}\right)dz, \text{ d. i.}$$

$$20. \qquad v_1 = \frac{a}{l}\int_{-l}^{0} f'(z+\lambda)\,dz - \frac{a}{l}\int_{-l}^{0} g'(z-\lambda)\,dz$$

Die Substitution der entsprechenden Functionswerthe liefert mit Berücksichtigung der Gleichung 18. für

$$0 < \varepsilon \leq 2$$

$$21. \qquad \beta = \frac{1}{2\alpha l}\{2e^{-\alpha l} + \alpha\varepsilon l - 2\},$$

wenn $v_1 = \beta V_1^0 + (1-\beta) V_2^0$ gesetzt wird, und nach Einführung von η folgende Reihenentwickelung:

Digitized by Google

22. $$\beta = \frac{1}{2\alpha l}[0.051714198 - \eta + 0.373364198]\left(\eta + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^3}{2!} + \ldots\right),$$

welche, da selbst für grosse ε der Werth des η klein ist, auch noch bis $\varepsilon = 2$ ausserordentlich bequem ist.

Mit Hülfe der Formeln 19. und 22. habe ich nun unter Annahme verschiedener η die in der folgenden Tabelle I zusammengestellten Werthe berechnet. Es zeigte sich dabei, dass der Verlust an lebendiger Kraft ein Maximum erreicht, wenn λ zwischen $3l$ und $4l$ liegt. Zur genaueren Bestimmung desselben ist nach 21. die Function

$$\frac{\alpha\varepsilon l + 2e^{-\alpha l} - 2}{2\alpha l}$$

unter der Bedingung

$$e^{-2\alpha l} + e^{\alpha l} - 2\alpha\varepsilon l - 2 = 0$$

zu einem Maximum zu machen. Nach bekannten Regeln findet sich für das Maximum:

$$\begin{aligned} \alpha\varepsilon l &= 1.6553209 \\ \eta &= 0.0230291 \\ 2\alpha l &= 2.57844824 \\ \beta &= 0.0144983183. \end{aligned}$$

Schliesslich berechnete ich die Schwerpunktgeschwindigkeit noch für die Fälle, dass der Stoss zu Ende ist, wenn die Welle einen Stab 1. sechsmal, 2. achtmal durchlaufen hat. Im ersteren Falle hat man:

23. $$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{\substack{z=0 \\ u=6l}} = (s-\sigma)\{e^{-6\alpha l}[e^{4\alpha l}(8\alpha^2 l^2 + 4\alpha l + 2) - e^{2\alpha l}(8\alpha l + 2)] + 1\} - (s-\sigma) = 0$$

oder, $e^{2\alpha l} = x$ gesetzt,

$$-x^3 + 2x^2[(\lg x)^2 + \lg x + 1] - 2x[2\lg x + 1] + 1 = 0.$$

Diese Gleichung besitzt die reellen, positiven Wurzeln 1 und 1.83508, von denen die erstere unbrauchbar ist. Für die Schwerpunktsgeschwindigkeit liefert die Formel 20. nach Substitution der betreffenden Functionswerthe

$$v_1 = \frac{a}{l}\int_{-2l}^{0} f_3'(z + 6l)\, dz,$$

d. i. mit Zuziehung der Gleichung 23.

$$\beta = \frac{1}{2\alpha l}\{2e^{-2\alpha l}[e^{-2\alpha l} - 4\alpha l - 3] + 4\}.$$

Die numerische Auswerthung ergiebt

$$\beta = 0.00165373.$$

Digitized by Google

Soll die Welle den Stab achtmal durchlaufen, so erhält man die Gleichung:

$$\left(\frac{dv_1}{dz}\right)_{\substack{z=0\\ t=8l}} = (s-\sigma)\{e^{-8\alpha l}[1 - 2e^{6\alpha l}(\tfrac{16}{3}\alpha^3 l^3 + 2\alpha l + 1) + 2e^{4\alpha l}(16\alpha^2 l^2 + 4\alpha l + 1) - 2e^{2\alpha l}(6\alpha l + 1] + 1\} = 0,$$

welche für αl den Werth 0.16285347 liefert; ferner wird

$$v_1 = \frac{a}{l}\int_{-2l}^{0} f_4'(z + 8l)\,dz, \text{ d. i.}$$

$$\beta = \frac{1}{2\alpha l}\{2e^{-2\alpha l}[e^{-4\alpha l} - 3e^{-2\alpha l} + 5 + 8\alpha^2 l^2 + 8\alpha l - 8\alpha l e^{-2\alpha l}] - 6\},$$

und die numerische Berechnung dieses Ausdrucks ergiebt

$$\beta = 0.000517889.$$

Tabelle I.

η	αl	$\lambda : l$	β
—	0.162853	8	0.0005179
—	0.303544	6	0.0016537
0.062216	0.808067	4	0.0083305
0.06	0.826268	3.958626	0.0089576
0.05	0.911239	3.786962	0.0114443
0.04	1.019967	3.606287	0.0132120
0.03	1.159794	3.421244	0.0142632
0.025	1.248952	3.323789	0.0144785
0.0232	1.285594	3.287460	0.0144982
0.023029	1.289224	3.283967	0.0144983
0.0227	1.296287	3.277224	0.0144977
0.02	1.358523	3.220701	0.0144483
0.010697	1.667652	3	0.0135016
0.008	1.811873	2.921891	0.0128908
0.004	2.156850	2.776294	0.0114080
0.001	2.848800	2.588792	0.0089665
0.0001	3.999804	2.419583	0.0064567
0.00001	5.150989	2.325829	0.0050192
10^{-10}	10.9074	2.153872	0.0023706
10^{-100}	114.524	2.014655	0.0002258
10^{-1000}	1150.69	2.001459	0.0000225
$10^{-100000}$	1151288	2.000001	0.00000002

v_1 ist immer gleich $\beta V_1^0 + (1-\beta)V_2^0$.

Es erscheint mir nicht überflüssig, die Annäherungsformel des Hrn. Prof. BOLTZMANN mit meinen Resultaten numerisch zu vergleichen. Dieselbe geht für den hier vorausgesetzten Fall über in

$$\beta = \frac{4}{45}\frac{c^2 l^2}{b^2}.$$

Digitized by Google

Dabei ist die Stossdauer $= \pi\sqrt{\frac{m}{2c}}$. Daher ist

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{a\pi}{l}\sqrt{\frac{m}{2c}} = \pi\sqrt{\frac{b}{2cl}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha l}}$$

und obige Formel lässt sich schreiben:

$$\beta = \frac{1}{45}\frac{\pi^4 l^4}{\lambda^4}.$$

Für $\lambda = 6l$ wird

$$\beta = 0.001670242\,,\quad \alpha l = 0.274;$$

für $\lambda = 8l$

$$\beta = 0.000528476\,,\quad \alpha l = 0.154.$$

Vergleicht man diese Werthe mit den entsprechenden der Tabelle I, so zeigt sich bereits eine Übereinstimmung, wie man bei den der Annäherungsformel zu Grunde liegenden Voraussetzungen nur immer erwarten kann.

II. Fall.

$$l_1 = 2l_2 = l\,;\ b_1 = b_2 = b.$$

Hier lauten die Gleichungen 6., 7. und 8.:

$$\begin{aligned} g'(-u) &= -f'(u-2l) \\ \phi'(u) &= -\gamma'(-u+l) \\ \gamma'(-u) &= f'(u) + g'(-u) - \phi'(u) \end{aligned}$$

$$f''(u) + \frac{2c}{b}f'(u) = \frac{2c}{b}\phi'(u) + g''(-u).$$

Ferner ist wieder: $\frac{2c}{b} = \alpha$

$$\begin{aligned} \phi'(u) &= \sigma \qquad \text{von o bis } l \\ g'(-u) &= -s \qquad \text{» o » } 2l. \end{aligned}$$

Man erhält durch eine analoge Behandlung dieser Gleichungen wie im I. Falle folgende Functionswerthe:

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -s \\ \phi'(u) &= \sigma \\ f'(u) &= (s-\sigma)e^{-\alpha u} + \sigma = f_1'(u) \\ \gamma'(-u) &= f_1'(u) - s - \sigma \end{aligned}\right\} \text{von o bis } l$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -s \\ \phi'(u) &= -f_1'(u-l)+s+\sigma \\ f'(u) &= (s-\sigma)\,e^{-\alpha u}\{e^{\alpha l}[-\alpha u+\alpha l-1]+1\}+s=f_2'(u) \\ \gamma'(-u) &= f_2'(u)+f_1'(u-l)-2s-\sigma \end{aligned}\right\} \text{von } l \text{ bis } 2l$$

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -f_1'(u-2l) \\ \phi'(u) &= -f_2'(u-l)-f_1'(u-2l)+2s+\sigma \\ f'(u) &= (s-\sigma)\,e^{-\alpha u}\Big\{e^{2\alpha l}\Big[\frac{\alpha^2u^2}{2}-u(2\alpha^2l+\alpha)+2\alpha^2l^2+2\alpha l\Big] \\ &\qquad +e^{\alpha l}[-\alpha u+\alpha l-1]+1\Big\}+s=f_3'(u) \\ \gamma'(-u) &= f_3'(u)+f_2'(u-l)-(2s+\sigma) \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{von } 2l \\ \text{bis } 3l\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -f_2'(u-2l) \\ \phi'(u) &= -f_3'(u-l)-f_2'(u-2l)+2s+\sigma \\ f'(u) &= (s-\sigma)e^{-\alpha u}\Big\{e^{3\alpha l}\Big[-\frac{\alpha^3u^3}{6}+u^2(\tfrac{3}{2}\alpha^3l+\tfrac{3}{2}\alpha^2)-u(\tfrac{9}{2}\alpha^3l^2+9\alpha^2l-\alpha) \\ &\quad +\tfrac{9}{2}\alpha^3l^3+\tfrac{27}{2}\alpha^2l^2-3\alpha l+1\Big]+e^{2\alpha l}\Big[\frac{\alpha^2u^2}{2}-u(2\alpha^2l+\alpha)+2\alpha^2l^2+2\alpha l\Big] \\ &\qquad +e^{\alpha l}[-\alpha u+\alpha l-1]+1\Big\}+\sigma=f_4'(u) \\ \gamma'(-u) &= f_4'(u)+f_3'(u-l)-(2s+\sigma) \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{von} \\ 3l \\ \text{bis} \\ 4l\end{matrix}$$

Ich setze für den Moment des Endes des Stosses $\lambda = 2l+\varepsilon l$ und betrachte den Fall, dass $0 < \varepsilon \leqq 1$.

Dann ist

$$24. \qquad e^{2\alpha l}\left[e^{\alpha\varepsilon l}+\frac{\alpha^2\varepsilon^2l^2}{2}-\alpha\varepsilon l-1\right]-e^{\alpha l}[\alpha\varepsilon l+\alpha l+1]+1=0.$$

Für die Schwerpunktsgeschwindigkeit ergiebt sich mit Rücksicht auf 24.

$$25. \qquad v_1=\frac{V_1^0-V_2^0}{2\alpha l}\{e^{-\alpha l}[e^{-\alpha l}-\alpha\varepsilon l]+\alpha\varepsilon l-1\}+\frac{V_1^0+V_2^0}{2}.$$

Ich bestimmte unter Annahme verschiedener αl das zugehörige ε aus Gleichung 24. und mit diesen Werthen das v_1 aus Gleichung 25. Die erhaltenen Resultate sind aus Tabelle II zu entnehmen.

Digitized by Google

Tabelle II.

al	$\lambda : l$	v_1
0.9036	3.000000	$0.33491\, V_1^0 + 0.66509\, V_2^0$
2.3026	2.253266	$0.35093\, V_1^0 + 0.64907\, V_2^0$
4.6052	2.051418	$0.39770\, V_1^0 + 0.60230\, V_2^0$
6.9078	2.012853	$0.42824\, V_1^0 + 0.57176\, V_2^0$
9.2103	2.004657	$0.46493\, V_1^0 + 0.53507\, V_2^0$
2302.6	2.000002	$0.49978\, V_1^0 + 0.50022\, V_2^0$

III. Fall.

$$l_1 = 2l_2 = l\,;\quad b_2 = 2b_1.$$

Für diesen Fall ist

$$\gamma'(-u) = \tfrac{1}{2}f'(u) + \tfrac{1}{2}g'(-u) - \phi'(u)$$

$$f''(u) + \frac{3c}{2b_1}f'(u) = \frac{2c}{b_1}\phi'(u) + \frac{c}{2b_1}g'(-u) + g''(-u),$$

alles Übrige wie im II. Falle.

Setze ich $\frac{3c}{2b_1} = \alpha$, so ergeben sich folgende Functionswerthe:

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -s \\ \phi'(u) &= \sigma \\ f'(u) &= \tfrac{4}{3}(s-\sigma)\,e^{-\alpha u} - \tfrac{1}{3}(s-4\sigma) = f_1'(u) \\ \gamma'(-u) &= \tfrac{1}{2}f_1'(u) - \frac{s}{2} - \sigma \end{aligned}\right\} \text{von o bis } l$$

$$g(-u) = -s$$

$$\left.\begin{aligned} \phi'(u) &= -\tfrac{1}{2}f_1'(u-l) + \frac{s}{2} + \sigma \\ f'(u) &= \tfrac{4}{9}(s-\sigma)e^{-\alpha u}\{2e^{\alpha l}[-\alpha u + \alpha l - 1] + 3\} + \tfrac{1}{9}(5s+4\sigma) = f_2'(u) \\ \gamma'(-u) &= \tfrac{1}{2}f_2'(u) + \tfrac{1}{2}f_1'(u-l) - s - \sigma \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{von} \\ l \text{ bis} \\ 2l\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -f_1'(u-2l) \\ \phi'(u) &= -\tfrac{1}{2}f_2'(u-l) - \tfrac{1}{2}f_1'(u-2l) + s + \sigma \\ f'(u) &= \tfrac{4}{9}(s-\sigma)e^{-\alpha u}\{\tfrac{1}{3}e^{2\alpha l}[2\alpha^2u^2 - u(8\alpha^2 l + 14\alpha) + 8\alpha^2 l^2 + 28\alpha l - 5] \\ &\quad + 2e^{\alpha l}[-\alpha u + \alpha l - 1] + 3\} + \tfrac{1}{27}(35s - 8\sigma) = f_3'(u) \\ \gamma'(-u) &= \tfrac{1}{2}f_3'(u) + \tfrac{1}{2}f_2'(u-l) - s - \sigma \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{von} \\ 2l \text{ bis} \\ 3l.\end{matrix}$$

Digitized by Google

Ich setze wieder $u = \lambda = 2l + \varepsilon l$ wo $0 < \varepsilon \leqq 1$ und bilde

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{\substack{z=0 \\ u=2l+\varepsilon l}} = f'(\lambda) + g'(-\lambda) = 0.$$

Die sich hieraus ergebende Gleichung

$$26. \quad 3e^{-2\alpha l} - e^{-\alpha l}(2\alpha l + 2\alpha\varepsilon l + 2) + \tfrac{2}{3}\alpha^2 l^2 \varepsilon^2 - \tfrac{14}{3}\alpha\varepsilon l - \tfrac{14}{3} + \tfrac{11}{3}e^{\alpha l} = 0$$

bildet die Bedingung für das Ende des Stosses. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist mit Zuziehung obiger Gleichung

$$27. \quad v_1 = \frac{2(V_1^0 - V_2^0)}{27\alpha l}\{2e^{-\alpha l}[3e^{-\alpha l} - 2\alpha\varepsilon l + 5] + 11\alpha\varepsilon l - 16\} + \tfrac{1}{9}V_1^0 + \tfrac{8}{9}V_2^0.$$

Ich berechnete wieder unter speciellen Annahmen von αl das entsprechende ε aus Gleichung 26. und mit diesen Werthen das v_1 aus 27. und fand folgende Resultate:

Tabelle III.

αl	$\lambda : l$	v_1
1.07108	3.00000	$0.00355\,V_1^0 + 0.99645\,V_2^0$
2.3026	2.40029	$0.01107\,V_1^0 + 0.98893\,V_2^0$
3.91203	2.20675	$0.03468\,V_1^0 + 0.96532\,V_2^0$
6.9078	2.11020	$0.06420\,V_1^0 + 0.93580\,V_2^0$
23025	2.00002	$0.11109\,V_1^0 + 0.88891\,V_2^0$

Fasse ich die Ergebnisse meiner Berechnungen zusammen, so komme ich zu folgendem Schlusse:

Die Abweichungen, welche Hr. VOIGT für gleichlange Stäbe zwischen den nach der alten Theorie berechneten und seinen (allerdings nach Anbringung gewisser Correctionen) beobachteten Resultaten findet, sind kleiner als die grössten Abweichungen, welche in meiner Tab. I vorkommen, woraus aber noch kein Schluss gezogen werden darf, ob λ gross oder klein gegenüber $2l$ ist. Meine in der citirten Abhandlung angegebenen Beobachtungen über die Stossdauer von gleichlangen Glasstäben ergeben, wenn man für Glas $\alpha = 5000^m$ setzt, $\lambda = 4l$, $8l$ und $12l$ entsprechend den Anfangsamplituden von 100, 50 und 30^{mm} (Fadenlänge: 2.5^m). Darnach müssten also die Abweichungen von der alten Stosstheorie, welche übrigens kaum die Grenzen der Beobachtungsfehler überschreiten dürften, mit wachsender Stossgeschwindigkeit zunehmen.

Was den zweiten der hier betrachteten Fälle betrifft, so dürften schon für $\lambda = 3l$ die kaum zu vermeidenden Beobachtungsfehler grösser sein als die Abweichungen des Werthes der Tab. II von $\frac{V_1^0}{3} + \frac{2V_2^0}{3}$,

Digitized by Google

welches der Grenzwerth für abnehmende α ist. In allen Fällen, wo Hr. VOIGT eine die Grenze der Beobachtungsfehler entschieden übersteigende Abweichung vom alten Stossgesetze findet, dürfte daher λ noch beträchtlich kleiner als $3l$ sein, ein Umstand, der die Anwendbarkeit von Annäherungsformeln, welche $\frac{\lambda}{l}$ gross gegen die Einheit voraussetzen, als sehr zweifelhaft erscheinen lässt.

Auch im dritten Falle bestätigt es sich, dass nach der VOIGT'schen Hypothese der den gewöhnlichen Stossformeln entsprechende Grenzwerth sehr rasch erreicht wird, so zwar, dass schon für $\lambda = 3l$ die Beobachtung kaum mehr eine Abweichung von denselben ergeben könnte.

Obwohl die hier mit Hrn. VOIGT gemachte Annahme, dass c eine Constante sei, durch Beobachtungen VOIGT's durchaus nicht bestätigt wird, so ist dieselbe doch schon insofern von theoretischem Interesse, als sich mit ihrer Hülfe bei weitem am leichtesten eine continuirliche Brücke zwischen der alten und der ST. VENANT'schen Theorie herstellen lässt. Und das war der Zweck der obigen Entwickelungen.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, Hrn. Prof. BOLTZMANN, der die Anregung zu dieser Arbeit gab, für die mir hiebei vielfach gewährte Anleitung und Unterstützung meinen wärmsten Dank auszusprechen

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

INHALTSVERZEICHNISS.

		Seite
1.	Fuchs: Über den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabeln	1
2.	Wilsing: Über die Anwendung des Pendels zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde	9
3.	Virchow: Die Verbreitung des blonden und des brünetten Typus in Mitteleuropa	13
4.	Hausmaninger: Zur Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Körper	23

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE
aus den Jahren 1882, 1883 und 1884.

(In Commission in Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.)

Schrader:	Gedächtnissrede auf Justus Olshausen	M. 1.00
Virchow:	Alttrojanische Gräber und Schädel	" 12.20
Braun:	Fragmente einer Monographie der Characeen. Nach den hinterlassenen Manuscripten herausgegeben von Dr. Otto Nordstedt	" 11.50
Diels:	Zur Textgeschichte der Aristotelischen Physik	" 2.00
Schweninger:	Die Schutzscheiden und ihre Verstärkungen	" 6.00
Zeller:	Über Begriff und Begründung der sittlichen Gesetze	" 1.50
Bernays:	Über die unter Philon's Werken stehende Schrift über die Unzerstörbarkeit des Weltalls	" 4.00
Bernays:	Über die Unzerstörbarkeit des Weltalls. II.	" 4.00
Hagen:	Geschwindigkeit des strömenden Wassers in verschiedenen Tiefen, untersucht nach den von Bazenos ausgeführten Messungen	" 4.00
Tobler:	Die altvenezianische Übersetzung der Sprüche des Dionysius Cato	" 3.50
Eichler:	Beiträge zur Morphologie der Marantaceen	" 6.30
Kronecker:	Über bilineare Formen von vier Variabeln	" 2.50
Schrader:	Zur Frage nach dem Ursprunge der babylonischen Cultur	" 3.00
Tobler:	Über das Buch des Uguçon da Laodho	" 5.00
Dillmann:	Über die Regierung, insbesondere die Kirchenordnung des Königs Zar'a-Jacob	" 5.00
Imhoof-Blumer:	Die Münzen der Dynastie von Pergamon	" 5.00

Noether:	Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Curven	M. 6.00
Studer:	Übersicht über die Ophiuriden, welche während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874 — 1876 gesammelt wurden	" 3.50
Studer:	Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle an der Westküste von Africa, auf Ascension und am Cap der guten Hoffnung gesammelten Crustaceen	" 2.50
Studer:	Über die von S. M. S. Gazelle auf der Reise um die Erde 1874 — 1876 gesammelten Isopoden	" 2.50
Marshall:	Agilardiella radiata	" 1.50
Kraske:	Über das Wachsthum des Verdickungsringes und der jungen Holzzellen in seiner Abhängigkeit von Druckwirkungen	" 4.50

Register für die Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie zu Berlin vom Jahre 1874 bis 1881 M. 3.00

Digitized by Google

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im Auszuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden Theil des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus diesen Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der reinen Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschaften in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder ihr fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch demselben Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, Reden und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in Monatsheften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird in der Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften und Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen »Sitzungsberichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zuschicken zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu geben.

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämlich:

die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,
" " " Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,
" " " October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Fertigstellung des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1884 nicht zugekommen sein sollten, werden ersucht, hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamationen nur in Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1885 angebracht werden.

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchhändlerischen Bezuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann) in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN.

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungsberichte« oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften von Seiten der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in einzelnen Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten, zuzusenden. Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der genannten Buchhandlung in Verbindung setzen.

Digitized by Google

ATHEMATISCHE

UND

WISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

GSBERICHTEN DER KÖNIGLICH

EN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT II.

FEBRUAR 1885.

BERLIN 1885.

ÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

ION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN.

Digitized by Google

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Separatabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

Digitized by Google

5. Über die Vanadinsäure enthaltenden Bleierze aus der Provinz Cordoba in Argentina.

Von Mart. Websky.

(Vorgetragen am 5. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VI]; — ausgegeben am 12. Februar.)

Anschliessend an meine Mittheilung vom 19. Juni 1884 über das Auffinden eines neuen Elementes Idun, habe ich zur Zeit zu berichten, dass es mir noch nicht gelungen ist, vollgültige Beweise für die Selbstständigkeit und Beschaffenheit desselben beizubringen.

Was ich an eigenthümlichen Reactionen damals an dem von der Grube Aguadita, Provinz Cordoba in Argentina, und später an gewissen Proben der benachbarten Grube Venus wahrgenommen habe, lässt sich mit einigen Ausnahmen auf theils bekannte, theils noch nicht beschriebene Reactionen des Molybdäns und des Vanadins zurückführen.

Auch bezüglich der Proben von der Grube Venus handelt es sich nur um die derben, den Gangarten unmittelbar aufliegenden, gesäuerten Bleierze von trüber, blassgelber und leberbrauner Farbe, nicht um die deutlich krystallisirten und in ihrer Gestaltung als Vanadinit und Descloizit erkennbaren, aufliegenden Bildungen.

Schmilzt man eine Probe der gepulverten Erze mit Soda und Salpeter, so giebt der wässrige Auszug der Schmelze, mit Salpetersäure sauer gemacht, auf Zusatz von Quecksilberoxydul-Nitrat einen geringen Niederschlag von molybdänsaurem Quecksilberoxydul, auch direct aus der Lösung des Erzes in Salpetersäure zu erhalten.

Ein anderer Theil des wässrigen Auszuges, mit Essigsäure versetzt und durch Erwärmen neutral gemacht, zeigt auf Zusatz von Quecksilberoxydul-Nitrat die rothe Ausscheidung von vanadinsauren Quecksilberoxydul mit Spuren eines blauen Niederschlages.

Ein mit Natronbicarbonat versetzter Theil des Auszuges giebt auf Zusatz von wenig Quecksilberoxydul-Nitrat einen spontan blassgelben, dann braun und zuletzt dunkelblau werdenden Niederschlag; durch Wiederholung des Zusatzes in Pausen, kann man alle Metallsäuren in diesem dunkelblauen, in Wasser nicht löslichen Niederschlage ansammeln.

Trocknet man den Gesammtniederschlag auf dem Wasserbade, so bleibt er blau, in etwas höherer Temperatur wird er gelb oder bräunlich.

Verdünnte Salpetersäure löst sogleich einen Vanadinsäure haltenden Theil, den dunkelblauen Rückstand nur in Spuren; derselbe wird aber nach längerem Stehen schwärzlich braun.

Digitized by Google

Bringt man den getrockneten Niederschlag in ein zugeschmolzenes Rohr und erhitzt, so bildet sich unter Entwickelung von salpetriger Säure neben dem Quecksilber-Absatz ein orangefarbiges Sublimat, während der Rest schmilzt, wenn Vanadinsäure in ihm vorwaltet, oder sintert, wenn Molybdänsäure darin in grösserer Menge ist.

Die Menge des orangefarbigen Sublimates wechselt sehr mit dem Handstück und ist das einer Deutung entbehrende Präparat; die übrigen Erscheinungen sind Reactionen von Molybdän und Vanadin.

Löst man Molybdänsäure in überschüssiger Sodalauge und fügt wenig Quecksilberoxydul-Nitrat zu, so entsteht sogleich ein hellblauer, nachdunkelnder Niederschlag; die Anwesenheit anderer Säuren verhindert ihn nicht, sondern verzögert ihn nur, er erscheint hinterher, und zwar mit dunkler Farbe. Vanadinsäure präcipitirt sich anfangs hoch orangeroth, dunkelt langsamer nach.

Man kann annehmen, dass die Erscheinung auf einer Oxydation des Quecksilberoxyduls zu Quecksilberoxyd unter partieller Reduction der Molybdänsäure zu blauem Molybdänoxyd, beziehungsweise der Vanadinsäure zu Vanadinoxyd beruhe.

Bei der Durchmusterung des umfangreichen Materials von der Grube Venus, welches das mineralogische Museum dem Prof. Brackebusch in Cordoba verdankt, ergab sich, dass in den untersten derben Partien der sogenannten Vanadinerze immer Molybdänsäure neben Vanadinsäure vorhanden ist, oft vorwaltet. Ich habe zuletzt mit einem Material operirt, das sehr wenig Vanadinsäure enthält, und eigentlich als ein Zink-haltender Wulfenit bezeichnet werden muss, so ungewöhnlich auch die leberbraune Farbe für diese Mineralgattung ist. Die undeutlichen, in den Hohlräumen desselben auftretenden krystallförmigen Bildungen sind nicht als Pseudomorphosen eines Vanadinerzes nach Anglesit oder Phosgenit auszulegen, sondern echte Krystalle des quadratischen Systems in den beim Wulfenit nicht seltenen, auf ungleiche Ausbildung der hemiëdrischen Formen beruhenden Verzerrungen, nur mit einer dünnen Schicht von kleinen Descloizit-Krystallen bedeckt; freilich fehlt es nicht an Exemplaren, welche ähnliche Gebilde, durch und durch aus Aggregaten kleiner Krystalle von Vanadinit und Descloizit bestehend, zeigen.

Pseudomorphosen nach Wulfenit sind bisher noch nicht beobachtet. Wulfenit galt als eines der Endglieder in der Reihe der gesäuerten Bleierze; wahrscheinlich vermag eben nur die Vanadinsäure die Verdrängung der Molybdänsäure vom Blei zu bewirken.

Digitized by Google

6. Über die Oxyde des Mangans und Urans.

Von C. Rammelsberg.

(Vorgetragen am 5. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VI]; — ausgegeben am 12. Februar.)

Gewisse Metalle bilden bekanntlich Oxyde von der Form R^3O^4. Eisen, Mangan, Blei, Kobalt, vielleicht auch Chrom gehören hieher. Diese Oxyde werden als Verbindungen von Monoxyd und Sesquioxyd, $RO + R^2O^3$, betrachtet.

Für das Eisenoxydoxydul ist diese Annahme unzweifelhaft richtig, weil es durch eine zu seiner Lösung ungenügende Menge Chlorwasserstoffsäure in beide Oxyde zerlegt wird und Eisenoxyd hinterlässt, und weil letzteres durch kohlensaure Erden aus seiner Lösung gefällt wird. Ausserdem gehört es der Spinellgruppe an, in welcher FeO, MgO, ZnO, MnO und andererseits Fe^2O^3, Al^2O^3, Mn^2O^3 und Cr^2O^3 auftreten. Alle Glieder dieser Gruppe $RO + R^2O^3$ haben die Form des Magneteisens.

Das Manganoxydoxydul ist krystallisirt als Hausmannit bekannt, besitzt aber eine von der regulären des Magneteisens abweichende viergliedrige Form, welche man gewöhnlich auf Rechnung von Heteromorphie schreibt.

Berthier[1] fand, dass das künstliche Manganoxydoxydul bei Behandlung mit Salpetersäure in sich auflösendes Manganoxydul und zurückbleibendes Hydrat von Mangandioxyd MnO^2 zerfällt.

Forchhammer[2] bestätigt Berthier's Angaben. Von 100 Th. Mn^3O^4 erhielt er nach Behandlung mit verdünnter Salpetersäure einen Rückstand = 47.9 Procent. Wurde dieser Rückstand geglüht, so lieferte er eine Quantität Mn^3O^4, welche bei Berthier nahe 40 Procent, bei Forchhammer 38.8 Procent MnO^2 entspricht.

Da 100 Mn^3O^4 als $2MnO + MnO^2 = 3 8MnO^2$ sind, so fand die Zersetzung in diesem Sinne statt, d. h. $^2/_3$ des Mangans hatten sich aufgelöst, $^1/_3$ war zurückgeblieben.

Später hat Turner[3] gefunden, dass das (künstliche) Manganoxydoxydul durch Kochen mit überschüssiger verdünnter Schwefelsäure

[1] Ann. de Chim. et de Phys. 20, 187.
[2] Ann. of Phil. 18, 50.
[3] Pogg. Ann. 14, 211 (1828).

Digitized by Google

(1 Th. Säure gegen 10 Th. Wasser) in gleicher Art in Oxydul und Dioxyd zersetzt wird. 100 Th. hinterliessen 38 Th. MnO^2.

Mithin müssen 100 Th. Mn^3O^4 in 62 MnO und 38 MnO^2 zerfallen, während sie andererseits = 31 MnO und 69 Mn^2O^3 sein würden.

Bei einer Wiederholung dieser älteren Versuche habe ich auch den Hausmannit in Betracht gezogen und stets das in der Säure gelöste MnO durch Wägen des aus dem Nitrat durch Glühen erhaltenen Mn^3O^4 oder des entstandenen Sulfats bestimmt.

A. Mit concentrirter Salpetersäure und Kochen:

Künstliches Mn^3O^4 = 59.36 Procent MnO.

Hausmannit = 59.25 » »

B. Mit 1 Th. Schwefelsäure und 6 Th. Wasser:

Künstliches Mn^3O^4 = 58.12 Procent MnO.

Die Zusammensetzung des Ungelösten ergab sich, indem ein Theil durch Glühen in Mn^3O^4 verwandelt, in einem anderen der Sauerstoff durch die Jodprobe volumetrisch bestimmt wurde.

Es ist danach dieser unlösliche Theil $2MnO^2 + H^2O$.

Das Verhalten des Mn^3O^4 gegen Säuren widerlegt aber nicht nothwendig die Ansicht, es sei $MnO + Mn^2O^3$. Denn es könnte jenes die Folge davon sein, dass Mn^2O^3 sich in MnO und MnO^2 zersetzt, und diese Meinung hat Berzelius[1] schon gegen Berthier geltend gemacht.

Ich habe krystallisirten Manganit, $Mn^2O^3 + H^2O = H^2Mn^2O^4$, mit concentrirter Salpetersäure behandelt. Wenn er sich in MnO, MnO^2 und H^2O zersetzt, müssen sich 40.3 Procent MnO auflösen. Allein der Manganit wird von der Säure nicht zersetzt; nach längerem Sieden waren 2.08 Procent, höchstens 2.56 Procent MnO in Lösung gegangen.

Hieraus ist zu schliessen, dass das krystallisirte Manganoxyd nicht aus Monoxyd und Dioxyd besteht.[2]

Was das künstliche Manganoxyd betrifft, so führt Berthier an, es werde durch HNO^3 gleichfalls in MnO und MnO^2 zersetzt, und Turner macht nur die kurze Bemerkung, es werde durch verdünnte Schwefelsäure in Oxydul und Dioxyd zerlegt.

Nun giebt es allerdings noch ein Mineral, den viergliedrig krystallisirten Braunit, welchen man auf Grund von Turner's Versuchen für Manganoxyd gehalten hat, bis ich im Jahre 1865 zeigte,[3] dass er einen wesentlichen etwa 8 Procent betragenden Gehalt an Kieselsäure hat.

---

[1] Jahresbericht 3, 117 und 15, 249.

[2] Die Isomorphie des Manganits mit Diaspor, Göthit und Chrysoberyll führt überdies zu dieser Ansicht.

[3] Pogg. Ann. 124, 513 (1865).

Digitized by Google

den TURNER übersah. Indem er das Mineral in Wasserstoff glühte, nahm er den Rückstand für MnO und den Glühverlust für den Sauerstoff desselben. Da aber jener Rückstand aus MnO und SiO^2 bestand, erhielt er zuviel Sauerstoff.

TURNER hatte in dem Mineral 2.25 Procent Baryt gefunden. Meine eigenen Versuche, welche im Mittel nur 0.44 Procent Baryt und 0.91 Kalk gaben, und bei denen der Sauerstoff direct bestimmt wurde, zeigten, dass die Menge des letzteren weniger als die Hälfte des im MnO enthaltenen ausmacht, dass also der Braunit nicht aus Mn^2O^3 und SiO^2 bestehen kann.

Ich habe die Constitution des Braunits in Analogie mit derjenigen des Titaneisen als $MnSiO^3 + 3Mn^2O^3$ aufgefasst, und ihr vor derjenigen den Vorzug gegeben, wonach es

$$MnO + \left\{\begin{matrix} Mn \\ Si \end{matrix}\right\} O^2$$

wäre.

Auch der Braunit von St. Marcel hat dieselbe Zusammensetzung, nur ist ein Theil des Mangans durch Eisen ersetzt.

Gepulverte Braunitkrystalle wurden mit concentrirter Salpetersäure gekocht. Die Lösung wurde abgedampft, der Rest geglüht und mit Chlorwasserstoffsäure behandelt, um die aufgelöste Kieselsäure zu bestimmen. Es zeigte sich, dass 38.77 Procent, und in einem zweiten Versuch 41.15 Procent MnO sich aufgelöst hatten.

Das MnO des $MnSiO^3$ macht 11.75 Procent aus. Wäre auch das Mn^2O^3 in MnO und MnO^2 zersetzt worden, so hätten 47 Procent erhalten werden müssen. Es ist wahrscheinlich, dass durch längere Einwirkung der Säure alles Mn^2O^3 zersetzt worden wäre.

So viel steht fest, dass das reine Mn^2O^2 des Manganits sich gegen Salpetersäure anders verhält, wie das im Braunit angenommene.

Mennige Pb^3O^4, zerfällt durch Salpetersäure in 2PbO und PbO^2. Aber auch Pb^2O^3 liefert nach WINKELBLECH PbO und PbO^2.

GUSTAV ROSE[1] nahm BERTHIER's Ansicht wieder auf, um die Nichtisomorphie des Hausmannits mit dem Magneteisen und des Braunits mit dem Eisenglanz zu erklären, wobei er die Isomorphie von MnO^2 und SiO^2 supponirte.

Wenn man die Zusammensetzung des Braunits und die des Titaneisens als analog betrachtet, darf man doch nicht übersehen, dass Eisenglanz und Titaneisen gleiche Form haben, verschieden von der des Braunits. Man kann also vermuthen, die R^2O^3 beider seien, trotz der bekannten Isomorphie von Eisen- und Manganverbindungen, ver-

[1] Pogg. Ann. 121, 318 (1864).

Digitized by Google

schieden constituirt, und das Mn^2O^3 des Braunits sei $MnO + MnO^2$, das Mineral also $MnO + (Mn,Si)O^2$, während das durch Säuren unangreifbare Oxyd des Manganits, gleichwie das im Franklinit enthaltene $2Mn + 3O$ sei.

Weder im Hausmannit noch im Braunit finden sich solche Mengen anderer Monoxyde, dass sie auf die Rechnung Einfluss haben könnten. Nur im Psilomelan treten oft ansehnliche Mengen von BaO oder K^2O auf. Da indessen dieses Mineral häufig mit Pyrolusit gemengt und wasserhaltig ist, geben die Analysen keinen sicheren Aufschluss über seine Natur. Alle lassen jedoch erkennen, dass in ihm eine Verbindung $RO + 4MnO^2$ wiederkehrt, in welcher $R = Mn$ und $Ba(K^2)$ ist, und dies würde die Ansicht unterstützen, dass auch in anderen Manganerzen das Monoxyd und das Dioxyd des Mangans enthalten sein könne.

Die Existenz von Verbindungen $RO + RO^2$ des nämlichen Metalls, welche beim Mangan hypothetisch erscheint, wird für die intermediären Oxyde des Urans offenbar eine Nothwendigkeit.

Ausser dem Dioxyd UO^2 und dem Trioxyd UO^3 kennen wir zwei intermediäre Verbindungen, nämlich das schwarze U^2O^5 und das dunkelgrüne U^3O^8. Jenes, durch starkes Glühen aus letzterem entstehend, hat grosse Neigung, während des Abkühlens sich wieder in das letztere zu verwandeln, weshalb seine Existenz früher mehrfach in Zweifel gezogen wurde. Naturgemäss betrachtet man

$$U^2O^5 \text{ als } UO^2 + UO^3$$
$$U^3O^8 \text{ als } UO^2 + 2UO^3.$$

Allein das Urantrioxyd ist nicht als $U + 3O$ aufzufassen. Wir wissen, dass es gegen Säuren sich wie ein Monoxyd RO verhält, d. h. dass sein Nitrat den RN^2O^6, sein Sulfat den RSO^4 entspricht, dass es mithin, wie Péligot zuerst vorschlug, als das Oxyd des Radicals Uranyl, d. h. als $(UO^2)O$ zu betrachten ist. Diese Annahme gewinnt noch grössere Berechtigung dadurch, dass weder UCl^6 noch UFl^6, wohl aber UO^2Cl^2 und UO^2Fl^2 sich darstellen lassen und mit anderen Chloriden und Fluoriden Salze liefern. In diesem Sinne ist

$$\text{das schwarze } U^2O^5 = (UO^2)O + UO^2$$
$$\text{das grüne } U^3O^8 = 2(UO^2)O + UO^2.$$

Jenes entspricht den Sesquioxyden $R^2O^3 = RO + RO^2$, dieses den Oxydoxydulen $R^3O^4 = 2RO + RO^2$.

Das häufigste und am längsten bekannte Uranerz, in welchem Klaproth das Uran entdeckte, ist das Uranpecherz oder die Pech-

Digitized by Google

blende, welche bekanntlich nur in dichten (amorphen) Massen vorkommt. Ihr Hauptbestandtheil ist ein Oxyd des Urans, jedoch ist das Erz gewöhnlich mit Carbonaten, Schwefel- und Arsenverbindungen durchwachsen, so dass Schwefel, Blei, Eisen, Arsen, Antimon, Wismuth, Kalk, Magnesia, Kohlensäure oder einige derselben gefunden werden, und beim Auflösen in Säuren stets gelatinöse Kieselsäure zurückbleibt. Indem man alle diese Stoffe als Verunreinigungen ansah, hielt man das Uranpecherz für das natürliche grüne Oxyd U^3O^8. Indessen bemerkte schon EBELMEN im Jahre 1843, dass das Erz ein schwarzes Pulver giebt, beim Erhitzen in Stickgas schwarz bleibt, in Sauerstoff aber grün wird, woraus er schloss, dass es das grüne Oxyd nicht enthalten könne. Indem er versuchte, die Oxydationsstufe des Urans bei der Analyse des Erzes von Joachimsthal zu bestimmen, gelangte er zu dem Schluss, in dem Uranpecherz sei das schwarze Oxyd U^2O^5 enthalten.[1]

BLOMSTRAND hat das Verdienst, in einer neuerlich publicirten Arbeit[2] diese Resultate EBELMEN's der Vergessenheit entzogen zu haben. Zugleich aber zeigte er, dass Blei und Silicium stets wiederkehrende, zur Zusammensetzung des Erzes gehörende Bestandtheile sind.

Indessen ist es erst durch Auffindung krystallisirter Abänderungen möglich geworden, über die chemische Natur des Erzes Aufschluss zu erlangen, weil dieselben bei weitem reiner sind. An mehreren Stellen Norwegens, zuerst von SCHEERER in Sätersdalen, dann bei Moss und bei Arendal und auch in Nordamerika hat man das Mineral in regulären Oktaedern gefunden.

Dadurch wurde es unthunlich, den alten Namen Pechblende beizubehalten, und es ist dafür Uraninit in Vorschlag gebracht.

Die Analysen des U. von Moss von LORENZEN, des von Mitchell Co., N. Carolina von FOULLON, und des von Branchville, Conn. von COMSTOCK zeigen, dass ausser dem supponirten U^2O^5 nur 4 bis 10 Procent Bleioxyd vorhanden sind.

Das Erz von Joachimsthal habe ich neuerlich nochmals analysirt, und zwar eine möglichst reine Probe, in welcher nur ein wenig Kupferkies zu bemerken war. Die Analyse ist nach Abzug von Schwefel, Arsen, Antimon und Kupfer (Eisen) berechnet.

---

[1] In quantitativer Beziehung ist die Differenz beider Oxyde eine sehr geringe, denn 100 U^2O^5 sind 100.95 U^3O^8.

[2] Geol. Fören. Förh. 7, 59 (1884). Auch deutsch im Journ. f. prakt. Chemie (2) 29, 191.

Digitized by Google

	1. Moss	2. N. Carolina	3. Connect.	4. Joachimsthal a. Ebelmen	4. Joachimsthal b. Rg.
UO^3	38.23	44.23	40.08	35.54	42.87
UO^2	50.42	50.13	54.51	48.44	40.50
PbO	9.72	3.82	4.27	5.09	3.25
FeO	0.25	0.98	0.49	3.07	3.78
CaO	0.21	—	—	3.46[1]	3.00
SiO^2	0.31	—	—	3.91	6.60
H^2O	0.70	—	0.88	2.03	—
	99.84	99.16	100.23	101.54	100

Wenn man versucht, sich eine Vorstellung von der chemischen Natur des Uraninits zu machen, so scheint es naturgemäss, dem Urantrioxyd als Uranyloxyd $(UO^2)O$ die übrigen RO (von Pb, Fe, Ca) hinzuzurechnen, und diesen die Dioxyde von U und Si gegenüberzustellen. Die Rechnung lehrt dann, dass alle Abänderungen der allgemeinen Formel

$$RO + RO^2 = \left\{\begin{matrix} UO^2O \\ PbO \\ FeO \\ CaO \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} UO^2 \\ SiO^2 \end{matrix}\right\}$$

entsprechen, und dass z. B.

$$\text{Nr. 1} = \left\{\begin{matrix} 5UO^2O \\ 2PbO \end{matrix}\right\} + 7UO^2$$

$$\text{Nr. 2 und 3} = \left\{\begin{matrix} 5UO^2O \\ PbO \end{matrix}\right\} + 6UO^2$$

ist. Natürlich setzt dies voraus, dass in keinem von ihnen $UO^2O + UO^2$ enthalten sein kann, allein da dieses Oxyd in 100 Th. = 85.71 Uran, das von Nr. 1. 86.12, von Nr. 2. 85.94 Uran bedingen, so leuchtet ein, dass die Analyse nicht vermag, über Differenzen zu entscheiden, welche innerhalb der Fehlergrenzen fallen.

Nun sind ausserdem krystallisirte Uraninite gefunden worden, welche reich an Blei sind, statt des Siliciums aber Thorium, sowie gewisse Mengen der Yttrium- und Cermetalle enthalten. Nordenskiöld nannte das von Lindström[2] untersuchte Mineral von Arendal Cleveit, und Blomstrand[3] das von ihm analysirte von Moss (Anneröd) Bröggerit. Sie könnten allgemein als Thoruraninite bezeichnet werden.

[1] Worin 2.32 MgO.
[2] Geol. Fören. Förh. 4, 28.
[3] A. a. O.

Digitized by Google

Auch diese U. führen zu dem Ausdruck:

$$RO + RO^2 = \left\{\begin{matrix} UO^2O \\ PbO \\ FeO \\ CaO \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} UO^2 \\ ThO^2. \end{matrix}\right.$$

Ein Wassergehalt von 5 Procent im Cleveit mag als nicht ursprünglich betrachtet werden.

Auch die Gegenwart der Sesquioxyde Y^2O^3, Er^2O^3, Ce^2O^3 lässt eine ungezwungene Deutung zu, insofern sie mit den Oxyden $RO+RO^2=R^2O^3$ als gleich zusammengesetzt, in isomorpher Mischung gedacht werden können.

Die hier vorgetragene Ansicht von der chemischen Natur dieser Uranerze bringt sie mit dem Braunit in sehr nahe Beziehung. Ist dieser wirklich

$$MnO + \left\{\begin{matrix} MnO^2 \\ SiO^2, \end{matrix}\right.$$

so stimmt ihre Constitution überein und auch ihre Formen, das reguläre Oktaeder jener, sowie das Quadratoktaeder von diesem, sind geometrisch nur sehr wenig verschieden.

Somit entsprechen sich bei beiden Metallen die RO, R^3O^4, R^2O^3 und RO^2 und man hat:

MnO und $UO^2.O$ (Trioxyd),

$Mn^3O^4 = 2MnO + MnO^2$ und $2UO^2.O + UO^2$ (grünes Oxyd),

Mn^2O^3 des Braunits $= MnO + MnO^2$ und $UO^2.O + UO^2$ (schwarzes Oxyd),

MnO^2 und UO^2.

Bei beiden sind die R^3O^4 die in höherer Temperatur allein beständigen und deshalb zur Bestimmung des Metalls vorzugsweise dienenden Oxyde.

Das Urandioxyd UO^2 geht durch Oxydationsmittel in Uranylmonoxyd $UO^2.O$ über. Umgekehrt verwandelt sich das unterphosphorigsaure Uranyl $H^4(UO^2)P^2O^4$ durch Erhitzen unter Entwickelung von Wasserstoff in metaphosphorsaures Uran UP^2O^6.[1]

Während uns $MnCl^2$ in fester Form bekannt ist, existiren ausser dem entsprechenden Uranylchlorür $UO^2.Cl^2$ das dem Dioxyde proportionale Tetrachlorid UCl^4; ja selbst UCl^3 und UCl^5.

[1] Monatsber. d. Akad. 1872, 447.

Digitized by Google

Über ein Hydrat des Manganoxydoxyduls.

Das durch Alkalien gefällte weisse Hydrat des Manganoxyduls wird bekanntlich an der Luft durch höhere Oxydation dunkelbraun, indem es sich nach Berzelius u. A. in Oxydhydrat verwandelt.

Versuche mit einem Präparat dieser Art, welches der Luft lange Zeit ausgesetzt war, und die nach mehreren Monaten mit gleichem Erfolg wiederholt wurden, haben gelehrt, dass es ein Hydrat vom Oxydoxydul, $Mn^3O^4 + aq$ ist.

	1.	2.	Berechnet.
Manganoxydul	86.88	86.72	86.23
Sauerstoff	6.31	7.00	6.48
Wasser			7.29
			100.

Digitized by Google

7. Untersuchungen über den Bau der Iris.

Von Dr. J. Koganeï.

(Vorgelegt von Hrn. Waldeyer am 5. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VI]; — ausgegeben am 12. Februar.)

Den Hauptgegenstand der im Nachstehenden mitgetheilten Untersuchungen bildete die Frage nach dem Vorkommen eines besonderen Musculus Dilatator Iridis. Was die bis jetzt darüber geäusserten Meinungen anlangt, so lassen sich diese in zwei Gruppen bringen, deren eine die Existenz eines Dilatator Pupillae völlig verneint, deren andere sie für sämmtliche Wirbelthierclassen bejaht. Aber auch die Anhänger dieser letzteren Gruppe befinden sich keineswegs im Einklange, indem von ihnen ganz verschiedene Bildungen für den fraglichen Musculus Dilatator angesehen werden.

Einige, wie Brücke und Dogiel, verlegen den von ihnen angenommenen Dilatator in das Stroma der Regenbogenhaut selbst, Andere, wie Schwalbe und zum Theil auch Grünhagen, suchen ihn zwischen dem Stroma und der hinteren Begrenzungshaut der Iris, während endlich Henle, Merkel, Iwanow und dessen Schüler Jeropheeff die hintere Begrenzungshaut selbst für den Musculus Dilatator erklären.

Unsere Befunde, welche an Repraesentanten aller Wirbelthierclassen angestellt wurden, ergeben nun, dass erstens ein besonderer Musculus Dilatator pupillae nur verhältnissmässig selten vorhanden ist; so fehlt er dem Menschen, dem Gorilla, dem Orang, Hunde, Meerschweinchen, der Ratte, der Maus, dem Iltis, der Katze, dem Schwein, Rinde und Pferde, während er bei der Fischotter auffallend stark und beim Kaninchen schwach entwickelt ist. Die untersuchten Vögel, Eidechsen und Schlangen zeigten sämmtlich einen starken, aus quergestreiften Muskelfasern bestehenden Dilatator — der der Fischotter und des Kaninchens hat glatte Muskelfasern. Beim Alligator lucius konnte aber kein Dilatator gefunden werden, ebenso wenig bei Amphibien, (Frosch, Triton) noch bei Knochenfischen (Hecht, Karpfen) bei Acipenser und bei Selachiern (Carcharias, Heptanchus, Scyllium).

Es lässt sich ferner nachweisen, dass überall da, wo ein Dilatator gefunden wird, derselbe, wie Schwalbe und Grünhagen richtig angegeben haben, stets zwischen der hinteren Begrenzungshaut und dem Stroma Iridis liegt, und dass die hintere Begrenzungshaut, über welche eine sehr eingehende Untersuchung angestellt wurde, entschieden nicht

Digitized by Google

musculös ist. Dieselbe muss vielmehr zu den bindegewebigen Grenzhäuten gerechnet werden, wenn auch ihre Fasern weder mit leimgebenden Bindegewebsfibrillen, noch mit elastischen Fasern völlig übereinstimmen. Die scheinbare Paradoxie, dass bei einzelnen Geschöpfen ein Dilatator vorkommt, während er bei andern, selbst nahe verwandten fehlt, verliert von ihrem Befremdlichen, wenn man erwägt, dass auch der Sphincter pupillae bei weitem nicht allen Thieren eigen ist. So entbehren die Frösche und Tritonen eines Sphincter Iridis, desgleichen auch zahlreiche Knochenfische (Hecht, Karpfen u. a.), auch fehlt er den Stören, sowie den Gattungen Heptanchus und Scyllium unter den Selachiern. Andere Teleostier dagegen, wie Salmo hucho (nach Berger) und andere Selachier, wie Carcharias glaucus, führen einen Sphincter pupillae. Es stellt sich also die bemerkenswerthe Thatsache heraus, dass in der gesammten Irismusculatur, die wir als einen so nothwendigen Factor für die Bewegungen der Iris anzusehen uns gewöhnt haben, die erheblichsten Schwankungen vorkommen, und dass die extremen Parteien im Unrechte sind, wenn die Einen einen Dilatator überall läugnen und die Andern ihn überall annehmen.

Stellt man einen Vergleich an zwischen der Ausbildung des Muskelapparates einerseits und des Blutgefässgebietes und des Bindegewebes der Iris andererseits, so lassen sich bemerkenswerthe Beziehungen erkennen. So steht der Dilatator hinsichtlich seiner Stärke in umgekehrtem Verhältnisse zur hinteren Begrenzungshaut. Dasselbe umgekehrte Verhältniss zeigt sich im Allgemeinen zwischen der Menge des Bindegewebes und der der Blutgefässe, d. h., bei geringer Menge des Bindegewebes ein grosser Reichthum an Blutgefässen und umgekehrt.

An der vorderen Fläche der Iris findet sich überall das Endothel, was jedoch beim erwachsenen Menschen, wie schon Henle angiebt, nicht lückenlos ist. Im Stroma der Regenbogenhaut sind mehrere Arten von Zellen zu unterscheiden: fixe, ganz platte farblose Bindegewebszellen mit Fortsätzen, verästigte sogenannte Stromazellen, theils mit farblosen Granulationen, theils mit Pigmentkörnchen gefüllt; mancherlei Übergänge erweisen, dass die farblosen Granulationen als Vorstufen von Pigmentkörnchen aufzufassen sind; endlich Leucocyten ähnliche Formen und sogenannte »Klumpenzellen«, welche mit grossen Klumpen Pigments dicht erfüllt sind. Die hintere Irisfläche ist überall, auch beim Erwachsenen, mit dem doppelten Epithel belegt, welches die Entwickleungsgeschichte fordert; beide Epithellager biegen am Pupillarrande in einander um. Auch die Existenz der von Schwalbe nachgewiesenen feinen *Membrana limitans*, als hinterster Begrenzungsschicht der Regenbogenhaut, lässt sich nicht bezweifeln.

Digitized by Google

8. Untersuchungen über Reflexe.

Von Dr. Moritz Mendelssohn.

Dritte Mittheilung.

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond am 5. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VI]; — ausgegeben am 12. Februar.)

Zur weiteren Prüfung und genaueren Begründung der aus meinen früheren Versuchen[1] gezogenen Schlussfolgerungen habe ich eine neue Reihe von Versuchen angestellt, in welchen ich die Verbreitungsart der Reflexe im Rückenmark bei multiplen Schnitten untersuchte. Hieran schloss sich dann eine zweite Reihe, bei welcher ich die Erscheinungen verfolgte, wie sie sich bei Reizung der oberen Extremität darstellen. Die Versuche wurden zum Theil noch im Januar 1883 im Laboratorium des Hrn. Prof. I. Rosenthal in Erlangen begonnen, sodann im Sommer 1883 und im Frühling 1884 im Laboratorium des Hrn. Prof. Marey im Collège de France in Paris fortgesetzt. Alle diese Versuche sind nach genau derselben Methode angestellt, welche ich schon in meinen früheren Versuchen befolgte.

A. Multiple Schnitte; Reizung der unteren Extremität.

Die Schnitte wurden mit einem sehr feinen Messerchen in verschiedenen Höhen des Rückenmarks ausgeführt, so aber, dass der höchste Schnitt niemals die von uns im Halsmarke nachgewiesene Stelle für die Übertragung der normalen Reflexe überschritt; nach unten gingen die Schnitte niemals bis zu der Abgangsstelle der Nerven für die unteren Extremitäten, sondern blieben stets einige Millimeter (1—3) von dem Ursprung der obersten Nervenwurzeln entfernt. Die Frösche waren leicht strychninisirt. Der Reiz wurde stets an der rechten unteren Extremität angebracht. Ehe die Versuche begannen, wurde stets so lange gewartet, bis die erste Wirkung des Schnittes verschwunden war. Die Resultate waren folgende:

[1] Vergl. diese Sitzungsberichte 1882, St. XL. S. 897, 1883, St. V. S. 111; — Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen, 1882, S. 549, 1883, S. 31.

Digitized by Google

13. Wenn bei schon ausgeführtem Halbschnitte auf der gereizten Seite im Dorsaltheile des Rückenmarks ein anderer Halbschnitt etwas höher und auf der entgegengesetzten Seite ausgeführt wird, so können noch Reflexe in allen vier Extremitäten zu Stande kommen; aber nur in der gereizten unteren rechten Extremität ist der Reflex unverändert, in den drei anderen Extremitäten sind die Reflexe bedeutend geschwächt und ihre Auslösung findet jetzt erst bei höheren Reizstärken statt, als für ihr Zustandekommen nach dem ersten Schnitte nöthig war. Im allgemeinen scheint der Grad der Schwächung der Reflexe nicht wesentlich von der Grösse des Abstandes der beiden Schnitte abzuhängen; doch bei sehr kleinem Abstande ist die Schwächung der Reflexe in den oberen Extremitäten grösser als in der dem Reiz entgegengesetzten unteren Extremität.

Zwei etwas von einander entfernte ($2-5^{mm}$) Halbschnitte an beiden Rückenmarkshälften, im Cervicaltheile schwächen auch die Reflexe in beiden oberen und in der nicht gereizten unteren Extremität, ändern aber nicht den Reflex in der gereizten Extremität; in diesem Falle ist die Schwächung der Reflexe beider Extremitäten an der dem Reize entgegengesetzten Seite deutlich grösser, als die des Reflexes der oberen Extremität an der gereizten Seite.

14. Multiple Halbschnitte in verschiedenen Höhen des Rückenmarks verhalten sich wie doppelte Halbschnitte d. h. üben keinen Einfluss auf die gereizte Extremität, die Schwächung aber der Reflexe in den drei anderen Extremitäten ist bedeutend mehr ausgeprägt, als bei dem doppelten Halbschnitt und ist abhängig von der Zahl der Halbschnitte und ihrer Lage. — Nur bei in operativer Hinsicht misslungenen Versuchen fallen die Reflexe in den drei Extremitäten aus, sonst kommen sie auch bei multiplen Halbschnitten in allen vier Extremitäten vor.

Im Allgemeinen kann man sagen, dass die oberhalb der gereizten unteren Extremität angelegten multiplen Halbschnitte ähnlich wirken wie ein Halbschnitt im Dorsaltheile des Rückenmarks an der gereizten Seite, nur ist bei den multiplen Schnitten die Schwächung der Reflexe in den beiden oberen und in der nicht gereizten unteren Extremität bedeutend grösser, als bei einem einfachen Halbschnitte.

15. Wenn man bei schon angebrachtem Längsschnitte (Sagittalschnitte) durch das Rückenmark von etwa 2^{mm} unterhalb der Spitze des Calamus scriptorius bis zum Anfang der Wurzeln für die unteren Extremitäten irgendwo einen queren Halbschnitt führt, so sind die Resultate verschieden, je nach der Höhe und Stelle des Rückenmarks, wo der Halbschnitt ausgeführt wird:

a) Ein Halbschnitt im Dorsaltheile auf der gereizten Seite verhindert das Zustandekommen der Reflexe in den beiden oberen und

Digitized by Google

in der dem Reize entgegengesetzten unteren Extremität, lässt aber unverändert den Reflex in der gereizten unteren Extremität.

b) Bei einem Halbschnitt im Cervicaltheile an der gereizten Seite (2 bis 4^{mm} unterhalb der Spitze des Calamus scriptorius) ist das Zustandekommen beider Reflexe in der linken, nichtgereizten Seite verhindert, der Reflex in der gereizten unteren Extremität ist unverändert, in der oberen rechten Extremität stark geschwächt, so dass derselbe nur bei maximalem Reize zu Stande kommen kann.

c) Ein Halbschnitt im Cervicaltheile auf derselben Höhe, aber auf der dem Reize entgegengesetzten Seite verhindert das Zustandekommen beider Reflexe auf dieser Seite, lässt aber die Reflexe auf der gereizten Seite unverändert.

d) Bei Halbschnitten im Dorsaltheil auf der dem Reiz entgegengesetzten Seite verschwindet der Reflex in der unteren Extremität derselben Seite; die drei anderen Reflexe bleiben aber dabei unverändert.

Im Allgemeinen kann man sagen, dass ein bei praeexistirendem Längsschnitt ausgeführter Halbschnitt gar nicht oder nur sehr wenig das Zustandekommen der Reflexe auf dem Wege zwischen dem Reiz und dem Halbschnitt beeinflusst, dagegen das Zustandekommen der Reflexe jenseits des Schnittes verhindert.

16. Ein bei praeexistirendem Längsschnitt gemachter Querschnitt wirkt wie ein auf derselben Höhe ausgeführter Halbschnitt auf der gereizten Seite (also wie in a und b des 15. Satzes).

B. Reizung an der oberen Extremität.

Um die durch Reizung der unteren Extremität gewonnenen Thatsachen genauer festzustellen, habe ich eine Reihe von Untersuchungen vorgenommen, bei welcher der Reiz an der oberen Extremität angewendet war. Er wurde stets rechts angebracht und zwar in derselben Weise wie bei Reizung der unteren Extremität. Sonst waren die Versuchsbedingungen dieselben wie bei der ersten Versuchsreihe. Die hier gewonnenen Resultate sind folgende:

17. Im Allgemeinen ist das Zustandekommen der Reflexe in den unteren Extremitäten bei Reizung einer oberen viel schwerer und erfordert bei demselben Frosche eine viel grössere Reizstärke als die Verbreitung der Reflexe von einer gereizten unteren Extremität auf die oberen. Bei vorsichtiger Steigerung der sensiblen Reizung einer rechten oberen Extremität ist die Ausbreitung der Reflexe auf die vier Extremitäten folgende:

Digitized by Google

Am leichtesten (d. h. bei der minimalen Reizung)
an der rechten oberen Extremität,
dann an der linken oberen Extremität,
dann an der rechten unteren Extremität,
zuletzt an der linken unteren Extremität.

Diese Reihenfolge gilt für stärkere Reize insofern, dass immer die Reflexe in den beiden oberen Extremitäten vor den Reflexen in den Unterextremitäten zu Stande kommen. Nur bei gewissen, maximalen Reizstärken kommt der Reflex in der linken oberen und in der rechten unteren Extremität fast gleichzeitig zu Stande. Bei übermaximalen Reizen ist es unmöglich eine Reihenfolge zu verfolgen: alle vier Reflexe scheinen gleichzeitig ausgelöst zu werden.

18. Ein Querschnitt an der Spitze des Calamus scriptorius oder etwa $^1/_2$ bis 1^{mm} unterhalb derselben geführt übt keinen Einfluss auf den Reflex in der gereizten oberen Extremität, erschwert aber das Zustandekommen der Reflexe in der oberen Extremität der anderen Seite und in beiden unteren Extremitäten; dieselben können nur bei stärkeren Reizen aufgelöst werden. Wird dieser Querschnitt näher an den Ursprung für die Nerven der oberen Extremitäten geführt (etwa $1-2^{mm}$ oberhalb desselben) so kann auch eine Schwächung, ja sogar das Verschwinden des Reflexes in der oberen gereizten Extremität eintreten.

Ein Querschnitt im Dorsaltheile des Rückenmarks hebt natürlich das Zustandekommen der Reflexe in den unteren Extremitäten auf, übt aber keinen nachweisbaren Einfluss auf die Reflexe in den beiden oberen Extremitäten.

19. Ein Halbschnitt in der Mitte des Halsmarks auf der gereizten Seite hat keine Wirkung auf den Reflex in der gereizten oberen Extremität, erschwert aber das Zustandekommen der Reflexe in den drei übrigen Extremitäten. Ein ähnlicher Halbschnitt auf der entgegengesetzten Seite schwächt deutlich die Reflexe auf dieser Seite, ändert aber gar nicht die beiden Reflexe auf der gereizten Seite.

Ein Halbschnitt in der Mitte des Dorsalmarks auf der dem Reize entsprechenden Seite schwächt nur den Reflex in der unterhalb des Schnittes (also auf der gereizten Seite) gelegenen unteren Extremität; die drei übrigen Reflexe bleiben unverändert. Ein ähnlicher Halbschnitt auf der dem Reize entgegengesetzten Seite schwächt den Reflex in der unteren Extremität auf dieser Seite, beeinflusst aber gar nicht die drei übrigen Reflexe.

20. Längsschnitt (Sagittalschnitt) von etwa $2-3^{mm}$ unterhalb der Spitze des Calamus scriptorius bis zum Abgang der Wurzeln für

Digitized by Google

die oberen oder für die unteren Extremitäten hat keinen Einfluss auf das Zustandekommen der Reflexe in den gesammten Extremitäten.

Aus diesen Versuchen folgt, dass die bei Reizung der oberen Extremität ausgelösten Reflexe denselben Gesetzen unterworfen sind, wie diejenigen, welche bei Reizung der unteren Extremität zu Stande kommen. Namentlich geht auch aus ihnen unzweifelhaft hervor, dass nur bei unversehrtem Zusammenhang der sensiblen und motorischen Leitungsbahnen mit den **oberen** Theilen des Rückenmarks die schwachen, ausreichenden Reize Reflexe auslösen können. Dieser von Hrn. Prof. ROSENTHAL aufgestellte und von mir durch die in den zwei ersten Abhandlungen, wie auch durch die hier mitgetheilten Versuchsergebnisse geprüfte Satz gilt also für alle normalen Reflexe, die durch Reizung einer beliebigen Extremität auslösbar sind.

Die Versuchsreihe mit multiplen Schnitten zeigt zugleich, dass an jeder Stelle und in jeder Höhe des Rückenmarks die sensiblen Bahnen mit den motorischen verbunden sind, was auch bei mehrfacher Beschädigung des Rückenmarkes die Auslösung der Reflexe ermöglicht. Sie liefert zugleich den Beweis, dass die normalen (durch ausreichende Reize hervorgerufenen) Reflexe die längeren Bahnen nach dem obersten Rückenmarksabschnitte einschlagen, trotzdem ihnen jene kürzeren Verbindungswege offen stehen. Sind aber die normalen Leitungsbahnen durch Quer- oder Längsschnitte unwegsam gemacht, dann bedarf es zur Auslösung der Reflexe stärkerer, d. h. maximaler Reize.

Endlich ist zu bemerken, dass ein Theil dieser durch elektrische Reizung gewonnenen Resultate auch durch mechanische Reizung nachweisbar ist; die ausführlichen Ergebnisse der mit dieser Methode ausgeführten Untersuchungen werde ich mir erlauben zum Gegenstand einer folgenden Mittheilung zu machen.

Digitized by Google

Digitized by Google

9. Zum dritten Gauss'schen Beweise des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste.

Von Ernst Schering.

(Vorgelegt am 15. Januar; — gedruckt im Bericht vom 5. Februar [St. VI]; — ausgegeben am 12. Februar.)

Unter den bis jetzt veröffentlichten Beweisen des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste sind diejenigen sehr einfach, welche dem fünften Gauss'schen Beweise entsprechen, wie der von mir in den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen 1879 Januar 4. S. 217 und der von Hrn. Kronecker in den Sitzungsberichten der Königlichen Akademie der Wissenschaften Berlin Mai 1884 S. 78 gegebene Beweis.

An Einfachheit und Neuheit der dabei gewonnenen Hülfssätze ragt die von Hrn. Kronecker am 12. Juni 1884 der Akademie vorgelegte Entwickelung hervor, welche zu der Classe des dritten Gauss'schen Beweises gehört.

Eine andere, auch dem dritten Gauss'schen Beweise entsprechende Ableitung, habe ich im Sommer-Semester 1883 in den hiesigen Akademischen Vorlesungen vorgetragen: ich erlaube mir dieselbe nach Einführung der Kronecker'schen Bezeichnungsweise hier vorzulegen.

In der genannten Untersuchung bezeichne ich mit $\mathfrak{Anz}_{\mu,\nu,\ldots}^{\mathfrak{Pos}} F(\mu,\nu,..)$, mit $\mathfrak{Anz}_{\mu,\nu,\ldots}^{\mathfrak{Null}} F(\mu,\nu,..)$ und mit $\mathfrak{Anz}_{\mu,\nu,\ldots}^{\mathfrak{Neg}} F(\mu,\nu,..)$ die Anzahl der positiven, die Anzahl der verschwindenden und die Anzahl der negativen Werthe der Function $F(\mu,\nu,..)$, wenn darin $\mu,\nu,..$ gegebene Werthensysteme durchlaufen, ferner $\mathfrak{AB}x$, oder wie Hr. Kronecker in der genannten Untersuchung mit Rx, den absolut kleinsten Bruchrest von x.

In meiner »analytischen Theorie der Determinanten«, Göttingen 1878 (Abhandlungen d. K. Ges. d. Wiss.), setze ich

$$\mathfrak{Z}x = +1 \text{ für } x > 0,\quad \mathfrak{Z}x = 0 \text{ für } x = 0,\quad \mathfrak{Z}x = -1 \text{ für } x < 0.$$

Hr. Kronecker setzt in der obengenannten Abhandlung

$$\operatorname{sgn} x = +1 \text{ für } x > 0,\quad \operatorname{sgn} x = -1 \text{ für } x < 0.$$

Digitized by Google

Ist m eine ungerade positive Zahl, ist n zu m theilerfremd, bedeutet μ eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \frac{m-1}{2}$, bezeichnet q_μ die nächste ganze an $\frac{n\mu}{m}$ liegende Zahl und r_μ den absoluten Betrag des absolut kleinsten Restes von $n\mu$ modulo m, so wird entweder

$$(I, 1) \qquad n\mu = q_\mu m + r_\mu,$$

also

$$(I, 2) \qquad 0 < \frac{n\mu}{m} - q_\mu = \frac{r_\mu}{m} < +\tfrac{1}{2}$$

und demnach, wenn noch n positiv ist,

$$(I, 3) \qquad q_\mu = \mathfrak{Anz}_\nu \mathfrak{Pos}\left(\frac{n\mu}{m} - \nu\right) = \mathfrak{Anz}_\nu \mathfrak{Neg}\left(\nu - \frac{n\mu}{m}\right) \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots + \infty)$$

$$\text{für } \mathfrak{ZAB}\frac{n\mu}{m} = \operatorname{sgn} \mathrm{R}\frac{n\mu}{m} = +1$$

oder es wird

$$(II, 1) \qquad n\mu = q_\mu m - r_\mu,$$

also dann

$$(II, 2) \qquad +\tfrac{1}{2} < \frac{n\mu}{m} - (q_\mu - 1) = 1 - \frac{r_\mu}{m} < +1$$

und, wenn noch n positiv ist,

$$(II, 3) \qquad q_\mu - 1 = \mathfrak{Anz}_\nu \mathfrak{Pos}\left(\frac{n\mu}{m} - \nu\right) = \mathfrak{Anz}_\nu \mathfrak{Neg}\left(\nu - \frac{n\mu}{m}\right) \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots \infty)$$

$$\text{für} \quad \mathfrak{ZAB}\frac{n\mu}{m} = \operatorname{sgn} \mathrm{R}\frac{n\mu}{m} = -1.$$

Aus den Gleichungen (I, 3) und (II, 3) folgt die gemeinsame Form

$$(4) \quad (-1)^{q_\mu} \cdot \mathfrak{ZAB}\frac{n\mu}{m} = (-1)^{q_\mu} \cdot \operatorname{sgn} \mathrm{R}\frac{n\mu}{m} = (-1)^{\mathfrak{Anz}_\nu \mathfrak{Neg}\left(\nu - \frac{n\mu}{m}\right)} =$$

$$= \mathfrak{Z}\prod_\nu\left(\nu - \frac{n\mu}{m}\right) = \mathfrak{Z}\prod_\nu\left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right) = \operatorname{sgn}\prod_\nu\left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right)$$

unter der Voraussetzung: m und n positiv und theilerfremd zu einander, m ungerade und $1 \leqq \mu \leqq \frac{m-1}{2}$.

Die Zahlen r_μ in den Gleichungen (I, 1) und (II, 1) durchlaufen, wie schon Gauss auf elementarem Wege gezeigt hat, wenn μ die

Digitized by Google

Werthe $1, 2, 3, \ldots \frac{m-1}{2}$ annimmt, ebenfalls die Werthe $1, 2, 3, \ldots \frac{m-1}{2}$ in einer eigenen Reihenfolge, es ist also

$$\sum_{\mu} r_{\mu} = \sum_{\mu} \mu = \frac{mm-1}{8} \qquad \left(\mu = 1, 2, 3, \ldots \frac{m-1}{2}\right), \tag{5}$$

daher ergiebt sich aus jenen Gleichungen noch

$$\sum_{\mu} q_{\mu} \equiv \sum_{\mu} \mu - \sum_{\mu} r_{\mu} \equiv 0 \pmod 2 \text{ wenn } n \text{ ungerade ist,} \tag{6}$$

$$\sum_{\mu} q_{\mu} \equiv \sum_{\mu} r_{\mu} \equiv \frac{mm-1}{8} \pmod 2 \text{ wenn } n \text{ gerade ist.} \tag{7}$$

Multiplicirt man die Gleichungen von der Form (4) für alle die angegebenen Werthe des μ mit einander, benutzt von nun an nur die KRONECKER'sche Bezeichnungen und berücksichtigt die grössten von ν in Betracht kommenden Werthe, so erhält man hiernach, wenn n ungerade ist:

$$\operatorname{sgn} \prod_{\mu} \mathrm{R} \frac{n\mu}{m} = \operatorname{sgn} \prod_{\mu,\nu} \left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right) \tag{8}$$

und also

$$\operatorname{sgn} \prod_{\mu} \mathrm{R} \frac{-n\mu}{m} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{sgn} \prod_{\mu,\nu} \left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right) \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} \mu = 1, 2, 3, \ldots \frac{m-1}{2} \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2} \text{ für } n > 1 \\ \nu = 1 \text{ für } n = 1 \end{pmatrix}$$

dagegen, wenn n gerade ist,

$$\operatorname{sgn} \prod_{\mu} \mathrm{R} \frac{n\mu}{m} = (-1)^{\frac{mm-1}{8}} \operatorname{sgn} \prod_{\mu,\nu} \left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right) \tag{10}$$

also

$$\operatorname{sgn} \prod_{\mu} \mathrm{R} \frac{-n\mu}{m} = (-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{mm-1}{8}} \operatorname{sgn} \prod_{\mu,\nu} \left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right) \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} \mu = 1, 2, 3, \ldots \frac{m-1}{2} \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots \frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

Für die KRONECKER'schen Producte ist der allgemeine Reciprocitätssatz

$$\operatorname{sgn} \prod_{\mu,\nu} \left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}\right) = (-1)^{MN} \operatorname{sgn} \prod_{\mu,\nu} \left(\frac{\mu}{m} - \frac{\nu}{n}\right) \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, 3, \ldots M \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots N \end{pmatrix} \tag{12}$$

unmittelbar ersichtlich. Für $N = 1$ und $n = 1$ oder $n = 2$ nimmt das KRONECKER'sche Vorzeichenproduct der ersten Seite in der Gleichung (12) den Werth $+1$ an, wenn, wie hier, m ungerade grösser als 1 und $M < \frac{m}{2}$ vorausgesetzt wird.

Definirt man das LEGENDRE'sche Zeichen durch die GAUSS'sche Charakteristik, setzt also

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\text{Anz. Neg. } \mathfrak{AB} \frac{n\mu}{m}} = \mathfrak{S} \prod_{\mu} \mathfrak{AB} \frac{n\mu}{m} = \operatorname{sgn} \prod_{\mu} \mathrm{R} \frac{n\mu}{m}, \tag{13}$$

Digitized by Google

so erhält man aus (8), (9), (10), (12) das bekannte Fundamental-Theorem

$$(14)\quad \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}},\quad \left(\frac{-1}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}},\quad \left(\frac{2}{m}\right)=(-1)^{\frac{mm-1}{8}}$$

für ganze positive, ungerade zu einander theilerfremde Zahlen m und n.

Bemerkungen.

Bei der vorstehenden Ableitung des Reciprocitäts-Gesetzes für quadratische Reste ist auf eine genügend einfache Weise gezeigt, dass Σq_μ für ungerade m und n einen geradzahligen Werth enthält. In der Abhandlung »Bestimmung des quadratischen Rest-Charakters« (Abhandlungen d. K. G. d. W. Göttingen 1879 Februar Bd. XXIV), habe ich für den halben Werth der Summe der q_μ einen solchen Ausdruck gefunden, so dass man mit dessen Benutzung nach den obigen Gleichungen (I, 3) und (II, 3), wenn man die an x zunächst liegende ganze Zahl durch $\mathfrak{NG}x$ bezeichnet, den Lehrsatz:

$$(15)\quad \sum_\mu \mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Neg}\,\mathfrak{AB}\frac{n\mu}{m}+\sum_\mu \mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{\mu}{m}-\frac{\nu}{n}\right)=\sum_\mu \mathfrak{NG}\frac{n\mu}{m}=\sum_{\mu,\nu}\mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{n\mu}{m}+\tfrac{1}{2}-\nu\right)$$
$$=\sum_{\mu,\nu}\mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Pos}\left(1-\frac{2\mu-1}{m}-\frac{2\nu-1}{n}\right)=2\sum_{\mu,\nu}\mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Pos}\left(1-\frac{2\mu-1}{m}-2\frac{2\nu-1}{n}\right)$$
$$=2\sum_{\mu,\nu}\mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{n\mu}{2m}+\tfrac{1}{2}-\nu\right)=2\sum_\mu \mathfrak{NG}\frac{n\mu}{2m}=\sum_\nu \mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Neg}\,\mathfrak{AB}\frac{m\nu}{n}+\sum_\nu \mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{\nu}{n}-\frac{\mu}{m}\right)$$
$$=\sum_\nu \mathfrak{NG}\frac{m\nu}{n}=\sum_{\mu,\nu}\mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{m\nu}{n}+\tfrac{1}{2}-\mu\right)=\sum_{\mu,\nu}\mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$=2\sum_{\mu,\nu}\mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Pos}\left(1-2\frac{2\mu-1}{m}-\frac{2\nu-1}{n}\right)=2\sum_{\mu,\nu}\mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Pos}\left(\frac{m\nu}{2n}+\tfrac{1}{2}-\mu\right)=2\sum_\mu \mathfrak{NG}\frac{m\nu}{2n}$$
$$\left(\mu=1,2,3,\ldots\frac{m-1}{2};\quad \nu=1,2,3,\ldots\frac{n-1}{2}\right)$$

aufstellen kann.

Hieraus ergeben sich, wenn noch mit $[x]$ die grösste ganze Zahl bezeichnet wird, welche nicht grösser als x ist, sowohl die Reciprocitäts-Theoreme:

$$(16)\quad \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}=\sum_\mu\left[\frac{n\mu}{m}\right]+\sum_\nu\left[\frac{m\nu}{n}\right]$$
$$=4\sum_\mu \mathfrak{NG}\frac{n\mu}{2m}-\sum_\mu \mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Neg}\,\mathfrak{AB}\frac{n\mu}{m}-\sum_\nu \mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Neg}\,\mathfrak{AB}\frac{m\nu}{n}$$
$$=\sum_\mu\left[\frac{2n\mu}{m}\right]-\sum_\nu \mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Neg}\,\mathfrak{AB}\frac{m\nu}{2n}=\sum_\nu\left[\frac{2m\nu}{n}\right]-\sum_\mu \mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Neg}\,\mathfrak{AB}\frac{n\mu}{2m}$$
$$=\sum_\mu\left[\frac{n(2\mu-1)}{m}\right]+\sum_\nu \mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Neg}\,\mathfrak{AB}\frac{m\nu}{2n}=\sum_\nu\left[\frac{m(2\nu-1)}{n}\right]+\sum_\mu \mathfrak{Anz}\,\mathfrak{Neg}\,\mathfrak{AB}\frac{n\mu}{2m}.$$

Digitized by Google

$$(17)\quad \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}+\sum_{\mu}\mathfrak{NG}\frac{n\mu}{2m}=\sum_{\mu}\left[\frac{2n\mu}{m}\right]+\sum_{\nu}\left[\frac{m\nu}{2n}\right]=\sum_{\nu}\left[\frac{2m\nu}{n}\right]+\sum_{\mu}\left[\frac{n\mu}{2m}\right]$$

wie auch, wenn mit $\mathfrak{Anz}_{\mu}\,\mathfrak{Ung}\,F(\mu)$ die Anzahl der ungeradzahligen Werthe bezeichnet wird, welche $F(\mu)$ annimmt, während μ ein gegebenes Werthensystem durchläuft, die neuen Gleichungen:

$$(18)\quad \mathfrak{Anz}_{\mu}\,\mathfrak{Neg}\,\mathfrak{AB}\frac{n\mu}{m}=\mathfrak{Anz}_{\mu}\,\mathfrak{Neg}\,\mathfrak{AB}\frac{n\mu}{2m}=\mathfrak{Anz}_{\mu}\,\mathfrak{Ung}\left[\frac{n\mu}{m}\right]=\mathfrak{Anz}_{\mu}\,\mathfrak{Ung}\left[\frac{n2\mu}{m}\right]$$
$$=\mathfrak{Anz}_{\mu}\,\mathfrak{Ung}\left[\frac{n(2\mu-1}{m}\right]=\sum_{\mu}\mathfrak{NG}\frac{n\mu}{m}-\sum_{\mu}\left[\frac{n\mu}{m}\right]=2\sum_{\mu}\mathfrak{NG}\frac{n\mu}{2m}-\sum_{\mu}\left[\frac{n\mu}{m}\right]$$
$$=\sum_{\mu}\mathfrak{NG}\frac{n\mu}{2m}-\sum_{\mu}\left[\frac{n\mu}{2m}\right]=2\sum_{\mu}\mathfrak{NG}\frac{n\mu}{m}-\sum_{\mu}\left[\frac{n\cdot 2\mu}{m}\right]$$
$$=2\sum_{\mu}\mathfrak{NG}\frac{n\mu}{m}+\sum_{\mu}\left[\frac{n\cdot(2\mu-1)}{m}\right]-\tfrac{1}{2}(m-1)(n-1).$$
$$\left(\mu=1,2,3,\ldots\frac{m-1}{2}\right)$$

Die der Mehrzahl dieser Gleichungen entsprechenden Congruenzen modulo 2 waren schon bekannt und sind als verschiedene Ausgangspunkte zu Beweisen für das Reciprocitätsgesetz benutzt worden.

Bemerkung zu Hrn. ERNST SCHERING's Mittheilung.

Von KRONECKER.

Ich erlaube mir den interessanten Entwickelungen, welche unser correspondirendes Mitglied, der Herausgeber von GAUSS' Werken, an den dritten GAUSS'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes geknüpft hat, eine neue Darstellung desjenigen Beweises anzufügen, welchen ich im §. 2 meiner Mittheilung vom 22. Juni 1876 im Anschluss an den dritten GAUSS'schen Beweis gegeben habe.

Bedeuten, wie in meiner Notiz vom 12. Juni 1884, m und n positive ungrade Zahlen und h, h^0, h' positive Zahlen, die kleiner als $\frac{1}{2}m$ sind, so findet für jede Zahl h eine Congruenz:

$$n(2h^0-1)\equiv(-1)^{\left[n\frac{2h^0-1}{m}\right]}(2h'-1)\pmod{m}$$

statt. Setzt man nun:

$$h=2h^0-1 \text{ oder } h=m-2h^0+1,$$

Digitized by Google

je nachdem $2h^0-1$ kleiner oder grösser als $\frac{1}{2}m$ ist, so kann der Exponent von -1 auf der rechten Seite der Congruenz durch $\left[\frac{nh}{m}\right]$ ersetzt werden, weil

$$\left[n\frac{2h^0-1}{m}\right]+\left[n\frac{m-2h^0+1}{m}\right]$$

gleich $n-1$, also gleich einer graden Zahl wird. Da ferner offenbar:

$$(-1)^{\left[\frac{nh}{m}\right]}=\operatorname{sgn}\prod_k\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right) \qquad \left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

ist, so geht jene Congruenz in folgende über:

$$n(2h^0-1)\equiv(2h'-1)\operatorname{sgn}\prod_k\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right) \pmod m \quad \left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right.$$

Nimmt man hierin der Reihe nach $h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1)$ und multiplicirt die dadurch entstehenden Congruenzen mit einander, so erhält man, falls m Primzahl ist, für das Legendre'sche Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ die Bestimmung:

$$\left(\frac{n}{m}\right)=\operatorname{sgn}\prod_{h,k}\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right) \qquad \left(\begin{matrix}h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1)\\ k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)\end{matrix}\right),$$

welche mit der Gleichung (D) in meiner Mittheilung vom 12. Juni 1884 identisch ist, und aus welcher das Reciprocitätsgesetz unmittelbar folgt.

Digitized by Google

10. Zur Organisation des Gymnarchus niloticus.

Von Prof. G. Fritsch.

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond am 15. Januar; — gedruckt im Bericht vom 5. Februar [St. VI]; — ausgegeben am 12. Februar.)

Zu den vielseitigen Verdiensten des kürzlich verstorbenen greisen Nestors der Afrikaforscher, Rüppell, gehörte es auch, aufmerksam gemacht zu haben auf einen wunderbaren Fisch des oberen Nil von sehr langgestreckter Gestalt, mit hoher, dem grössten Theil des Körpers eigener Rückenflosse, die sich bis zum Ende des peitschenförmig verjüngten Schwanzes verfolgen lässt. Der Fisch erhielt im System den Namen *Gymnarchus niloticus* und zog, ausser durch die angedeutete Gestaltung, bald auch dadurch die Aufmerksamkeit auf sich, dass in ihm Organe von eigenthümlichem Ansehen gefunden wurden, deren Bedeutung räthselhaft war.

Im Jahre 1846 untersuchte Erdl[1] in München die Organisation des Gymnarchus an Exemplaren, die durch den verdienstvollen Pruner-Bey nach Europa gelangt waren; er sprach diesem Fisch eine Lunge zu, die er der Reptilienlunge verglich, und beschrieb sehr eingehend acht eigenthümliche, zwischen den Muskeln lagernde Organe, die er ihrem Bau nach als »elektrische« bezeichnete, ohne indessen die Organe mit den anderen Systemen des Körpers, noch auch mit den besser gekannten elektrischen Organen anderer Fische in eine fassliche Beziehung gebracht zu haben. In der That war danach selbst die Berechtigung den Gymnarchus den nur unvollkommen elektrischen Fischen zuzurechnen, in Frage zu ziehen, weil über den Bau der Organe, um die es sich dabei handelte, auch von Erdl recht abweichende Eigenthümlichkeiten verzeichnet wurden. Der Fisch war in frischem Zustande seines abgelegenen Aufenthaltes wegen nicht leicht zu erlangen, und die spärlichen nach Europa gelangenden Exemplare in Spiritus waren meist zu schlecht conservirt oder wurden als Raritäten zu hoch geschätzt, um die Untersuchung zu einem befriedigenden Abschluss bringen zu können.

[1] Bulletin d. Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. N. 69 München 10. October 1846 u. ebenda N. 13. 13. April 1847.

Digitized by Google

Als ich im Auftrage der Königlichen Akademie die elektrischen Fische zu studiren unternahm, musste ich auch den Gymnarchus in's Auge fassen, und es gelang mir in den Besitz von Material zu kommen, welches einen verhältnissmässig günstigen Grad der Conservirung zeigte. Anderes leider weniger gut erhaltenes Material erhielt ich durch die Güte meines hochverehrten Freundes, Hrn. Ecker, welcher es bereits unternommen hatte auch seinerseits an das ungelöste Problem der Gymnarchus-Organe heranzutreten, als körperliches Leiden ihn an der Fortsetzung der Untersuchungen hinderte. So unternahm ich es zur Vervollständigung der Reihe elektrischer Fische diese Organe auf's Neue zu studiren und Erdl's Angaben zu prüfen, um die Natur der fraglichen Bildungen womöglich sicherer festzustellen und Vergleichungspunkte mit den anderen elektrischen Fischen zu gewinnen.

Auch jetzt noch, nach eingehender Beschäftigung mit dem Gegenstand, kann ich nicht umhin, meinem Bedauern Ausdruck zu geben, dass die Alkoholbehandlung der Exemplare es nicht gestattet, über alle wünschenswerthen Punkte der Organisation genügende Klarheit zu verbreiten, und sehe mich dem Vorwurf ausgesetzt, einen Gegenstand erörtern zu wollen, der zur Zeit noch unvollkommen gekannt ist.

Dagegen möchte ich aber erwiedern, dass die politischen Verhältnisse in Aegypten augenblicklich kaum einige Hoffnung erwecken, in kürzerer Zeit von dorther anderes, besseres Material in unsere Hände gelangen zu sehen. So entschloss ich mich, schon jetzt das der Öffentlichkeit zu übergeben, was unter solchen Verhältnissen festzustellen war, und auf die dunklen Punkte mit dem Wunsche zu verweisen, dass die Daten recht bald eine geeignete Vervollständigung von irgend einer Seite finden möchten.

Die makroskopische Untersuchung des in der hinteren Hälfte quer durchschnittenen Fisches zeigt einen regelmässigen, zierlichen Aufbau der Körpermusculatur in typischer Gruppirung, doch drängt sich an gewissen Stellen ein fremdartiges, durch seine weissliche, durchscheinende Farbe von den röthlichen Muskeln abstechendes Gewebe zwischen dieselben ein. Verfolgt man dasselbe in seinem Verlauf, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit, dass diese Substanz acht, hier rundliche, dort wieder mehr dreieckige Stränge bildet, deren relative Mächtigkeit im Allgemeinen gegen die Schwanzspitze zu immer mehr zunimmt, so dass sie schliesslich die Hauptmasse des Körperquerschnittes ausmacht, während die Muskeln im gleichen Verhältniss abnehmen. Eine gewisse Beziehung zum Muskelsystem ist durch die Anordnung der Stränge insofern gegeben, als sich in die vier Hauptlängsmuskeln *(M. laterales superiores et inferiores)* je ein solcher Strang am medianen Ansatz an die Wirbelbögen eindrängt; ich möchte

Digitized by Google

dieselben obere und untere mediane Organe nennen. Vier andere Organe drängen die den Hauptmuskeln, oder Muskelvollkegeln auflagernden Systeme von Muskelhalbkegeln *(M. laterales dorsales et ventrales)* nach Aussen zur Seite, und können als dorsale, resp. ventrale Organe bezeichnet werden (vergl. Fig. 1, *Os*, *Oi*, *od*, *ov*).

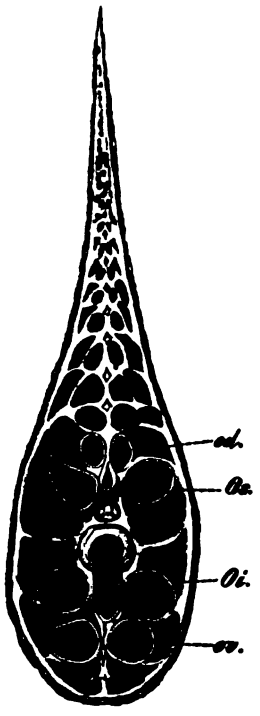


Fig. 1.
Durchschnitt des Schwanzes von *Gymnarchus niloticus* mit acht Organen. Doppelte Grösse.

Alle acht Organe endigen gegen das Kopfende zu spitz oder conisch zwischen den Muskeln, welche gleichsam den ihnen zukommenden Platz zurückerobern, und kurz vor dem Ende erscheinen die Organe (besonders das obere mediane) auf dem Querschnitt als kleine, etwa dreieckige Felder in den intermusculären Ligamenten, welche bei flüchtiger Betrachtung die Aufmerksamkeit gar nicht auf sich ziehen würden.

Die vier Organpaare endigen aber nicht alle im gleichen Querschnitt des Körpers, vielmehr in weit auseinanderliegenden; verfolgen wir sie von hinten nach vorn, also gegen den Kopf hin, so sehen wir zunächst das dorsale Organ endigen, es bleiben dann sechs Organe übrig; etwas weiter nach vorn verliert sich das ventrale und lässt vier, die medianen, übrig, welche am weitesten nach vorn dringen. Es endigt schliesslich das untere mediane unmittelbar da, wo die Leibeshöhle im Rumpfe erscheint, also in der Aftergegend, vom oberen medianen ziehen Spuren bis in die Höhe der Brustflossen, also ganz in die Nähe des Kopfes. Bei einem Gymnarchus von 89^{cm} Totallänge kamen gegen 69^{cm} auf den deutlich von Organen durchsetzten Theil: alle acht Organe reichten etwa 20^{cm} weit, das ventrale Organpaar 5^{cm} über das Ende des dorsalen hinaus, dann blieben die beiden medianen Paare allein übrig und zogen zusammen bis 40^{cm} von der Schwanzspitze, wo die beginnende Leibeshöhle dem unteren medianen Organpaar ein Ziel setzte.

Erdl hat Lagerung und Anordnung der Organpaare ganz ähnlich gefunden; seine Darstellung weicht nur darin von der meinigen wesentlich ab, dass er im letzten Schwanzabschnitt das untere mediane Organ allein übrig bleiben lässt. Bei meinem Material reichen alle acht Organe im Schwanz so weit nach hinten, dass auf dem unregelmässig werdenden Querschnitt des Schwanzes eine sichere Unterscheidung der verschiedenen Organe nicht mehr möglich ist.

Digitized by Google

Die Querdurchmesser der Organe sind in dem mittleren Theile ihres Verlaufes am grössten; sie betragen bei dem untersuchten Exemplar an den medianen Organen als Maximum 0.42^{cm}, an den ventralen 0.32, an den dorsalen 0.28, und verschmälern sich nach beiden Seiten zu.

Um die Organe markirt sich fibröses Bindegewebe, welches mit der Muskelscheide und den Zwischenmuskelbändern, sowie medianwärts mit dem Gewebe um die Wirbelfortsätze zusammenhängt. Die zurückgedrängte Muskelscheide, an welche sich eine dünnere als Organscheide aufzufassende untrennbar anlegt, macht die Abgrenzung dieser Theile gegen einander recht scharf und deutlich, während die Organscheide gegen die Wirbelsäule zu mit den Bändern derselben zu einer Masse verschmilzt. Schon Erdl wie neuerdings Hr. Ecker sprechen den Organen eine selbständige Röhre zu, was mir ebenso wenig empfehlenswerth erscheint, als man gewöhnt ist eine Muskel- oder Sehnenscheide als eine »Röhre« zu bezeichnen. Erdl führt auch ausdrücklich an, dass es nur mit grösster Mühe gelingt die sehr feine (!) Organscheide für eine grössere Strecke von der anliegenden Muskelscheide zu isoliren, was ich vollständig bestätigen kann. Der Eindruck der »Röhre« ist wohl nur durch die schlechtere Conservirung des Inhaltes entstanden, welcher in der That andernfalls (vergl. Fig. 2) der Scheide eng anliegt und somit selbstverständlich dieselbe Gestaltung wie diese zeigt. Dies ist sogar dort der Fall (z. B. im vorderen Ende des oberen medianen Organs), wo die geringer werdende Ausbildung des Inhaltes den verfügbaren Raum der Scheide in der Längsrichtung nicht mehr ausfüllt. Die dreieckige, frei in der Scheide gleichsam schwebend aufgehängte Organsubstanz in rundlicher Röhre, wie sie Erdl beschreibt, ist zweifelsohne bei seinem Material nur durch die theilweise Verflüssigung der Masse während der Conservirung hervorgerufen worden.

Fig. 2.
Horizontaler Längsschnitt des Schwanzes von *Gymnarchus niloticus*. Oberer Theil *Nat. Gr.* Die oberen medianen Organe längs durchschnitten.

Der Strang in der Scheide erscheint somit rundlich, wo die angrenzenden Muskeln von der Wucherung stärker aus ihrer Stelle gedrängt sind, ebenso wie die Figur der Scheide dreikantig, wo die Muskeln dem der Endigung zustrebenden Organ seinen Platz beschränken.

Die graulichweisse, durchscheinende Organsubstanz lässt am Querschnitt weitere Einzelheiten nicht erkennen, und man hat andere Schnittrichtungen zu Hülfe zu nehmen, um ihre Anordnung festzustellen; darunter erschien mir ein horizontal gelegter Längsschnitt am

Digitized by Google

belehrendsten (vergl. Fig. 2). Derselbe ergiebt, dass der rundliche Strang des Organs aus länglichen, an einander gereihten Gliedern besteht, deren Endflächen bei guter Conservirung und voll ausgebildetem Organ ziemlich eng an einander liegen, während durch Erweichungen und Schrumpfungen andernfalls auch zwischen den Endflächen sich grosse Lücken bilden. Wo die Ausbildung unvollständig ist, wie an den vorderen Enden der medianen Organe, füllt die Substanz des Gliedes den gegebenen Raum nicht mehr ganz und das Glied erscheint hohl, was von ERDL irrthümlicher Weise als die Regel angenommen wurde.

Der Längsdurchmesser überwiegt den Querdurchmesser, so dass die einzelnen Glieder längliche Cylinder oder Prismen mit stumpfen Kanten darstellen, doch ist die relative Länge derselben nach vorn zu grösser als gegen das Schwanzende; sie schwankt bei dem hier speciell in's Auge gefassten Exemplar etwa von 0.12—1.2^{cm}. Die Cylinder liegen nicht locker in ihrer Scheide, sondern in ihrem mittleren Theil verbindet sich die Substanz derselben mit dem einscheidenden Gewebe, so dass wohl entfernt von der Mitte abgeschnittene Theile derselben aus der Stelle fallen, nicht aber ganze Glieder. Diese Anheftung ist gegen die Innenseite stets besonders stark und breit, weniger nach Aussen, was in der weiter unten zu erörternden Zusammensetzung der Elemente seinen Grund hat; so regelmässig dreiseitig vertheilte Ligamente, wie sie ERDL beschreibt, konnte ich nicht finden.

Der Längschnitt lehrt ferner die wichtige Thatsache, dass die Gliederung der Organe eine deutliche Beziehung zur Gliederung der Wirbelsäule selbst hat, und zwar in der Weise, dass die Abgrenzungen der Cylinder etwa gleiche Lage mit den Abgrenzungen der *Ligamenta interspinalia* zeigen; daher sind auch die Organglieder länger, wo die Wirbel lang sind, kurz wo sich diese gleichfalls verkürzen. Ist die Entwickelung der Glieder unvollkommen, wie im vordersten Theil des oberen medianen Organs, so schliesst sich die Gliedsubstanz ebenfalls eng an die bezeichneten Ligamente an und zwar meist am hinteren Ende eines Wirbels.

Die in den Maassen getreu nach der Natur entworfene Fig. 2 könnte als Einwand gegen die soeben gemachte Angabe benützt werden, indem nämlich auf der rechten Seite des Fisches allerdings dieses Zusammentreffen der Gliederung von Organ und Wirbelsäule hervortritt, das entsprechende Organ der linken Seite aber andere Verhältnisse zeigt und längere Cylinder führt. Daraus darf indessen meiner Überzeugung nach nur geschlossen werden, dass die Gliederzahl im Organ nicht allein von der Wirbelzahl abhängig ist, sondern indirect durch zugehörige Elemente, wie Vertheilung der Gefässe und ihrer

Digitized by Google

fibrösen Scheiden beeinflusst wird, so dass die in solchen Systemen häufigen Unregelmässigkeiten die normale Anordnung der Organglieder stören können. Diese Unregelmässigkeiten der Anlage führen im Schwanzabschnitt solcher Fische auch zu sehr ungleichmässiger Ausbildung der in den Wirbelelementen auftretenden Knochenkerne selbst. Wenn solche Knochenplättchen der Wirbelfortsätze sich über ihr rechtmässiges Gebiet ausdehnen und die fibrösen Theile bis an diejenigen des nächsten Wirbels herandrängen, so scheint auch die Bildung eines abweichenden Gliedes im Organ zu erfolgen. Im abgebildeten Praeparat dürften mehrere der linksseitigen Organglieder auf solche Weise durch Verwachsung entstandene Doppelelemente darstellen.

Bei der erheblichen Länge des Fisches und der grossen Zahl seiner Wirbel, besonders in dem peitschenförmigen Schwanzabschnitt, ist die Zahl der hintereinander angeordneten Elemente doch nicht ganz unbeträchtlich; nach den Einzelzählungen wurde sie im vorliegenden Falle, alle acht Organe zusammengenommen, auf 440 jederseits berechnet; das längste derselben, das obere mediane dürfte 139 hintereinander enthalten. Solche Zahlen sind indessen doch im Vergleich mit den entsprechenden von Elementen anderer elektrischer Fische nur niedrig zu nennen. Die seiner Zeit von Erdl gefundenen Zahlen stimmen mehrfach mit den meinigen bemerkenswerth überein, nur sind jene im Allgemeinen etwas niedriger, was auf die geringere Ausbildung der Organe im Schwanzabschnitt bei Erdl's Exemplar zurückzuführen ist. Er fand 136 gegen 139 bei mir am oberen Mittelorgan, 96 gegen 111 am unteren Mittelorgan, 56 gegen 99 am ventralen 50 gegen 91 am dorsalen Organ, so dass die Gesammtsumme bei Erdl jederseits 340 beträgt.

Die gegeneinander gekehrten Endflächen der Organglieder sind nicht glatt, sondern erscheinen wellig, oder in Papillen verlängert, häufig auch nicht ganz quergestellt, sondern etwas geneigt. Sie nähern sich bei gut erhaltenem Material meistens bis auf einen geringen Zwischenraum, der mit einer nach Alkoholbehandlung weisslichen coagulirten Substanz ausgefüllt sein kann; oder dieselbe bedeckt die Flächen der Glieder selbst und haftet der untergelagerten Schicht fest an, so dass sie makroskopisch nicht davon zu trennen ist.

Die Hauptmasse der Glieder erscheint im vollentwickelten Organ solide, wie man an Fig. 2 sehen kann, enthält also die von Erdl angegebene ovale Höhle nicht. Bis hierher ist das Bild der Organisation in seinen Hauptzügen wohl mit Sicherheit zu zeichnen, aber in diesen Merkmalen findet sich noch unglaublich wenig, was auf elektrisches Gewebe deutet. Die Hoffnung liegt nahe mit Hülfe des Mikroskopes weitere Einsicht in die Natur und den Aufbau der

Digitized by Google

zusammensetzenden histologischen Elemente zu gewinnen, und es ist um so verlockender sich hier in das mikroskopische Studium zu vertiefen, als die bisher darüber gemachten Angaben so dürftig sind.

Dieser Mangel in unserer Literatur ist vielleicht nicht zum kleinsten Theil auf die ganz enormen Schwierigkeiten zurückzuführen, welche gerade die in Rede stehenden Organe der histologischen Untersuchung darbieten, und ich möchte das Nachstehende nur mit allem Vorbehalt späterer Berichtigungen geben, obgleich das mir zu Gebote stehende Material wahrscheinlich noch das am besten erhaltene ist.

Ein Blick in das Mikroskop lehrt, dass die Hauptmasse der Glieder aus einem schwammigen, bald mehr fibrillären, bald mehr netzförmigen Bindegewebe besteht, welches durch die im mittleren Theil sich sammelnden festeren, fibrösen Züge mit den benachbarten, gleichartigen Geweben direct zusammenhängt. Solche Züge richten sich besonders medianwärts gegen die Ligamente der *Processus spinosi* und nehmen zwischen sich zahlreiche und starke Gefässe sowie Nervenbündel auf, welche sich von den daselbst entlang ziehenden Stämmen abzweigen.

Von der ungefähren Mitte aus streben Gefässe und Nerven den Endflächen der Glieder zu, sich dabei wiederholentlich dichotomisch theilend und schon in diesem Theil des Verlaufs vielfach verschlungen; so treten die Verzweigungen in die Grenzschicht der Glieder über, welche wie ein Proteus in jedem Präparat, ja man möchte sagen an jeder Stelle ein anderes Bild giebt.

Auch Erdl hat erkannt, dass die Hauptmasse der Endschichten aus Schläuchen besteht, seiner Angabe nach aus langgestreckten Zellen zusammengesetzt, mit einem coagulirbaren, gelegentlich in Klümpchen geballtem Inhalt. Diese Beschreibung ist wesentlich richtig, doch lernen wir daraus offenbar noch sehr wenig. Dass da Schläuche gefunden werden, wo zahlreiche Gefässe ganze Bündel von Capillaren hineinsenden, ist selbstverständlich; dagegen ist es sehr schwer festzustellen, ob sich mit diesen Gefässschläuchen andere selbständige von specifischem Charakter verflechten? Welche Anordnung den letzteren im bejahenden Falle zukommt? Wie sich die Nerven zu diesen Systemen verhalten?

Die Grenzfläche des Gliedes zeigt sich im Mikroskop bedeckt mit einer coagulirten Masse von körniger Beschaffenheit, in der lymphoïde Körper hier und da eingebettet liegen. Diese Masse füllt in colloïdem Zustande beim Leben den Zwischenraum beider benachbarten Glieder vollständig aus.

Wo sich die Masse zufällig von der Unterlage etwas abgehoben hat, erkennt man zotten- oder papillenartig vorspringende Gefäss-

Digitized by Google

knäuel oder bogenförmig verlaufende Schlingen, die sich auf der Grenzschicht des Elementes erheben. Ebenso dringen aber aufgeknäuelte Schläuche hier und da in die Tiefe, bald als lockere Bündel, bald so dicht zusammengeballt, dass die Masse im Schnitt wie zellige Inseln zwischen dem Bindegewebe der Hauptsubstanz erscheint. In den Schläuchen feineren Calibers, die Erdl nicht unzutreffend etwa auf den dreifachen Durchmesser einer Nervenprimitivfaser angiebt, findet sich ein fadenförmiges Coagulum hier und da mit einem einlagernden Kern oder lymphoïden Körperchen, so dass daraus beinahe das Bild einer Nervenfaser mit aufgehelltem Mark und Axencylinder entsteht. Die Substanz dieses fadenförmigen Coagulums in den engen Schläuchen zeigt optisch einen ganz ähnlichen Charakter wie die auf der Grenzschicht lagernde coagulirte Masse und stellenweise lässt sich diese continuirlich in verzweigten Strängen gegen die Tiefe des Gewebes verfolgen, dort umgeben von den empordrängenden Capillarschlingen.

Zwei Möglichkeiten sind es also, auf die es hauptsächlich ankommen würde, um die Bedeutung dieses Gewebes richtig zu erfassen: Entweder, dasselbe stellt ein System capillarer Wundernetze dar, in deren Schlingen sich beim Absterben des Thieres durch Stauung Coagula bilden, ähnlich der colloïden Masse zwischen den freien Endgliedern — oder diese Endschichten sind gebildet von einem System selbständiger, in wechselnder Weise aufgeknäuelter Schläuche, welche sich zwischen den Capillarschlingen in die Tiefe des Stützgewebes vorschieben, an den freien Flächen aber von der colloïden Substanz umhüllt werden. Von diesen beiden Möglichkeiten, über die ich eine Entscheidung zur Zeit ablehne, spricht der Augenschein mehr für die letztere, die theoretische Betrachtung für die erstere.

Aber nun der Verbleib der Nerven! Leicht ist an jedem Querschnitt des Schwanzabschnittes zu constatiren, dass sich in der Umgebung der Wirbelsäule eine bemerkenswerth grosse Menge von markhaltigen Nervenbündeln findet; viel grösser als der immer dürftiger werdenden Musculatur des Schwanzes zu entsprechen scheint. Von diesen Bündeln zweigen sich hier und da noch markhaltige Fasern ab und dringen mit den Gefässen in das Innere der Organglieder ein; in der Nachbarschaft von solchen lassen sie sich hier und da auch bis gegen die Endschichten verfolgen. Dann aber in dem beschriebenen Chaos verschlungener Schläuche mit Erfolg nach Endigungen marklos gewordener Nervenfasern zu suchen, geht über menschliches Vermögen hinaus.

Es bliebe noch die Erforschung des centralen Ursprungs der Nerven, wodurch weitere Einsicht in die Natur der ganzen Organ-

Digitized by Google

anlage gewonnen werden könnte. Schon ERDL hat diesen Weg angebahnt und auf die merkwürdige Bildung des auffallend grossen Gehirnes hingewiesen, welches er sonderbarerweise mit dem Mormyrusgehirn vergleicht; seine positive Beschreibung des Baues ist nicht recht verständlich; mir selbst fehlt geeignetes Material für die Nachuntersuchung dieses Theiles.

Dagegen habe ich dem Bau des Rückenmarkes meine Aufmerksamkeit zugewendet und dabei eine weitere Bestätigung meiner Angabe gefunden, dass ungewöhnlich entwickelte Gehirntheile mit unvollkommen entwickeltem Rückenmark einherzugehen pflegen, wie es das Nervensystem des *Mormyrus* in auffallender Weise zeigt. Beim *Gymnarchus* ist in der That die *Medulla spinalis* fast gänzlich aus Markfasern gebildet, so dass der Centralcanal von weisser Substanz umgeben ist. Die graue Substanz wird durch die verloren zwischen den Markfasern eingelagerten schmalen Hinterhörner und schwache Züge grauer Fasern, die den Centralcanal an seinem hinteren Umfang erreichen, sowie zwei den Vorderhörnern entsprechende, nicht überall deutliche Neuroglia-Inseln gebildet, die fast ganz isolirt lagern. Ganglienzellen zeigen nur die wenigsten der Querschnitte von üblicher Dicke; in zwölf Schnitten zählte ich nicht mehr als vier, doch waren drei davon ziemlich gross. Dies ist das Verhältniss im hinteren Theil des Rückenmarkes, der vordere war zu wenig durch den Alkohol conservirt, um ihn mikroskopisch untersuchen zu können.

Was sollen wir bei dem jetzigen Stande unserer Kenntniss der Anatomie des *Gymnarchus* über die Natur seiner Organe denken?

Zunächst lässt sich wohl nicht leugnen, dass die Auffassung derselben als elektrische durch die genauere Untersuchung eine geringe Unterstützung erfahren hat. Die Vergleichungspunkte mit zuverlässigen elektrischen Organen fallen fast durchgängig negativ aus. Zwar zeigen sie auch beim *Gymnarchus* in der Längsrichtung angeordnete Glieder, aber dieselben sind grob, nicht plattenförmig, von geringer Zahl; es fehlt die regelmässige Wiederkehr bestimmter Schichten nach der nämlichen Richtung hin, da die beiden einander zugekehrten Endflächen der Glieder einen ähnlichen Charakter zeigen. Allerdings scheint die Schicht der geknäuelten Schläuche auf der nach dem Kopf zugewendeten Seite der Glieder gewöhnlich mächtiger zu sein. Es ist keine besondere Endausbreitung der Nerven, kein specifisches Centralorgan constatirt, nur die Gehirngrösse und der Reichthum an Nerven im Organ kann die Vermuthung einer höheren Leistung erwecken. ERDL's Hinweis auf das verwandte Vorkommen von Schläuchen mit coagulirtem Inhalt bei Torpedo ist offenbar eine Verlegenheitsangabe,

Digitized by Google

da solche Elemente notorisch beim Zitterrochen Nichts mit den elektrischen Organen zu thun haben; wahrscheinlich hat er auch dort Capillaren vor sich gehabt.

Ferner ist als ein sehr wichtiges Moment gegen die elektrische Natur der Gymnarchus-Organe anzuführen, dass kein archiblastisches Gewebe in dem Umbildungsprocess nachweislich zu denselben verwandt wurde, sondern sich dieselben, abgesehen von den hinzutretenden Nerven, lediglich aus parablastischen Elementen aufzubauen scheinen. Die reihenweise Anordnung beweglich werdender kleinster Theilchen, die in bestimmter Richtung Entladungen ermöglichen könnten, ist hier durch die mikroskopische Untersuchung fast als Unmöglichkeit dargethan.

Wäre das System der Schläuche, wenn auch aufgeknäuelt und verworren, wenigstens nur auf einer Seite des Gliedes ausschliesslich, so könnte man eine Vergleichung mit den Bogengängen der Mormyrusplatte aufstellen; auch dann würde aber das der umgewandelten Muskelsubstanz zuzusprechende maeandrisch gezeichnete Glied fehlen.

Wenn nun die Gymnarchus-Organe nicht elektrische Entladungen hervorrufen könnten, was möchten sie sonst wohl bedeuten?

Obgleich die Untersuchung des anatomischen Baues die Annahme elektrischer Wirkungen hier mindestens sehr gewagt erscheinen lässt, so ist damit nicht gesagt, dass der eigenthümliche Umwandlungsprocess der Gewebe durch Quellung und Gliederung nicht in dieselbe Kategorie gehört als die Entwickelung elektrischer Organe. Er hat sich bei Gymnarchus bisher nur auf solche Gewebe beschränkt, welche, so viel wir wissen, nicht zur Bildung vollkommen elektrischer Organe führen kann und es muss dem Gymnarchus daher eine besonders niedrige Stufe in der Entwickelungsreihe elektrischer Fische angewiesen werden.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich darauf hinweisen, wie ich bereits früher beschrieb,[1] dass unser mächtigster Elektriker, der Gymnotus, neben der unter Verlust von Muskelsubstanz entstandenen Bildung von wirklichem elektrischen Gewebe auch Wucherungen bindegewebiger Massen erkennen lässt, welche sich der allgemeinen Gliederung des Körpers in Muskelabschnitte entsprechend ebenfalls gliedern, histologisch aber der Grundsubstanz in den Gymnarchus-Elementen keineswegs unähnlich ist. Sie nähert sich durch Einlagerung zahlreicher, in rundlichen Räumen lagernder Zellen nur mehr dem Faser-

[1] Dr. Carl Sachs' Untersuchungen am Zitteraal, bearbeitet von E. du Bois-Reymond u. s. w. Leipzig 1881. S. 377.

Digitized by Google

knorpel, enthält aber in der Umgebung auch häufig Gefässgeflechte; beim Gymnotus ist der Umbildungsprocess also besonders allgemein gewesen.

Es möchte schliesslich noch die Frage aufgeworfen werden, ob der Gymnarchus, wenn er schon keine elektrische Entladungen produciren könne, sonst einen Nutzen von seinen Organen haben dürfte? Leider ist die Lebensweise des Fisches so gut wie gänzlich unbekannt, sonst würde es vielleicht nicht so gar schwer fallen, eine Antwort darauf zu geben. Die schlangenförmige Gestalt des Fisches mit dem stark beschuppten kahlen Bauch und dem peitschenförmigen Schwanz sollte ihm die Bewegung nach Art einer Schlange leichter machen als dem Aal; bei den ungemein wechselnden Bewässerungsverhältnissen seiner Heimath ist es nicht unwahrscheinlich, dass der Gymnarchus auch gelegentlich von diesem Vortheil seines Baues Gebrauch macht, um den Aufenthalt zu wechseln. Wie wir sonst an Thieren, die durch Tauchen zeitweise die Athmung unterbrechen, Wundernetze in verschiedenen Theilen des Körpers finden, so könnte sich auch bei ihm das System der Wundernetze in den Organen nützlich machen. Es kommt hinzu, dass der Gymnarchus auch ein eigenthümliches Organ hat, welches ERDL direct glaubte als Lunge ansprechen zu müssen, wenn er auch nicht die entsprechende Gefässanordnung nachweisen konnte. Hierin liegen also sicherlich noch Geheimnisse verborgen, deren Enthüllung der Zukunft vorbehalten bleibt, und müssen wir uns derzeit mit Vermuthungen begnügen.

Was mir nun hinsichtlich der anatomischen Untersuchung des Gymnarchus augenblicklich am wünschenswerthesten erscheint und empfohlen werden sollte, ist die capillare Injection der Gefässe am frischen Thier, um die Verbreitung der Gefässe in den Endscheiben mit Sicherheit verfolgen zu können, und eine sorgfältige Behandlung frischen Materiales mit Gold, um die Nerven in dem Wirrsal anderen Gewebes deutlich zu machen.

Der Gymnarchus wird wahrscheinlich mit Unrecht zu den wirklich entladenden elektrischen Fischen gezählt, da seine Organe histologisch noch niedriger als die des *Genus Raja* gebildet sind.

Digitized by Google

Digitized by Google

11. Uber die von Hrn. Fritts in New York entdeckte elektromotorische Wirkung des beleuchteten Selens.

Von Werner Siemens.

(Vorgetragen am 12. Februar: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VIII]; — ausgegeben am 19. Februar.)

Hr. Ch. Fritts in New York hat mir im Laufe des vorigen Sommers eine Beschreibung seiner, von der meinigen in wesentlichen Punkten abweichenden, Darstellungsmethode lichtempfindlicher Selenplatten geschickt und dieser Sendung einige von ihm hergestellte Platten beigefügt. Dieselben bestehen nicht wie die meinigen[1] aus parallelen Platinadrähten, die in einer dünnen Selenschicht eingebettet sind, sondern aus einer dünnen homogenen Selenschicht, welche auf ein Metallblech aufgetragen und nach erfolgter Erhitzung — zur Umwandlung des amorphen Selens in krystallinisches — mit einem feinen Goldblatt überzogen wird. Hr. Fritts hat gefunden, dass das durch das Goldblatt hindurchgehende grüne Licht beim weiteren Durchgange durch das Selen dessen elektrische Leitungsfähigkeit erhöht. In der That steigert sich die Leitungsfähigkeit der Selenplatte zwischen dem Goldblatt und der metallischen Grundplatte durch Beleuchtung des Goldblattes mit senkrecht auffallendem directem Sonnenlichte bei einigen der übersandten Praeparate auf das 20 bis 200fache! Auch bei Beleuchtung durch diffuses Tageslicht ist die Lichtwirkung bei den Fritts'schen Präparaten grösser wie bei den meinigen. Eine der mir übersandten Platten zeigte gar keine Lichtempfindlichkeit, hat aber dafür eine andere, höchst merkwürdige Eigenschaft, nämlich die, dass ein zwischen dem Goldblatte und der Grundplatte eingeschaltetes Galvanometer einen elektrischen Strom von der Richtung der Lichtbewegung durch das Selen anzeigt, so lange das Goldblatt beleuchtet wird. Ich vermuthete anfangs, dass dieser Strom kein dauernder wäre, sondern den Charakter eines Polarisationsstromes hätte, der nur so lange anhielt, bis die moleculare Modification des Selens durch die Beleuchtung vollendet wäre und ein erster Versuch schien für diese Annahme zu sprechen. Neuere eingehendere Versuche haben mich aber überzeugt, dass diese Vermuthung eine irrige war. Wir haben es hier in der That mit einer ganz neuen physikalischen Erscheinung zu thun,

[1] Monatsbericht der Berl. Akad. d. W. vom 13. Mai 1875 und 7. Juni 1877.

Digitized by Google

die von grösster wissenschaftlicher Tragweite ist! Meine Versuche haben ergeben, dass bei der Beleuchtung des Goldblattes zwischen ihm und der Bodenplatte eine Potentialdifferenz entsteht, welche allem Anschein nach proportional der Lichtstärke ist und die so lange unverändert fortbesteht, wie die Beleuchtung dauert. Dunkele Wärmestrahlen wirken nicht elektromotorisch, es ist daher die Annahme einer thermoelektrischen Wirkung zur Erklärung der Erscheinung ausgeschlossen. Hr. FRITTS nimmt an, dass die in das Selen eindringenden Lichtwellen direct in elektrischen Strom umgewandelt werden, und dafür spricht in der That die Proportionalität der Stromstärke mit der Lichtstärke. Diese ergab sich annähernd durch die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Versuche

Lichtstärke in Normalkerzen	6.4	9.9	12.8	16.8
Stromstärke	18	30	40	48
Quotient	2.8	3	3.1	2.8

Die Lichtstärke wurde mit einem BUNSEN'schen Photometer gemessen, die Stromstärke durch die Ablenkung eines empfindlichen Spiegelgalvanometers.

Als das Goldblatt der Beleuchtung durch die südöstliche Seite des wolkenlosen Himmelsgewölbes ausgesetzt wurde, während die Sonne selbst durch benachbarte hohe Gebäude verdeckt war, ergaben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Messungen.

Beobachtungszeit:	$9^h 37^m$	$10^h 5^m$	$10^h 30^m$	11^h	$11^h 35^m$	12^h	$12^h 30^m$	1^h	$1^h 30^m$	2^h	$2^h 30^m$	3^h	$3^h 30^m$	4^h
Ablenkung des Galvanometers:	190	196	209	223	250	250	244	245	249	228	188	173	172	108

Es ergiebt sich aus denselben, dass die elektromotorische Kraft der Selenplatte von Morgens 9 Uhr 30^m bis Mittags 11 Uhr 35^m ziemlich gleichmässig zunahm, dann während zwei Stunden mit einigen Schwankungen constant blieb und darauf wieder ziemlich gleichmässig bis 3 Uhr abnahm.

Über den Grund, warum einige seiner Selenplatten durch Beleuchtung besser leitend werden, andere dagegen elektromotorisch wirken, weiss Hr. FRITTS sich keine Rechenschaft zu geben. Er klagt über die Unsicherheit der Herstellung der Platten, deren Eigenschaften man gar nicht voraussehen könnte, und giebt verschiedene Manipulationen an, durch welche man oft unwirksame Platten brauchbar machen könne. Es wird also noch gründlicher Untersuchungen bedürfen, um festzustellen, worauf die elektromotorische Lichtwirkung mancher Selenplatten beruht. Trotzdem ist schon das Vorhandensein einer einzigen Selenplatte mit der beschriebenen Eigenschaft eine Thatsache von grösster wissenschaftlicher Bedeutung, da uns hier zum ersten Male die directe Umwandlung der Energie des Lichtes in elektrische Energie entgegentritt.

Digitized by Google

12. Über das Verhältniss der Spongien zu den Choanoflagellaten.

Von Franz Eilhard Schulze.

(Vorgetragen am 19. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. X]; — ausgegeben am 26. Februar.)

Nachdem Dujardin, Carter und Lieberkühn die Übereinstimmung gewisser Zellen des Spongienkörpers mit Amöben nachgewiesen hatten, rechnete man die Spongien lange Zeit zu den Protozoen. Dagegen haben neuere Untersuchungen zu der Überzeugung geführt, dass sie nicht aus Colonien gleichartiger Einzelwesen, sondern aus differenten Geweben bestehen, sich auf geschlechtlichem Wege fortpflanzen und aus mindestens zwei Keimblättern aufbauen — demnach zu den Metazoen gehören.

Da jedoch auch jetzt noch einzelne Forscher fortfahren, eifrig für die Protozoennatur der Spongien einzutreten, so wird es nothwendig, die von ihnen vorgebrachten Gründe zu prüfen.

Mit besonderem Nachdruck ist in den letzten Jahren durch Carter und Saville Kent die zuerst im Jahre 1866 von James Clark[1] aufgestellte Behauptung vertheidigt, dass die mit einer Geissel und einem hyalinen membranösen Ringkragen versehenen, sogenannten Kragenzellen der Spongien nicht als Epithelzellen, sondern als flagellate Infusorien, und demnach die ganzen Spongien als Flagellaten-Colonien aufzufassen seien. Wie etwa bei einer Ophrydium-Colonie sämmtliche Einzelthiere in einer gemeinsamen Gallertmasse oberflächlich eingebettet neben einander sitzen, so sollen auch bei den Spongien die *spongozoa* — wie Carter die Kragenzellen jener Auffassung entsprechend nennt — als selbstständige Wesen colonienweise einer gemeinsamen Grundlage aufsitzen.

Es ist nicht zu leugnen, dass eine grosse Ähnlichkeit zwischen den Kragenzellen der Spongien und jenen theils einzeln theils in Colonien vorkommenden flagellaten Infusorien besteht, welche von Saville Kent als *Choanoflagellata*, von Bütschli als *Calicomastiges* be-

[1] Proceedings of the Boston soc. of nat. hist. 1866; und Memoirs of the Boston soc. of nat. hist. 1868. Vol. I; sowie Annals and magazine of nat. hist. 1868. 4 ser. Vol. I.

Digitized by Google

zeichnet sind. Diese Ähnlichkeit ist um so auffallender, als wir sonst im ganzen Thierreiche derartige Bildungen nicht wieder antreffen. In beiden Fällen handelt es sich um einen cylindrischen oder rundlichen Plasmakörper mit eingelagerten Körnchen und einem wohlentwickelten Kerne. Von der Mitte der etwas vorgewölbten freien Endfläche entspringt eine Geissel, und von dem äusseren kreisförmigen Rande ragt das sogenannte collare, eine überaus zarte und glashelle Ringmembran, frei hervor, welche in der Regel die Gestalt eines Cylindermantels zeigt, jedoch auch zu gewissen Formveränderungen befähigt ist. Bald kann man nämlich eine Verkürzung, bald eine trichterförmige Erweiterung oder eine Verengerung der Röhre nach aussen zu, bald eine bauchige Auftreibung beobachten. Auch jene kleinen wasserhellen Vacuolen, welche bei den Choanoflagellaten im basalen Theile regelmässig vorkommen und rhythmische Pulsationen ausführen, sind von einigen Forschern, wie James Clark, Carter und Saville Kent für die Kragenzellen der Spongien als beständige und charakteristische Bildungen in Anspruch genommen, doch habe ich sie daselbst keineswegs regelmässig angetroffen. Körnige Pigmentmassen, wie sie in den Kragenzellen von *Spongelia, Oscarella* und anderen Spongien oft reichlich vorkommen, wurden in Choanoflagellaten bisher nicht beobachtet.

Wenn nun auch diese und andere Differenzen jener auffälligen Übereinstimmung gegenüber geringfügig erscheinen, welche sich in dem eigenartigen collare ausspricht, so ist es doch einleuchtend, dass eine auch noch so weitgehende Ähnlichkeit zwischen gewissen einzelligen Protozoen und einzelnen Zellen der (aus drei verschiedenen Gewebslagen bestehenden) Spongien allein noch keineswegs zu dem Ergebniss führt, dass die Spongien zu den Protozoen gehören. Die Unhaltbarkeit eines solchen Schlusses wird (wie auch jüngst von Lendenfeld[1] hervorhob) noch ersichtlicher, wenn man denselben auch auf andere Thiergruppen anwenden, und etwa die *Cnidaria* deshalb zu den Protozoen stellen wollte, weil ihr Gastrovasculärsystem mit Geisselzellen ausgekleidet ist, welche gewissen Flagellaten gleichen.

Saville Kent[2] scheint selbst die Unzulänglichkeit eines derartigen Verfahrens empfunden zu haben, da er sich bemüht hat, neben den von James Clark angeführten Gründen noch andere und zwar beweiskräftigere für die Richtigkeit seiner Auffassung vorzubringen. Zu diesem Zweck hat er zunächst die Larven einiger Spongien, wie *Oscarella* (*Halisarca*) *lobularis, Grantia compressa, Leucosolenia botryoides*

[1] Proceedings of the Linnean Soc. of New South Wales Vol. IX, 2 p. 329.

[2] Notes of the embryology of sponges. Annals and magazine of nat. hist. 1878. 5 Ser. Vol. II, p. 139 und A manual of the infusoria. 1880—1881.

Digitized by Google

und *Halichondria spec.* sowohl im ausgebildeten Zustande als während ihrer Entwickelung studirt, und ist zu dem überraschenden Resultate gelangt, dass diese Gebilde keineswegs den ersten Entwickelungsstadien von Metazoen entsprechen, sondern Colonien von Choanoflagellaten seien. Er schliesst dies sowohl aus ihrem anatomischen Baue, als auch aus der Art ihrer Bildung. Eine reife »swarm-gemmule« (so nennt er die frei schwimmenden Spongienlarven) der *Grantia compressa* stellt nach Saville Kent eine längliche Blase dar, deren Wand aus einer einfachen Lage radiär gestellter cylindrischer Zellen besteht. Jede dieser Zellen soll an ihrem äusseren Ende ein randständiges collare und eine centrale Geissel tragen, also durchaus den gewöhnlichen Kragenzellen gleichen, welche die Radialtuben dieses Kalkschwammes in einschichtiger Lage auskleiden. Bei noch nicht völlig ausgereiften eiförmigen swarm-gemmules desselben Schwammes sollen die langen cylindrischen Zellen zwar schon die Geissel, jedoch noch nicht das collare besitzen und mit ihren verjüngten inneren Enden in der Mitte zusammenstossen. In einem der *Ascandra pinus* Haeckel nahe stehenden Kalkschwamme fand Saville Kent einst eine eiförmige Larve, deren schmalere Vorderhälfte aus einfachen Geisselzellen ohne collare, deren breitere hintere Hälfte dagegen aus weiter vorragenden Kragenzellen bestand. Er deutet die letzteren als vollständig entwickelte, die des collare entbehrenden Geisselzellen des Vorderendes dagegen als noch nicht ganz ausgebildete Einzelthiere, und glaubt damit auch den Schlüssel für das Verständniss jener oft beschriebenen eiförmigen *Sycandra*-Larve gefunden zu haben, deren Vordertheil aus einfachen cylindrischen Geisselzellen ohne collare, deren Hintertheil dagegen aus breiten, etwas vorgewölbten dunkelkörnigen Zellen ohne irgend welchen Anhang besteht. Hier sollen nämlich die dunkelkörnigen Zellen des Hinterendes gegen die vorderen Geisselzellen so weit in der Entwickelung vorausgeeilt sein, dass sie ein früher vorhandenes collare sammt ihrer Geissel schon wieder eingezogen hätten und sich bereits zur Umwandlung in amöboide Zellen des späteren Schwammsyncytiums anschickten.

Es ist bemerkenswerth, dass ausser Kent keiner von allen jenen Forschern, welche sich mit der Entwickelungsgeschichte der Spongien und speciell der Kalkschwämme beschäftigt, und gerade den Bau der Schwärmlarven eingehend studirt haben, wie O. Schmidt, Carter, Metschnikoff, Barrois, Keller und Andere das nach Kent's Abbildungen doch kaum zu übersehende collare an den cylindrischen Geisselzellen der Larven wahrgenommen haben. Denn jene hyaline und stärker lichtbrechende Randpartie, welche Barrois in Fig. 29 Taf. 15 seines Aufsatzes an einigen isolirten Geisselzellen dargestellt hat, und

Digitized by Google

welche ich ebenfalls in zahlreichen Schwärmlarven wahrgenommen habe, ist nichts als der durchaus solide körnchenfreie Endtheil der betreffenden Zellen, an dessen leicht vorgewölbter freier Oberfläche die zarte Geissel entspringt.

Ich selbst habe mich bei meinen Untersuchungen der Schwärmlarven von *Sycandra raphanus,* welche schwerlich in der Larvenbildung von *Sycandra compressa* wesentlich abweichen dürfte, und zahlreicher anderer Spongienlarven stets vergeblich bemüht, etwas dem collare Ähnliches am freien Ende der cylindrischen Geisselzellen zu entdecken. Wenn ich nun aber die Abbildungen, welche Saville Kent von seinen »swarm-gemmules« giebt, mit den Bildern vergleiche, welche man beim Zerzupfen lebender *Sycandra* unter dem Mikroskope erhält, so kann ich mich der Vermuthung nicht erwehren, dass das, was Saville Kent als eine vollständig ausgereifte swarm-gemmule bezeichnet und zuletzt in seinem Manual of the Infusoria Taf. IX, Fig. 25 abgebildet hat, nichts Anderes ist, als eine abgelöste Partie des einschichtigen Kragenzellenlagers, welche sich so eingerollt hat, dass die Basalenden nach innen, das collare aber nach aussen gekehrt wurden. Derartige Trugbilder kommen beim Zerzupfen lebender *Sycandra* in Seewasser häufig zur Beobachtung. Nicht selten rollt sich sogar eine abgelöste Zellenplatte so vollständig ein, dass sie selbst beim Rotiren wie eine geschlossene Blase erscheint, während es in der Regel allerdings nur zu solchen mehr unregelmässigen Bildungen kommt, wie sie von Saville Kent in Fig. 17 Taf. VI seines Aufsatzes On the embryology of sponges in den Annals and mag. of nat. hist. Ser. V Vol. II. abgebildet sind.

Auch kann sich wohl gelegentlich einmal eine halbkugelig eingerollte Zellenlage an das Hinterende einer der gewöhnlich zahlreich vorhandenen eiförmigen Larven in der Weise anschmiegen, dass die von Saville Kent abgebildete (a. a. O. Taf. VI Fig. 16 und Manual of the Infusoria Taf. IX Fig. 26) Form entsteht, deren Hinterende mit Kragenzellen bedeckt erscheint.

Kann ich nun einerseits eine Zusammensetzung der von Saville Kent als swarm-gemmules bezeichneten Körper aus Kragenzellen, welche Choanoflagellaten gleichen, nach meinen Erfahrungen nicht annehmen, so muss ich andererseits behaupten, dass selbst dann, wenn ihr Bau wirklich der Art wäre, wie Saville Kent angiebt, dadurch ihre Natur als Flagellatencolonien noch keineswegs erwiesen wäre. Vielmehr müssten sie auch dann noch ebenso wie jetzt als wahre Spongienlarven angesehen und bezeichnet werden, weil sie durch Furchung aus einem befruchteten Spongienei hervorgegangen sind und sich später in ähnlicher Weise wie die notorischen Larven

Digitized by Google

anderer Thiere, etwa der Hydroiden, zu ausgebildeten Metazoen umwandeln. Freilich will Saville Kent weder den einen noch den andern dieser beiden Gründe als zutreffend anerkennen. Er bemüht sich vielmehr, beide zu widerlegen und nachzuweisen, dass der ganze Vorgang, welchen man bisher allgemein als Eifurchung, Larvenbildung und Metamorphose angesehen hat, nichts Anderes sei, als ein ungeschlechtlicher Vermehrungsact, und genau denjenigen Vorgängen entspreche, welche man bei verschiedenen Flagellaten kennen gelernt hat. Zu diesem Zweck sucht er zunächst die Übereinstimmung des bei zahlreichen Spongien beobachteten Furchungsactes des Eies mit jener Theilung eines einfachen Flagellatenthieres nachzuweisen, welche zur Bildung einer grösseren Anzahl gleichwerthiger Individuen, resp. zur Bildung einer Colonie führt; indem er sich auf die Darstellungen beruft, welche Ehrenberg, Perty und Schneider von der Vermehrung der *Polytoma uvella*, Dollinger und Drysdale von der Theilung einer Monadine, *Heteromita uncinata*, Haeckel von dem Zeugungskreise seiner *Magosphaera planula* gegeben haben, und ausserdem die Ergebnisse eigener Beobachtungen über die Vermehrung einer von ihm neu entdeckten Choanoflagellate, *Salpingoeca fusiformis*, mittheilt. Bei diesem letzteren Wesen konnte er wahrnehmen, dass sich ein typisch gebildetes Einzelthier innerhalb seines vasenförmigen Gehäuses nach Einziehung des collare und der Geissel zunächst in einen amöbenähnlichen Körper verwandelte. Nachdem dieser einen Ruhezustand in Kugelform durchgemacht hatte, erfuhr er eine regelmässige Theilung, deren Endproducte als geisseltragende Schwärmer die Kapsel verliessen. Aus jedem Schwärmer ging wieder eine *Salpingoeca fusiformis* hervor.

Indem nun Saville Kent diesen Vorgang in Parallele stellte mit der Eibildung, Furchung, Larvenentwickelung und Metamorphose der Spongien, fasste er die letztere folgendermaassen auf. Aus einer einfachen Kragenzelle entsteht eine amöboider Bewegung fähige Zelle. Dieselbe erfährt unter fortgesetzter Zweitheilung eine ganz ähnliche Zerklüftung wie *Salpingoeca fusiformis*; und das Endproduct ist hier wie dort eine grössere Anzahl von Zellen, welche zunächst nur eine Geissel haben, später aber auch noch ein collare erhalten und so zu Kragenzellen werden; sei es, dass sie zusammen eine freie Schwärmlarve (swarm-gemmule) oder das Kragenzellenlager einer Geisselkammer ausmachen.

Als einen wesentlichen Unterschied stellte Saville Kent damals nur noch den Umstand hin, dass bei den Spongien die durch Theilung entstandenen Einzelthiere in einer Colonie (und zwar entweder als »swarm-gemmule« oder als Auskleidung einer Kammer) vereint bleiben und (bei der swarm-gemmule nach dem Festsetzen) eine

Digitized by Google

gallertige Grundlage produciren, welcher sie dann in continuirlichem Lager oder doch gruppenweise aufsitzen; während die Choanoflagellaten eine solche gemeinsame gallertige Stützsubstanz nicht besitzen.

Doch auch diese Differenz glaubte Saville Kent beseitigt, als es ihm gelungen war, eine Choanoflagellatenform zu entdecken und in ihrer Entwickelung zu studiren, welche im ausgebildeten Zustande eine festsitzende Colonie darstellt und eine gelatinöse hyaline Substanz abscheidet, in welcher sämmtliche Einzelthiere theils in typischer Ausbildung, theils in verschiedenen Entwickelungs- und Umbildungsstadien eingebettet sind.

Leichter als bei irgend einer anderen Choanoflagellate soll sich gerade hier die Verwandlung der mit Geissel und collare versehenen Einzelthiere in unregelmässige amöboide Zellen beobachten lassen, aus welchen sich dann durch fortgesetzte Theilung je ein Sporenhaufen entwickelt. Die Sporen aber wandeln sich nach Saville Kent's Ansicht durch ein nur mit Geissel versehenes Stadium in die charakteristischen Kragenzellen um, die wiederum durch Theilung und Ausscheidung gallertiger Grundsubstanz zur Entstehung neuer Colonien führen. Saville Kent nennt diese neu entdeckte Choanoflagellate *Protospongia Haeckelii* und weist wiederholt auf ihre grosse Übereinstimmung mit den Spongien hin. Es bedürfe, so meint er, nur einer geringfügigen Modification in der Stellung der Zooide, welche nesterweise in Einstülpungen des gallertigen »Zoocytium« hineinzurücken hätten, um eine, wenn auch höchst einfache Spongie herzustellen. Ferner betont er, dass auch in histiologischer Beziehung kein wesentlicher Unterschied zwischen seiner *Protospongia* und einer skeletlosen Spongie bestehe, indem nicht nur die Einzelthiere der Choanoflagellaten den Kragenzellen der Spongien gleichen, sondern auch die gelatinöse Substanz, welche als gemeinsame Einbettungsmasse der *Protospongia*-Colonie dient, mit jener Gewebsmasse übereinstimme, welche als Grundlage und Stützgerüst für die Epithellagen des Spongienkörpers fungirt.

Nun ist bekanntlich dieses Grundgewebe der Spongien, in welchem allein die Skelettheile zur Ausbildung kommen, in sehr verschiedenem Sinne gedeutet worden. Von Oscar Schmidt als Sarkode, von Haeckel als Syncytium bezeichnet, wurde dasselbe von beiden so aufgefasst, als ob ihre syaline, hier und da Körnchen führende Grundsubstanz durch Verschmelzen der Protoplasmakörper nebeneinander liegender Zellen entstanden, selbst contractil sei. Von den Zellen sollten sich als selbständig nur die Kerne erhalten.

Dieser Anschauung gegenüber habe ich in einer Reihe von Monographien über einzelne Familien, Gattungen und Arten von Spongien,

Digitized by Google

welche ich lebend untersuchen konnte, nachgewiesen, dass es sich nicht um ein derartiges Syncytium, sondern um eine wahre Bindesubstanz handelt. Ich habe geltend gemacht, dass in dem betreffenden Gewebe wohl individualisirte, mehr oder minder deutlich abgegrenzte Zellen mit Kern und Plasmakörper zu erkennen sind, welche in einer bald gallertigen, bald derben, zuweilen selbst knorpelharten (Corticium) Grundsubstanz liegen. Von diesen Zellen sind einige freibeweglich, andere fixirt. Die ersteren können mittelst amöboider Bewegungen als »kriechende Zellen« ihren Ort wechseln, während die fixen bald unregelmässig sternförmig, bald spindel- oder selbst faserförmig gestaltet, in manchen Fällen zu ausgiebigen Contractionen befähigt, zuweilen sogar in Bau und Function glatten Muskelfasern ähnlich werden können. Der Grundsubstanz als solcher aber kommt keine Contractilität zu. Sie ist eben nicht eine Sarkode oder verschmolzenes Zellenprotoplasma, sondern eine von den Zellkörpern verschiedene Zwischensubstanz, etwa ähnlich derjenigen des gallertigen Bindegewebes. Dieser meiner Auffassungsweise haben sich denn auch in der letzten Zeit die meisten Spongiologen angeschlossen.

Saville Kent berichtet nun von der gallertigen Grundlage seiner *Protospongia Haeckelii*, dass sie, zunächst ganz structurlos, durch Einwandern amöboider Einzelthiere von der Oberfläche aus in ein Gewebe umgewandelt werde, welches demjenigen der Spongien völlig gleiche.

Dagegen muss ich jedoch bemerken, dass hier durch die Einwanderung der amöboiden Zellen nicht ein Gewebe hergestellt wird, wie wir es in der Regel bei den Spongien antreffen. Es bilden sich eben keine fixen Bindesubstanzzellen aus. Vielmehr scheinen die eingewanderten Elemente nach Kent's eigener Darstellung ausschliesslich zu einer Vermehrung durch Theilung oder zur Sporenbildung bestimmt.

Während bei den Spongien ausser den wahrscheinlich zur Bildung der Geschlechtsproducte dienenden amöboiden Wanderzellen noch stets zahlreiche Zellen vorkommen, welche theils als fixe Bindegewebskörperchen, theils als contractile Faserzellen, theils als Drüsenzellen, theils gar (wie v. Lendenfeld jüngst im zoologischen Anzeiger Nr. 186 vorläufig mittheilte) als Sinnes- und Ganglienzellen zu verschiedenen Leistungen auch besondere Ausbildung erhalten haben.

Als eine histiologische Differenz von Bedeutung ist ferner der Umstand hervorzuheben, dass, wie ich zuerst nachgewiesen habe, die gesammte vom Wasser bespülte Oberfläche der Bindesubstanz des Spongienkörpers, soweit sie nicht von den Kragenzellen eingenommen

Digitized by Google

wird, gedeckt ist von einem einschichtigen Lager platter Epithelzellen, welche entweder eine glatte Aussenfläche besitzen, oder je eine Geissel tragen. Eine derartige Bekleidung mit Plattenzellen fehlt bei *Protospongia* gänzlich.

Endlich will ich noch darauf hinweisen, dass bei *Protospongia* sämmtliche Kragenzellen bis an das collare in der gallertigen Verbindungsmasse stecken, während die entsprechenden Zellen der Spongien nur mit ihrer Basalfläche der bindegewebigen Grundlage aufsitzen, sonst aber frei nebeneinander stehen.

Indem ich mich jetzt zur Kritik der von Saville Kent behaupteten Übereinstimmung des Zeugungskreises der Spongien und Choanoflagellaten wende, muss ich vor Allem daran erinnern, dass seit Lieberkühn's Entdeckung der Spermatozoen von *Spongilla* bei zahlreichen Spongien Gebilde nachgewiesen sind, welche in ihrer Gestalt, Entwickelung und Bewegungsart so vollständig mit den bekannten Spermatozoen höherer Thiere übereinstimmen, dass über ihre wahre Natur kein Zweifel bestehen kann. Es lässt sich daher, selbst wenn man den Berichten über directe Beobachtung des Befruchtungsactes noch nicht volles Vertrauen schenken wollte, doch an der geschlechtlichen Fortpflanzung der Spongien um so weniger zweifeln, als ja auch fast überall Eier von typischem Baue nachgewiesen sind, deren Ausbildung zu freien Larven in vielen Fällen verfolgt werden konnte.

Saville Kent bestreitet nun zwar das Vorkommen von Spermatozoen bei den Spongien, wie er denn auch keine wahren Spongieneier anerkennt, jedoch geht aus seinen eigenen Darstellungen und Abbildungen[1] hervor, dass er selbst Spermaballen und deren Entwickelungsstadien gesehen hat. Nur hat er dieselben zugleich mit Gebilden ganz anderer Art — wie Farbstoffkörnchen und Reservenahrung führenden Zellen — für Sporenhaufen und deren Bildungsstadien gehalten.

Wenn also den Spongien eine geschlechtliche Vermehrung zukommt, welche den Choanoflagellaten — wie wahrscheinlich allen Protozoen — fehlt, so finden wir in dieser wichtigen Differenz eine weitere Bestätigung der schon aus der Anatomie und Histiologie beider Thiergruppen gewonnenen Überzeugung, dass die Spongien keine Flagellaten-Colonien, überhaupt keine Protozoen, sondern echte Metazoen sind.

Das gleiche Resultat liefert endlich die Entwickelungsgeschichte. Denn wie verschieden sich auch der Entwickelungsgang bei den bisher untersuchten Spongien darstellt, und wie erheblich auch die Mit-

[1] Manual of the Infusoria. Pl. X.

Digitized by Google

theilungen der einzelnen Beobachter von einander abweichen, so stimmen doch alle Angaben darin überein, dass sich am Ende des Larvenlebens zwei differente Zellenlagen, eine äussere und eine innere, unterscheiden lassen. Hieran wird selbst dann nichts geändert, wenn sich die Mittheilung von Götte (im zoolog. Anzeiger Nr. 183 und 184) bestätigen sollte, dass das aus Geisselzellen bestehende Ektoderm der Larven von *Spongilla fluviatilis* durch Abblättern oder Atrophie vollständig zu Grunde geht.

Ist demnach an der Metazoen-Natur der Spongien nicht zu zweifeln, und damit die Berechtigung, sie zu den Choanoflagellaten zu stellen, gänzlich ausgeschlossen, so bleibt doch noch die Möglichkeit, dass zwischen diesen beiden so verschieden hoch entwickelten Thiergruppen eine Verwandtschaft nach Art eines Descendenzverhältnisses besteht.

In der That hat diese Idee vor Kurzem in Bütschli einen sehr entschiedenen Vertreter gefunden.

»Da ich der Ansicht bin«, so sagt Bütschli in seinen Bemerkungen zur Gastraatheorie[1], »dass die Gruppe der Schwämme eine gegen die übrigen Metazoen ganz abgeschlossene ist, die durchaus selbstständig aus der Abtheilung der Choanoflagellaten (Saville Kent) hervorging, so scheint es mir unrichtig, diese Gruppe bei der Erklärung der Phylogenese der übrigen Metazoen zu Rathe zu ziehen«.

Ohne Zweifel stützt sich diese Ansicht Bütschli's auf die nämliche Thatsache, welche Clark, Carter und Saville Kent veranlasst hat, die Spongien zu den Choanoflagellaten zu rechnen, nämlich die frappante Ähnlichkeit der letzteren mit den Kragenzellen der Spongien. Es liegt nahe, das ausschliessliche Vorkommen eines so eigenartigen Gebildes wie des collare bei zwei Thiergruppen nicht etwa auf eine zweimalige selbständige Bildung desselben zurückzuführen, sondern einfach durch Vererbung zu erklären. Da man nun keinen Grund hat zu der Annahme, dass die jetzt lebenden Choanoflagellaten rückgebildete Nachkommen von spongienähnlichen Metazoen sind, dagegen von vorne herein geneigt sein wird, die Entstehung unserer niedrigsten Metazoen aus Protozoencolonien vorauszusetzen, so wird man allerdings leicht zu der Vorstellung gedrängt, dass sich die Spongien aus Colonien von Choanoflagellaten entwickelt haben, von deren Existenzmöglichkeit uns ihre noch jetzt als Protozoen lebenden unveränderten Nachkommen den anschaulichsten Beweis liefern.

Mit dieser Vorstellung ist nun aber die Annahme einer näheren Verwandtschaft zwischen Spongien und Cnidariern unvereinbar. Man

[1] Morphologisches Jahrbuch Bd. IX, S. 424.

Digitized by Google

müsste denn die letzteren ebenfalls von Choanoflagellaten ableiten, wozu nicht der geringste Grund vorliegt.

Bekanntlich war es Leuckart, welcher zuerst im Jahre 1854[1] auf Grund der damals bekannten Thatsachen die Verwandtschaft der Spongien mit den »Polypen« hervorhob, und sie in Folge dessen zu seinem Typus der Cölenteraten stellte. Trotzdem diese Ansicht zunächst wenig Beifall fand, wiederholte sie Leuckart im Jahre 1866[2] und führte einen Vergleich zwischen einer *Grantia (Ascone)* und einem Hydroidpolypen durch. Nachdem er darauf hingewiesen hatte, dass die einfache Flimmerhöhle beiden zukomme, die Endöffnungen der Röhren von *Grantia* aber den Mundöffnungen der einzelnen Polypen entspreche, und der Mangel der Tentakel, welche ja auch bei Siphonophoren und Ctenophoren gelegentlich fehlen, ebensowenig ein Hinderniss der Vergleichung sein könne, wie das Vorkommen der seitlichen Einlassöffnungen, welche gleichfalls bei manchen Cölenteraten als sogenannte Wasserlöcher vorkämen, so schloss er seinen Vergleich mit der Bemerkung, dass der histologische Unterschied zwischen *Hydra* und *Actinia* kaum minder beträchtlich sei, als zwischen *Hydra* und *Spongia.*

Diese Ideen Leuckart's, welche im Wesentlichen von Micklucho-Maclay, Haeckel und den meisten Spongiologen als richtig angenommen waren, hat in neuester Zeit Marschall[3] weiter ausgeführt und zugleich die Gründe, welche inzwischen von Balfour für die selbstständige Entstehung der Spongien aus den Protozoen vorgebracht waren, zu widerlegen gesucht.

Während Balfour in seiner vergleichenden Entwickelungsgeschichte Bd. II. S. 309 auf den eigenthümlichen Charakter des verdauenden Canalsystemes der Spongien im Gegensatze zum Gastrovasculärapparate der Cölenteraten hingewiesen hatte, findet Marschall mit Leuckart gerade in der Übereinstimmung dieses Systemes bei beiden Gruppen einen Hauptgrund zur Vereinigung derselben zu einem Typus. Nachdem er auf seine eigene Beobachtung einer radiären Anlage der ersten Geisselkammern als Aussackungen des centralen Gastralraumes und auf das nicht seltene Vorkommen radiärer Symmetrie bei erwachsenen Spongien verschiedener Abtheilungen sich berufen hat, sagt er am Schlusse: »Beide Gruppen sind Metazoen mit Gastralräumen, Mesenterialtaschen (die bei Spongien zu Geisselkammern werden können), centrifugal verlaufenden, vom Gastralraume entspringenden Canälen, die mittelst Poren

[1] Archiv für Naturgeschichte, 20. Jahrgang II. Bd. S. 471.

[2] Archiv für Naturgeschichte, II. Bd.

[3] Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie. Bd. 37. S. 221. 1882 und Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften 1884.

Digitized by Google

sich nach aussen öffnen, und (unter Umständen ja auch bei höheren Cölenteraten) Nahrung aufnehmen. Diese Canäle sind wie die Magenräume (bei *Reniera*) von Entoderm ausgekleidet, das bei beiden Geisselzellen differenzirt.«

Balfour hatte bemerkt, dass die frühzeitige Entwickelung des Mesodermes bei den Schwämmen in grellem Gegensatze stehe zu dem Mangel dieser Schicht bei den Embryonen der meisten Cölenteraten, und hatte auf die aufallenden Eigenthümlichkeiten der Schwammlarven aufmerksam gemacht.

Marschall schreibt jedoch der frühen Mesodermentwickelung bei den Spongien keine phylogenetische Bedeutung zu, indem er sie auf »abgekürzte Vererbung« zurückführt, und erkennt überhaupt eine erhebliche Differenz zwischen Spongien- und Cölenteratenlarven nicht an.

Den gänzlichen Mangel der Nesselkapseln bei den Spongien erklärt Marschall aus dem correlativen Verhältnisse derselben zu den Tentakeln, welche letzteren die Spongien entweder nie besessen oder doch schon früh eingebüsst haben sollen, während sie den echten Cölenteraten seit alter Zeit zukommen und zur Ausbildung von Nesselkapseln führten.

Im Allgemeinen ist Marschall geneigt, die Spongien als rückgebildete Cölenteraten aufzufassen, deren cölenterischer Apparat ursprünglich demjenigen der höheren Cölenteraten glich, auch gleich jenem Wasserporen besass, dieselben aber zunächst noch nicht zur Nahrungsaufnahme benutzte. Erst später trat nach Marschall's Ansicht bei den Spongien ein Functionswechsel ein, indem durch die äusseren Poren das Wasser und mit diesem die Nahrung eingesogen wurde. Hierbei schwanden die etwa vorhandenen Tentakel sammt den Nesselkapseln, und das zuführende Canalsystem erfuhr eine besondere Ausbildung.

Zweifellos wird die Entscheidung für die eine oder die andere der beiden sich gegenüberstehenden Ansichten erst dann mit einiger Sicherheit getroffen werden können, wenn eine gründliche Kenntniss der Ontogenie zahlreicher Spongien und Cnidarier zu bestimmten Schlüssen auf den phylogenetischen Entwickelungsgang beider Gruppen berechtigt.

Was wir bis jetzt von der Ontogenie der Spongien wissen, spricht meines Erachtens nicht für die Richtigkeit der Hypothese von Bütschli. Denn wenn die Spongien wirklich aus Colonien von Choanoflagellaten hervorgegangen wären und diesem Umstande ihre Kragenzellen verdankten, so sollte man erwarten, dass bei dem ontogenetischen Entwickelungsgange der Spongien die Kragenzellen in jener Phase auftreten, welche dem phylogenetischen Stadium einer Protozoencolonie

Digitized by Google

entspricht, nämlich bei der *Blastula*. Dies wäre ja auch wirklich der Fall, wenn die Darstellung von Saville Kent richtig wäre, nach welcher die *Blastula* oder swarm-gemmule (wenigstens von *Sycandra compressa*) aus einer Lage von Kragenzellen bestehen soll.

Da aber die uns bekannten Spongienlarven eben nicht jene Kragenzellen, sondern gleich den Larven der Cnidarier einfache Geisselzellen besitzen und — ebenso wie die Cnidarierlarven — durch die Differenzirung zweier verschiedenartiger Zellenmassen bereits das Metazoenstadium erreicht haben, bevor noch die Metamorphose zur typischen Spongie und somit die Bildung der Kragenzellen beginnt, so ergiebt sich, dass die Constitution der Spongienlarven nicht sowohl für die selbständige Entstehung der Spongien aus Choanoflagellaten, als vielmehr für eine nähere Verwandtschaft derselben mit anderen Metazoen, etwa den Cnidariern, spricht. Allerdings wird so die Übereinstimmung zwischen den Kragenzellen der Spongien und den Choanoflagellaten schwerer verständlich. Doch scheint mir die Möglichkeit einer selbständigen Entstehung des collare bei den Spongien — unabhängig von demjenigen der Choanoflagellaten von vorne herein keineswegs ausgeschlossen zu sein.

Der Umstand, dass wir bei ganz verschiedenen Protozoengruppen, wenn auch nicht die gleichen, so doch ähnliche zarte membranöse Erhebungen des Plasmakörpers antreffen, wie das collare, dürfte vielmehr darauf hinweisen, dass dem Protoplasma überhaupt die Fähigkeit zur Bildung derartiger Fortsätze innewohnt, und solche daher auch bei verschiedenen Thierabtheilungen und zu verschiedenen Zeiten unabhängig von einander entstehen konnten. Ich selbst habe bei *Placopus ruber*, einem Süsswasserrhizopoden, pseudopodienartige Erhebungen beobachtet,[1] welche an der freien oberen Fläche des Thieres entstehen und sich durch Verschmelzen ihrer aneinanderstossenden Seitenränder zur Bildung zarter membranöser Trichter vereinigen können. Auch die sogenannten undulirenden Membranen zahlreicher ciliater Infusorien gleichen in mancher Hinsicht dem collare, ohne dass man deshalb eine nähere Verwandtschaft zwischen jenen Infusorien und den Choanoflagellaten annimmt.

Für die Beurtheilung des Verwandtschaftsverhältnisses der Spongien zu den Cnidariern wird die Berücksichtigung der Larven ebenfalls von grosser Bedeutung und jedenfalls nicht minder wichtig sein, als die bisher vorwiegend geübte Vergleichung der ausgebildeten Thiere. Trotz der Geringfügigkeit unserer Kenntnisse von den beiderseitigen Larven und der Art ihrer Metamorphose können wir doch schon so

[1] Archiv für mikroskopische Anatomie. Bd. XI S. 348.

Digitized by Google

viel behaupten, dass der Unterschied zwischen den frei schwimmenden Flimmerlarven der Spongien einerseits und der Cnidarier andererseits im Allgemeinen nicht bedeutender ist, als zwischen den verschiedenen Spongienlarven untereinander. Niemand wird von einer ihm nicht schon speciell bekannten Flimmerlarve, welche er zufällig im Meerwasser antrifft, mit Sicherheit aussagen können, ob es eine Spongien- oder eine Cnidarier-Larve ist.

Erst nach der Metamorphose zeigen sich jene principiellen Differenzen der Organisation, durch welche wir beide Gruppen leicht und scharf von einander trennen können.

Dadurch sind wir meines Erachtens zu der Annahme berechtigt, dass die Divergenz beider Linien nicht vor jenem phylogenetischen Entwickelungsstadium begann, welches der zur Metamorphose reifen Flimmerlarve entspricht.

Welche Höhe der Organisation aber erreicht wurde, bevor die Trennung wirklich stattfand, wird schwerer zu entscheiden sein.

Für Marschall's oben erwähnte Hypothese, dass den gemeinsamen Ahnen der Spongien und Cnidarier radiär geordnete Mesenterialtaschen, Tentakel mit Nesselkapseln und indifferente Wasserporen zukommen, finde ich in der Entwickelungsgeschichte keinen ausreichenden Grund.

Wenn auch bei einzelnen Spongien sich schon früh radiäre Ausbuchtungen einer centralen Höhle anlegen, so giebt es doch auch solche Spongien, welche, wie die Asconen, niemals derartige Divertikel ausbilden, und andere — die Syconen —, bei welchen dieselben erst als Aussackungen der Wand entstehen. Dass aber die Asconen nicht etwa zurückgebildete Formen sind, lässt sich aus dem Umstande schliessen, dass die Syconen längere Zeit, bevor sie ihre Radialtuben bilden, den reinen Asconen-Typus darstellen. Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass die ältesten Spongien noch keine radiären Ausstülpungen ihrer Centralhöhle besassen, sondern, ähnlich dem *Olynthus* der Kalkschwämme, einfache Sackform hatten.

Digitized by Google

Digitized by Google

13. Versuche über die elektromagnetische Wirkung der diëlektrischen Polarisation.

Von W. C. Röntgen
in Giessen.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 26. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XI]; — ausgegeben am 5. März.)

Der von Faraday aufgestellten und von Clerk Maxwell ausgearbeiteten Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen liegt die Vorstellung zu Grunde, dass in den von elektrisirten Leitern begrenzten Isolatoren eine diëlektrische Polarisation (Verschiebung) besteht, deren in irgend einer Weise erzeugte Veränderung elektro-dynamische Wirkungen ausübt, gerade so wie ein in einem Leiter fliessender elektrischer Strom. Hr. von Helmholtz hat gezeigt, dass keine der Folgerungen aus dieser Annahme den Grundgesetzen der Mechanik widerspricht, und dass dieselbe in Verbindung mit dem verallgemeinerten Potentialgesetz eine ausreichende Erklärung gibt für die an geschlossenen und sogenannten ungeschlossenen Leitern beobachteten Erscheinungen.

Meines Wissens ist aber noch kein directer experimenteller Beweis für die Richtigkeit der Faraday-Maxwell'schen Annahme erbracht, und ich hatte mir deshalb bereits vor mehreren Jahren die Aufgabe gestellt, diese Lücke wenn möglich auszufüllen. Nach vielen fruchtlosen Bemühungen ist es mir in der letzten Zeit gelungen, eine Methode ausfindig zu machen, welche brauchbare und entscheidende Resultate lieferte. Ich erlaube mir, über dieselbe im Folgenden zu berichten.

Eine 0.5^{cm} dicke, horizontale und vorzüglich isolirende Ebonitscheibe von 16^{cm} Durchmesser war oben auf einer verticalen Axe befestigt, welche durch einen Schnurlauf eine rasche Rotation (120 bis 150 Umdrehungen pro Secunde) erhielt. Unter der Scheibe lag mit dieser parallel eine in der Mitte durchbohrte Glasplatte von 17.5^{cm} Durchmesser, welche mit zwei Halbringen aus Stanniol beklebt war; der innere Radius der Halbringe betrug 2.25^{cm}, der äussere 7^{cm}; der die beiden Halbringe trennende Ausschnitt war 1.4^{cm} breit. Über der

Digitized by Google

Ebonitscheibe war eine zweite horizontale, jedoch vollständig mit Stanniol überzogene Glasplatte von 21.5^{cm} Durchmesser fest aufgestellt. Die Stanniolbelegungen der beiden Glasplatten waren der Ebonitscheibe zugewendet und von ihr um ungefär 0.1^{cm} entfernt; die Belegung der oberen Platte war dauernd zur Erde abgeleitet, und je ein Halbring konnte mit der inneren Belegung je einer grossen Leydener Flasche in Verbindung gesetzt werden, wodurch der eine positiv und der andere gleichzeitig negativ elektrisch wurde. Ein eingeschalteter Commutator gestattete die Elektrisirung zu wechseln.

Es ist nun einleuchtend, dass die in der rotirenden Ebonitscheibe durch Elektrisirung der Stanniolbelegungen erzeugte diëlektrische Polarisation ihr Zeichen an der Stelle wechselte, wo der zwischen den Halbringen befindliche Ausschnitt lag. Auf der einen (etwa vorderen) Hälfte der Scheibe bewegten sich ihre Theilchen von dem positiven zu dem negativen Halbring und es fand in denselben beim Übergang von dem einen zum anderen Halbring eine Verschiebung von positiver Elektricität statt, welche eine nach unten gerichtete verticale Componente besass. Gleichzeitig war in der anderen (hinteren) Hälfte der Scheibe eine verticale Verschiebungscomponente vorhanden, die von unten nach oben gerichtet war. Diese Verschiebungen dauerten so lange fort, als die Scheibe bei unveränderter Elektrisirung der Halbringe rotirte, und sie müssten deshalb nach der Faraday-Maxwell'schen Annahme in elektromagnetischer Beziehung sich verhalten, wie continuirliche Ströme, welche bei der angenommenen Drehungsrichtung in der vorderen Hälfte der Scheibe von oben nach unten, in der hinteren Hälfte in umgekehrter Richtung verlaufen würden. Es fragt sich nun, ob diese verticalen Componenten thatsächlich eine solche Wirkung ausübten.

Um darüber entscheiden zu können, wurde dicht über der oberen Glasplatte ein metallisches, immer zur Erde abgeleitetes Gehäuse aufgestellt, welches ein äusserst empfindliches astatisches Nadelpaar enthielt; die untere Nadel war ungefähr 0.6^{cm} weit von der Ebonitscheibe entfernt, ihre Mitte befand sich in der Verlängerung der Drehungsaxe jener Scheibe, und ihre Richtung war parallel mit der Trennungslinie der Halbringe; die Länge der Nadel betrug 4.8^{cm} (etwas mehr als der innere Durchmesser der Halbringe). Die zweite Nadel hing um 21.5^{cm} höher als die untere. Die Ablenkungen wurden durch ein über 3^{m} weit entferntes Fernrohr mit Scala abgelesen. Alle nöthigen Vorkehrungen waren getroffen, um zu verhindern, dass äussere von statischer Elektricität herrührende Einflüsse auf die Nadeln wirkten; auch war durch eine besondere Construction der Axe dafür

Digitized by Google

gesorgt, dass die durch Rotationsmagnetismus erzeugten Ablenkungen nur äusserst gering waren (2 bis 3 Scalentheile). Trotzdem wechselte bei rascher Drehung der Scheibe die Nadel ihre Ruhelage fortwährend, was die Beobachtungen ungemein erschwerte; die Ursache dieser Bewegungen lag, wie ich mich überzeugte, in Luftströmungen und namentlich in kleinen Erschütterungen, welchen der Apparat in Folge der durch die hiesigen Institutsverhältnisse bedingten, mangelhaften Aufstellung ausgesetzt war.

Die Versuche wurden nun in der Weise angestellt, dass ein Beobachter am Fernrohr sass, während ein Gehülfe die Scheibe drehte und ein zweiter nach erfolgtem Anruf von Seiten des Beobachters commutirte. In welchem Sinne commutirt wurde, blieb dem Beobachter absichtlich bis zu Ende einer Versuchsreihe unbekannt; gewöhnlich wurde während einer Versuchsreihe acht Mal commutirt. Von einer genauen Bestimmung der Grösse des nach dem Commutiren erfolgten Ausschlages konnte nicht die Rede sein, da derselbe in allen Fällen sehr klein war und im günstigsten Fall 1.5 Scalentheile (mm), meistens aber nur Bruchtheile davon betrug. Die Thätigkeit des Beobachters musste sich darauf beschränken, die Richtung des Ausschlages jedesmal zu bestimmen, und dazu gehörte schon in Anbetracht der fast immer vorhandenen kleinen Bewegungen der Nadel eine ziemliche Übung. Durch weit über 1000 Beobachtungen habe ich mir so viel Übung verschafft, dass ich bei den letzten Versuchen die Ablenkungsrichtung fast ausnahmslos richtig angeben konnte.

Aus diesen Versuchen, die in der mannigfaltigsten Weise variirt wurden, ergab sich nun das Resultat, dass das Nadelsystem stets so abgelenkt wurde, wie es die FARADAY'sche Annahme verlangte. Die Veränderung der dielektrischen Polarisation übt somit eine elektromagnetische Kraft aus, gerade so wie ein elektrischer Strom, welcher in einem Leiterstück in derselben Richtung fliessen würde, in welcher die Verschiebung der positiven Elektricität in einem Isolator stattfindet.

Die ausführliche Mittheilung der oben nur kurz beschriebenen Versuche und namentlich der vielen Versuche, welche ich anstellte, um mögliche Täuschungen auszuschliessen, wird an anderer Stelle erfolgen.

Augenblicklich bin ich beschäftigt mit der Construction eines auf demselben Princip beruhenden Apparates, welcher hoffentlich weniger Mängel besitzen wird und namentlich grössere Ablenkungen zu erzeugen vermag, als der beschriebene. Auch beabsichtige ich, einige aus der FARADAY'schen Theorie sich ergebenden Folgerungen experimentell zu prüfen.

Digitized by Google

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass ich mit dem entsprechend umgeänderten Apparat gewissermaassen als Probe auf seine Empfindlichkeit den von Hrn. von Helmholtz beschriebenen Rowland'schen Versuch wiederholt habe. Die nicht belegte Ebonitscheibe wurde durch Spitzen geladen. Beim Wechsel der Elektrisirung erfolgte jedesmal ein Ausschlag von 8 bis 10 Scalentheilen.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

INHALTSVERZEICHNISS.

		Seite
5.	Wersky: Über die Vanadinsäure enthaltenden Bleierze aus der Provinz Cordoba in Argentina	37
6.	Rammelsberg: Über die Oxyde des Mangans und des Urans	39
7.	Koganei: Untersuchungen über den Bau der Iris	47
8.	Mendelssohn: Untersuchungen über Reflexe	49
9.	Scherino: Zum dritten Gauss'schen Beweise des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste	55
10.	Fritsch: Zur Organisation des Gymnarchus niloticus	61
11.	Siemens: Über die von Hrn. Fritts in New York entdeckte elektromotorische Wirkung des beleuchteten Selens	73
12.	Schulze: Über das Verhältniss der Spongien zu den Choanoflagellaten	75
13.	Röntgen: Versuche über die elektromagnetische Wirkung der diëlektrischen Polarisation	89

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE
aus den Jahren 1882, 1883 und 1884.

(In Commission in Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.)

Schrader:	Gedächtnissrede auf Justus Ohlshausen	M. 1.00
Virchow:	Troianische Gräber und Schädel	» 12.20
Braun:	Fragmente einer Monographie der Characeen. Nach den hinterlassenen Manuscripten herausgegeben von Dr. Otto Nordstadt	» 11.50
Diels:	Zur Textgeschichte der Aristotelischen Physik	» 2.00
Schwendener:	Die Schutzscheiden und ihre Verstärkungen	» 6.00
Zeller:	Über Begriff und Begründung der sittlichen Gesetze	» 1.50
Bernays:	Über die unter Philon's Werken stehende Schrift über die Unzerstörbarkeit des Weltalls	» 4.00
Bernays:	Über die Unzerstörbarkeit des Weltalls. II.	» 4.00
Hagen:	Geschwindigkeit des strömenden Wassers in verschiedenen Tiefen, untersucht nach den von Brünings ausgeführten Messungen	» 4.00
Tobler:	Die altvenezianische Übersetzung der Sprüche des Dionysius Cato	» 3.50
Eichler:	Beiträge zur Morphologie der Marantaceen	» 6.30
Kronecker:	Über bilineare Formen von vier Variabeln	» 2.50
Schrader:	Zur Frage nach dem Ursprunge der babylonischen Cultur	» 3.00
Tobler:	Über das Buch des Uguçon da Laodho	» 5.00
Dillmann:	Über die Regierung, insbesondere die Kirchenordnung des Königs Zar'a-Jacob	» 5.00
Imhoof-Blumer:	Die Münzen der Dynastie von Pergamon	» 5.00

Noether:	Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Curven	M. 6.00
Studer:	Übersicht über die Ophiuriden, welche während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—1876 gesammelt wurden	» 3.50
Studer:	Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle an der Westküste von Africa, auf Ascension und am Cap der guten Hoffnung gesammelten Crustaceen	» 2.50
Studer:	Über die von S. M. S. Gazelle auf der Reise um die Erde 1874—1876 gesammelten Isopoden	» 2.50
Marshall:	Agilardiella radiata	» 1.50
Kraser:	Über das Wachsthum des Verdickungsringes und der jungen Holzzellen in seiner Abhängigkeit von Druckwirkungen	» 4.50

Register für die Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie zu Berlin vom Jahre 1874 bis 1881 M. 3.00

Digitized by Google

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im Auszuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden Theil des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus diesen Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der reinen Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschaften in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder ihr fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch denselben Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, Reden und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in Monatsheften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird in der Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften und Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen »Sitzungsberichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zuschicken zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu geben.

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämlich:

die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,

" " " Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,

" " " October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Fertigstellung des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1884 nicht zugekommen sein sollten, werden ersucht, hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamationen nur in Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1885 angebracht werden.

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchhändlerischen Bezuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei FERD. DÜMMLER's Verlagsbuchhandlung (HARRWITZ & GOSSMANN) in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 ℳ.

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 ℳ.

FERD. DÜMMLER's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungsberichte« oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften von der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in einzelnen Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten, zu liefern. Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der Buchhandlung in Verbindung setzen.

Digitized by Google

13, 892

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH

PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT III.

MÄRZ 1885.

BERLIN 1885.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN.

Digitized by Google

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges **beschränkt** werden. Der **Satz** einer Mittheilung wird **erst begonnen**, wenn die **Stöcke** der in den Text einzuschaltenden **Holzschnitte** fertig **sind** und von besonders **beizugebenden Tafeln** die volle erforderliche Auflage **eingeliefert ist.**

§ 7.

Eine **für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes** anderweitig, sei es auch nur auszugsweise **oder auch** in weiterer **Ausführung**, in deutscher **Sprache veröffentlicht** sein oder **werden.** Wenn der Verfasser **einer aufgenommenen wissenschaftlichen** Mittheilung **diese anderweit** früher zu **veröffentlichen** beabsichtigt, **als ihm dies gesetzlich zusteht**, bedarf er dazu der **Einwilligung der Gesammtakademie** oder der betreffenden **Classe.**

§ 8.

3. **Auswärts werden** Correcturen nur **auf besonderes** Verlangen **verschickt.** Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen **ihrer Mittheilungen** nach **acht** Tagen.

§ 9.

1. **Neben der vollständigen** Ausgabe **der** Sitzungsberichte **können bestimmte** Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen **auch abgesondert** in der Weise publicirt werden, **dass dieselben mit** Sondertitel und fortlaufender Paginirung **versehen und mit** besonderem **Verkaufspreis** in den **Buchhandel gebracht** werden.

§ 11.

1. **Jeder Verfasser** einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit **erhält** unentgeltlich **fünfzig Sonderabdrücke** mit einem Umschlag, auf welchem **der Titel der Arbeit** wiederholt wird.

2. **Dem Verfasser steht frei**, auf seine Kosten weitere gleiche **Separatabdrücke bis** zur Zahl von noch zweihundert zu **unentgeltlicher eigener** Vertheilung abziehen zu lassen, **sofern er hiervon** rechtzeitig dem *redigirenden* **Secretar Anzeige gemacht** hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der **Secretar zusammen, welcher** darin den Vorsitz hatte. Derselbe **Secretar führt** die Oberaufsicht über die Redaction **und den Druck der** in dem gleichen Stück erscheinenden **wissenschaftlichen** Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er **der redigirende** Secretar.

§ 29.

1. **Der redigirende** Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen **Theils der** Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile** derselben **sind nach jeder Richtung nur die** Verfasser verantwortlich.

Digitized by Google

14. Über gewisse Gesetzmässigkeiten im Wechsel der Witterung aufeinanderfolgender Jahreszeiten.

Von Dr. G. Hellmann.

(Vorgelegt von Hrn. Auwers am 12. März; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XIV]; — ausgegeben am 19. März.)

Den aus vieljährigen Beobachtungen ermittelten durchschnittlichen Zustand der meteorologischen Elemente an einem Orte nennen wir dessen Klima und pflegen die in Wirklichkeit eintretenden, davon abweichenden atmosphärischen Verhältnisse als Störungen (Anomalien) aufzufassen, die indessen so häufig vorkommen, dass sie zur Regel werden, während das Einhalten jener normalen Zustände zu den Seltenheiten gehört. Diese stets in verschiedenem Betrage und in wechselnder Folge auftretenden Abweichungen von den Mittelwerthen bestimmen recht eigentlich den besonderen Witterungscharakter der Jahreszeit und machen das aus, was man im gewöhnlichen Leben als Wetter bezeichnet. Hinsichtlich der Temperatur sind diese Störungen unter dem Namen »nicht periodische Änderungen« von Dove zum Gegenstand eingehendster Unterschung[1] gemacht worden. Seine in den Abhandlungen der Akademie niedergelegten diesbezüglichen Forschungen beziehen sich fast ausschliesslich auf die räumliche Vertheilung der Abweichungen, auf ihre Intensität und Häufigkeit, sowie auf die Ähnlichkeit derselben in verschiedenen Jahren. Mit der zeitlichen Aufeinanderfolge der nicht periodischen Änderungen und ihrer etwaigen gegenseitigen Beeinflussung hat sich dagegen Dove fast gar nicht beschäftigt, und ist auch sonst diese Frage sehr wenig bearbeitet worden, so weit verbreitet im Volke der Glaube über gewisse Gesetzmässigkeiten in der Reihenfolge abnormer Witterungserscheinungen auch sein mag.

Es muss daher, bei der Wichtigkeit dieses Gegenstandes, auch für die unmittelbar praktische Frage nach der Möglichkeit der Vorausbestimmung des allgemeinen Witterungscharakters ganzer Jahreszeiten, von besonderem Interesse sein, wenn es gelingt, einzelne Ge-

[1] Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften 1838, 1839, 1842, 1845, 1852, 1858.

Digitized by Google

setzmässigkeiten bezw. Wahrscheinlichkeiten in der Aufeinanderfolge der Störungen nachzuweisen.

Es sei mir an dieser Stelle erlaubt, in drei Fällen einen derartigen Nachweis zu führen.

Aus Veranlassung der überaus milden Witterung im vorigen Winter (1883/84) und deshalb an mich gerichteter Anfragen über die etwaigen Folgen derselben, hatte ich im Anfange des Februar 1884 an der Hand der langen Berliner Beobachtungsreihe (1719—1884) eine kleine Untersuchung[1] über den Charakter milder Winter angestellt, welche zu einigen bemerkenswerthen Resultaten führte. Es hatte sich nämlich u. A. ergeben, dass entgegengesetzt der landläufigen Meinung des Volkes, nach welcher auf einen milden Winter ein schlechter, d. h. ein kühler Sommer zu folgen pflegt, im Gegentheile, je wärmer ein Winter ist, um so wahrscheinlicher ein warmer Sommer im nächsten Jahre erwartet werden darf. Diesen Wahrscheinlichkeitsschluss machte der verflossene Sommer, welcher als ein selten schöner noch in Aller Erinnerung sein wird, zur Wahrheit. Ich wurde so durch den mir günstigen Zufall — denn die Wahrscheinlichkeit eines warmen Sommers nach sehr mildem Winter wäre natürlich noch bestehen geblieben, auch wenn sie in diesem besonderen Falle nicht zur Gewissheit geworden wäre — dazu ermuntert, im Herbste vergangenen Jahres die warmen Sommer Berlins seit 1719 in analoger Weise zu behandeln und speciell nachzusehen, ob sich eine ähnliche Beeinflussung des folgenden Winters nachweisen lässt. Durch Verhältnisse, die hier zu berühren nicht der Ort ist, wurde ich an der Vollendung dieser Studie damals verhindert, die ich erst jetzt wieder aufgenommen habe, und deren nunmehriger Veröffentlichung der Umstand zu Gute kommt, dass der kaum verflossene Winter (1884/85) zur Bestätigung der eben gewonnenen Resultate dient.

Gilt derjenige Sommer als ein warmer, in welchem die Mitteltemperaturen entweder aller vier Monate Juni, Juli, August und September oder wenigstens von dreien derselben über den normalen lagen, so hat es deren in Berlin seit dem Jahre 1719 mindestens 52 gegeben; ich sage mindestens, denn es sind in der so werthvollen Beobachtungsreihe leider einige Lücken vorhanden (1722—27, Mai bis December 1729, November 1750, November und December 1751, 1752—54 und acht Monate des Jahres 1755). Bei dem mehrfach vorgekommenen Wechsel der Beobachter sowie der Instrumente war es unthunlich, ein allgemeines Mittel aus allen Beobachtungen in den 155 Jahren zu

[1] Die milden Winter Berlins seit 1720. Zeitschr. des Königl. preuss. statist. Bureaus. Jahrg. 1884.

Digitized by Google

bilden und auf dieses die Abweichungen in den einzelnen Jahren zu beziehen, es wurden vielmehr für die Aufzeichnungen bis zum Jahre 1847 einschliesslich diejenigen vier Systeme angenommen, welche bereits auf Seite XIX[1] der ersten Publication des Königlich Preussischen meteorologischen Institutes befolgt wurden, während die Beobachtungen seit 1848 auf das 35jährige Mittel 1848—82 bezogen sind.

In der folgenden Tabelle habe ich die 52 warmen Sommer Berlins seit 1719 in chronologischer Reihenfolge zusammengestellt. Die Zahlen bedeuten Abweichungen vom Durchschnitte in Centesimalgraden, und zwar positive, dass die Mitteltemperatur zu hoch, negative, dass dieselbe zu niedrig war. Ausser den Sommermonaten sind die des darauffolgenden Herbstes und Winters mit aufgenommen worden.

Jahr	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jan.	Febr.
1719	3.0	3.9	2.3	0.1	0.8	2.6	— 1.3	2.6	0.5
1720	1.2	2.5	0.4	0.1	2.0	0.0	1.8	3.0	— 2.2
1745	1.3	0.0	0.2	0.1	1.4	2.7	— 2.7	0.1	0.0
1747	2.9	— 0.4	0.2	1.8	0.5	0.3	1.3	— 1.5	— 2.1
1748	2.6	0.7	3.6	— 0.2	0.0	2.2	4.0	2.8	0.6
1749	0.3	0.5	2.0	0.4	0.1	— 0.8	1.6	1.5	4.0
1750	1.3	2.5	1.9	0.3	— 0.7		— 0.1	— 0.6	— 2.1
1751	3.0	2.2	3.9	0.5	— 0.1				
1756	3.2	1.9	— 0.4	2.0	2.0	— 0.5	— 1.8	1.5	2.9
1757	1.8	4.1	0.3	— 2.1	— 3.6	1.5	— 1.6	— 3.2	— 0.2
1759	1.1	1.4	0.8	— 0.6	1.4	— 2.8	— 4.8	— 0.7	— 1.8
1760	0.7	— 0.4	0.0	1.1	1.2	0.1	2.6	1.2	2.1
1761	2.4	— 0.8	2.3	2.9	— 1.3	— 0.1	— 3.8	2.6	0.0
1763	0.2	1.2	1.6	— 1.1	— 1.1	— 0.3	3.3	3.6	3.6
1775	4.1	2.3	2.0	2.5	1.5	— 1.0	— 2.7	— 6.9	3.0
1776	1.5	1.5	0.4	0.1	— 0.6	0.9	0.7	0.0	— 2.1
1778	0.4	1.3	0.8	— 0.8	— 2.1	1.8	4.8	0.4	4.8
1779	— 0.4	0.9	2.1	2.0	2.4	1.1	2.8	— 1.3	— 2.5
1780	0.3	0.6	1.2	0.0	1.8	— 0.4	— 0.9	— 0.5	0.7
1781	2.5	2.5	3.2	2.0	— 0.5	1.0	0.0	3.9	— 3.6
1782	2.2	1.9	0.3	2.2	— 0.4	— 1.4	1.0	4.0	4.6
1783	3.4	1.8	0.9	0.4	0.4	0.6	— 1.9	— 5.0	— 4.4
1788	2.0	2.0	— 1.5	1.5	— 0.4	— 1.0	— 10.8	— 2.4	1.8
1789	0.2	0.1	0.4	2.3	0.8	1.1	4.4	3.8	3.5
1791	0.2	1.0	1.3	— 1.0	0.3	— 1.1	1.7	0.7	— 2.3
1792	1.0	2.0	0.6	— 1.2	— 0.4	0.0	1.4	— 0.9	2.7
1796	0.5	0.6	1.7	2.2	0.1	— 0.8	— 2.3	2.0	2.4
1797	— 0.3	1.9	1.6	2.5	0.7	— 1.0	2.3	2.2	1.9
1798	1.5	0.5	1.1	1.6	— 0.2	— 0.6	— 4.4	— 3.7	— 5.6
1818	1.2	0.9	— 1.8	0.2	— 0.7	— 0.8	— 1.1	3.1	2.0
1819	2.8	1.8	2.0	1.0	— 0.5	— 0.8	— 3.3	— 3.8	0.4

[1] Bericht über die in den Jahren 1848 und 1849 auf den Stationen des meteorologischen Instituts im Preussischen Staate angestellten Beobachtungen. Berlin 1851. Fol.

Digitized by Google

Jahr	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jan.	Febr.
1826	1.5	3.8	3.8	0.4	0.9	— 0.4	1.0	0.3	— 6.1
1827	1.7	1.0	0.0	1.3	1.0	— 2.8	1.8	— 0.3	— 0.7
1834	1.5	4.6	2.9	0.9	— 0.3	0.7	0.8	3.5	3.0
1835	0.2	0.3	— 0.7	1.5	— 1.2	— 3.4	— 1.8	1.7	1.4
1839	1.2	1.0	— 0.5	1.4	0.2	1.4	— 1.5	— 0.1	0.8
1846	0.9	1.4	3.3	0.6	1.9	— 0.5	— 5.0	— 1.5	— 1.2
1852	0.0	1.9	0.9	— 0.2	— 0.9	2.1	4.5	3.5	— 3.0
1857	0.6	0.6	2.9	1.7	2.4	— 1.0	3.2	— 1.0	— 4.8
1858	2.8	— 0.3	0.8	1.4	0.4	— 4.0	0.0	2.3	2.4
1859	0.6	2.4	2.2	— 0.3	0.0	0.0	— 2.2	2.4	— 1.5
1861	2.1	1.0	0.5	— 0.6	0.8	1.2	1.0	— 1.5	— 1.2
1868	1.5	1.6	3.1	1.8	— 0.2	— 0.8	3.9	0.5	4.5
1872	0.0	1.6	— 0.8	1.3	1.5	3.6	1.8	3.7	— 0.9
1873	0.6	1.3	1.2	— 0.6	1.4	1.9	2.7	3.5	1.2
1874	0.0	2.5	— 1.3	2.6	2.1	— 0.6	— 0.7	2.2	— 4.5
1875	1.7	0.7	2.5	0.3	— 2.7	— 1.0	— 1.6	— 1.7	1.4
1876	1.0	0.7	1.0	— 0.8	2.3	— 1.7	0.3	3.5	2.2
1877	2.3	0.6	0.8	— 2.5	— 1.2	3.7	1.3	2.2	3.1
1878	0.1	— 1.5	0.7	1.4	2.0	1.1	0.2	— 1.9	— 0.3
1879	0.5	— 1.9	1.0	1.4	— 0.4	— 1.7	— 5.1	— 0.4	0.4
1880	0.0	1.0	0.5	1.3	— 1.2	1.2	3.1	— 4.2	— 1.0

In der lückenlosen Beobachtungsreihe von 1755 bis jetzt, also in 130 Jahren, hat es 45 warme Sommer (im obigen Sinne des Wortes) gegeben, d. h. durchschnittlich einen in 2.89 Jahren. Allein, wie bei den milden Wintern, ist auch hier an ein Innehalten eines gesetzmässigen Zwischenraums von etwa 3 Jahren zwischen zwei aufeinanderfolgenden warmen Sommern nicht zu denken.

Vom warmen Sommer 1763 sind 12 Jahre bis zum nächsten verflossen, und in der kalten Periode am Anfange unseres Jahrhunderts ist während 19 Jahren (1799—1817) kein warmer Sommer vorgekommen. Dagegen macht sich wieder, noch mehr als bei milden Wintern, die Neigung, gruppenweise aufzutreten, geltend; denn 31 Mal unter 52 Fällen waren zwei aufeinanderfolgende Sommer zu warm, so dass man 596 gegen 404 wetten kann, dass einem warmen Sommer ein zweiter folgen werde. Dieses Resultat scheint mir beachtenswerth, da in unserem Klima kühle Sommer häufiger als warme sind, eben weil im Sommer die positiven Abweichungen der Temperatur ihrem Betrage nach die negativen übertreffen.

Untersucht man zunächst ganz allgemein den Einfluss eines warmen Sommers auf die Temperatur der folgenden Herbst- und Wintermonate (October, November, December, Januar und Februar), so findet man unter 50 Fällen 4 Mal alle 5 Monate, 11 Mal 4, 17 Mal 3, 10 Mal 2, 6 Mal 1 und 2 Mal keinen Monat zu warm, d. h. man kann darauf

Digitized by Google

rechnen, dass von den genannten fünf Monaten 2.82 zu warm sein werden. Für die einzelnen Monate, mit Ausnahme des Novembers, ist diese Wahrscheinlichkeit nahezu gleich gross, nämlich

October.....	0.60
November.....	0.49
December	0.58
Januar.....	0.60
Februar.....	0.58.

Beachtet man aber in obiger Tabelle nur diejenigen Sommer, welche dem vorjährigen (1884) speciell darin gleichen, dass die drei Monate Juli, August und September positive Abweichungen haben, so ergeben sich für die uns besonders interessirenden Wintermonate andere Wahrscheinlichkeitswerthe, nämlich

December 0.60, Januar 0.45, Februar 0.55,

so dass also ein kalter Januar, aber ein warmer December und Februar zu erwarten waren. Das ist in der That im letzten Winter der Fall gewesen, denn die Temperaturabweichungen betrugen im

December 2°1, Januar – 1°8, Februar 2°4 C.

Dass überhaupt nach einem warmen Sommer zwei warme Wintermonate in Aussicht stehen, zeigt sich auch noch auf anderem Wege. Es ergiebt sich nämlich aus obiger Tabelle die Wahrscheinlichkeit, dass von den drei Monaten December, Januar und Februar

einer zu warm ist	= 0.88,	einer zu kalt ist	= 0.73
zwei » » sind	= 0.57,	zwei » » sind	= 0.39
drei » » »	= 0.27,	drei » » »	= 0.12.

Ähnlich, wie bei der Untersuchung der milden Winter, glaube ich mich mit diesem summarischen Resultate nicht begnügen zu dürfen, da sämmtliche warmen Sommer bisher als gleichwerthig betrachtet wurden. Warme Sommer sind aber, ausser von ungleicher Dauer, auch von sehr verschiedener Intensität, die, wie sich sogleich zeigen wird, auf die Gestaltung der Witterung in den folgenden Wintermonaten von sehr wesentlichem Einflusse ist.

Lässt man als Maass dieser Intensität die Summe der Abweichungen in den Monaten Juni bis September gelten, so finden wir alle möglichen Abstufungen und Übergänge von einem Extrem (0°5 im Sommer 1818) zum anderen (10°9 im Sommer 1775) und die Zahl der Fälle, dass diese Summe beträgt

Digitized by Google

0.0	bis	1.0	= 3
1.1	»	2.0	= 8
2.1	»	3.0	= 9
3.1	»	4.0	= 5
4.1	»	5.0	= 8
5.1	»	6.0	= 4
6.1	»	7.0	= 6
7.1	»	8.0	= 2
8.1	»	9.0	= 0
9.1	»	10.0	= 3
10.0	»	11.0	= 2.

Da die Zahl der Sommer, deren positive Abweichungssumme 7 übersteigt, in unserer immerhin sehr langen Beobachtungsreihe noch zu klein ist, um dieselben einer näheren Untersuchung mit Erfolg unterziehen zu können, dürfte es genügen, zwei Gruppen zu unterscheiden, welche die nahezu gleiche Anzahl von Fällen aufweisen. Die erste umfasst diejenigen 23 Sommer, bei denen die Abweichungssumme 0 bis 3°5, die zweite jene 21 Sommer, bei denen dieselbe 3°6 bis 7°0 beträgt. Es ergiebt sich alsdann das interessante Resultat: in 100 Fällen folgt auf einen

mässig warmen Sommer (Summe 0...3°5)		sehr warmen Sommer (Summe 3°6...7°0)	
74 Mal	ein warmer December	38 Mal	ein warmer December
65 »	» » Januar	48 »	» » Januar
65 »	» » Februar	43 »	» » Februar,

d. h. auf einen mässig warmen Sommer folgt am wahrscheinlichsten ein milder, auf einen sehr warmen Sommer dagegen ein kalter Winter.

Fasst man auch die Temperaturabweichungen der Wintermonate December bis Februar zusammen und nennt denjenigen Winter einen warmen, dessen Abweichungssumme grösser als Null ist, so kann man obiges Resultat, noch mit Berücksichtigung der Intensität der Anomalie, kurz so darstellen, dass

Abweichungssumme des Sommers	Wahrscheinlichkeit eines folgenden warmen Winters	Abweichungssumme des folgenden Winters
0°0 bis 3°5	0.61	+ 2°6
3°6 » 7°0	0.38	— 1°4

einander entsprechen.

Dem vorigen Sommer (1884), welcher der ersten Gruppe angehört, ist in der That ein mässig milder Winter (+ 2°7) gefolgt.

In derselben Weise, wie hier die warmen Sommer und a. a. O. die milden Winter, habe ich auch noch die kalten Winter Ber-

Digitized by Google

lins untersucht. Ohne in näheres Detail einzutreten, zumal dasselbe dem bisher vorgebrachten in vielen Stücken ähnelt, beschränke ich mich hier auf die Mittheilung der gewonnenen Hauptresultate.

Die folgende Tabelle enthält wieder die Temperaturabweichungen für 56 strenge Winter in Berlin von 1728/29 bis 1880/81, sowie die der darauf folgenden Frühlings- und Sommermonate bis zum August.

Jahr	Nov.	Dec.	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.
1728/29	— 0.7	— 1.9	— 4.0	— 1.8	— 4.5	— 2.6				
1730/31	2.5	— 0.6	— 2.5	— 2.2	— 0.8	— 2.1	— 1.7	— 1.1	— 1.8	— 0.8
1735/36	— 1.3	— 0.2	— 0.1	— 1.2	— 0.9	1.1	— 1.1	— 1.1	— 0.3	0.8
1737/38	— 1.0	— 0.1	— 0.7	0.7	1.4	1.9	— 0.1	— 0.5	— 1.0	— 0.5
1739/40	— 6.7	— 0.1	— 8.3	— 8.2	— 4.1	— 4.3	— 4.3	— 2.1	— 1.2	— 0.8
1740/41	— 2.9	— 0.2	— 1.2	2.3	— 0.9	— 1.7	— 2.4	— 2.0	0.2	— 0.7
1757/58	1.5	— 1.6	— 3.2	— 0.2	0.2	— 0.3	1.3	0.2	— 1.1	0.7
1759/60	— 2.8	— 4.8	— 0.7	— 1.8	— 1.0	0.4	0.4	0.7	— 0.4	0.0
1762/63	— 0.4	— 2.3	— 2.8	3.8	— 0.5	— 0.7	— 0.4	0.2	1.1	1.6
1764/65	— 1.6	— 1.9	2.0	— 3.6	2.1	0.9	— 3.1	— 1.1	— 2.4	1.4
1766/67	0.6	— 0.3	— 6.9	2.2	0.0	— 1.9	— 1.3	— 2.1	— 0.3	1.1
1767/68	2.5	— 2.2	— 4.4	— 1.2	— 1.6	— 0.1	— 0.8	— 0.1	0.3	— 0.1
1770/71	0.2	1.4	— 1.6	— 4.1	— 4.2	— 4.1	2.6	— 0.3	— 1.0	— 2.6
1775/76	— 1.0	2.7	— 7.0	3.0	2.6	— 0.2	— 2.6	1.5	1.5	0.4
1780/81	— 0.4	— 0.9	— 0.5	0.7	2.6	2.3	1.5	2.5	2.5	3.2
1783/84	0.6	— 1.9	— 5.0	— 4.4	— 2.1	— 2.9	0.7	0.2	— 0.9	— 1.7
1784/85	1.6	— 1.2	0.6	— 4.1	— 7.2	— 3.2	— 1.8	— 1.0	— 0.9	— 1.4
1786/87	— 4.5	— 0.2	— 0.4	1.7	2.6	— 1.6	— 0.9	1.2	— 0.8	— 0.7
1788/89	— 1.0	— 10.8	— 2.4	1.8	— 5.6	0.0	2.3	0.2	0.2	0.4
1794/95	1.9	— 2.7	— 6.5	— 0.4	— 1.0	3.6	— 2.2	2.6	— 1.2	— 0.5
1798/99	— 0.6	— 4.4	— 3.7	— 5.6	— 2.1	— 2.7	— 2.8	1.9	— 1.3	— 0.4
1799/1800	0.6	— 5.5	— 1.4	— 4.6	— 5.1	5.5	2.9	— 3.8	— 2.5	0.3
1804/05	— 3.0	— 4.9	— 4.9	— 2.4	— 0.6	— 1.9	1.7	— 1.9	— 1.4	— 2.3
1808/09	— 1.4	— 5.5	— 4.1	2.0	— 1.3	— 4.2	1.2	— 1.1	— 0.6	0.4
1812/13	— 1.9	— 6.9	— 1.5	2.9	0.3	1.2	— 0.9	— 1.5	— 1.6	— 2.6
1813/14	0.1	1.3	— 2.7	— 6.9	— 3.5	1.2	— 3.6	— 2.5	1.3	— 1.7
1815/16	— 0.9	— 1.7	1.2	— 2.6	— 0.8	— 0.3	— 3.3	— 1.9	— 1.6	— 3.2
1819/20	— 0.8	— 3.3	— 3.8	0.4	0.0	1.9	1.1	— 2.9	— 2.6	1.5
1820/21	— 1.9	— 2.3	1.9	— 1.3	0.2	4.1	— 0.6	— 2.7	— 1.9	— 0.9
1822/23	1.9	— 3.6	— 9.4	— 0.3	0.5	— 1.6	— 0.3	— 1.0	— 2.2	1.3
1827/28	— 2.8	1.8	— 0.3	— 0.7	0.8	1.5	0.4	0.4	1.4	— 0.9
1828/29	0.2	0.9	— 3.6	— 3.3	— 1.5	0.5	— 0.4	0.1	0.5	— 0.7
1829/30	— 3.2	— 9.9	— 5.3	— 3.4	1.3	1.9	0.4	0.1	0.4	— 0.3
1830/31	1.8	— 1.8	— 2.3	0.9	0.5	2.8	— 1.2	— 1.7	0.4	0.2
1835/36	— 3.4	— 1.8	1.7	1.4	4.3	0.1	— 3.2	0.2	— 1.3	— 1.8
1837/38	0.9	— 0.7	— 7.9	— 4.5	0.5	— 1.8	— 0.3	0.4	— 0.3	— 2.2
1840/41	— 0.1	0.0	0.0	— 5.1	1.1	1.3	3.1	— 1.1	— 1.4	0.0
1844/45	0.7	— 5.9	2.1	— 5.7	— 7.8	0.3	— 1.8	0.6	1.1	— 1.2
1846/47	— 0.5	— 5.0	— 1.5	— 1.2	0.0	— 2.6	1.9	— 0.8	1.0	2.5
1847/48	0.8	— 1.6	— 9.0	2.0	1.8	1.8	0.5	0.7	— 0.9	— 1.8
1849/50	— 0.6	— 3.4	— 6.2	3.3	— 2.0	0.3	0.2	0.5	— 0.5	— 0.5

Digitized by Google

Jahr	Nov.	Dec.	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.
1853/54	— 1.0	— 4.0	0.2	— 0.4	0.7	— 0.5	1.2	— 1.2	1.0	— 0.5
1854/55	— 1.7	1.7	— 1.5	— 8.5	— 2.1	— 1.7	— 1.4	0.1	— 0.6	— 0.1
1855/56	— 1.2	— 5.1	0.7	0.8	— 1.9	1.4	— 0.9	— 0.1	— 2.1	— 0.8
1856/57	— 2.2	1.3	— 1.1	— 0.4	0.2	— 0.2	0.4	0.6	0.6	2.9
1857/58	— 1.0	3.2	— 1.0	— 4.8	— 1.8	— 0.6	— 1.0	2.8	— 0.3	0.8
1860/61	— 1.7	— 2.9	— 5.2	2.9	2.6	— 2.0	— 1.6	2.1	1.0	0.5
1863/64	0.8	2.7	— 4.2	— 1.2	1.3	— 2.1	— 3.1	— 0.4	— 1.7	— 3.1
1864/65	— 1.4	— 3.5	0.3	— 6.1	— 2.8	1.5	4.8	— 2.6	2.9	— 0.5
1869/70	0.1	— 0.3	1.4	— 6.4	— 1.7	0.9	1.3	— 1.0	0.6	— 1.0
1870/71	1.7	— 4.4	— 4.6	— 2.2	2.9	— 1.1	— 2.7	— 3.3	0.0	0.7
1871/72	— 1.6	— 2.5	1.2	0.7	2.7	2.4	1.9	0.0	1.6	— 0.8
1874/75	— 0.6	— 0.7	2.2	— 4.5	— 2.3	— 0.1	1.1	1.7	0.7	2.5
1875/76	— 1.0	— 1.6	— 1.7	1.4	1.5	1.3	— 2.9	1.0	0.7	1.0
1879/80	— 1.7	— 5.1	— 0.4	0.4	1.1	2.0	— 0.5	0.0	1.0	0.5
1880/81	1.2	3.1	— 4.2	— 1.0	— 0.9	— 2.3	0.9	— 0.9	1.3	— 1.3

Es ergiebt sich, dass allgemein nach einem kalten Winter (Vor-, Mittel-, Nachwinter) die Wahrscheinlichkeit eines

kalten März 0.52,
» April 0.52,
» Mai 0.58,
» Juni 0.53,
» Juli 0.56,
» August 0.58

beträgt.

Fasst man die Temperaturabweichungen der Monate Juni, Juli und August zusammen und nennt diejenigen Sommer kalt, in welchen diese Abweichungssumme kleiner als Null ist, dann darf man nach einem kalten Winter in 100 Fällen 65 Mal auch einen kalten Sommer erwarten.

Bei der Unterscheidung der strengen Winter nach ihrer Intensität lassen sich hinsichtlich deren Einfluss auf die Witterung des folgenden Sommers nicht so wesentliche Unterschiede erkennen, wie bei den milden Wintern und den warmen Sommern.

Es wurden zwei Gruppen gebildet. Die erste umfasst diejenigen Winter, bei denen die Summe der Abweichungen der Temperatur in den vier Monaten November bis Februar $\pm$ 0°0 bis — 6°0 beträgt, die zweite jene Winter, wo dieselbe unter — 6°0 herabgeht. Das numerische Verhältniss der Fälle beider Kategorien ist 31 zu 24 Alsdann ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit

Digitized by Google

	nach einem mässig strengen Winter:	nach einem sehr strengen Winter:
eines kalten Juni	= 0.58	0.46
» » Juli	= 0.52	0.63
» » August	= 0.58	0.58
» » Sommers	= 0.77	0.63
mit der Abweichungssumme	= − 0°64	− 1°33.

Ferner berechnet sich aus obiger Tabelle die Wahrscheinlichkeit, dass von den drei Monaten Juni, Juli und August

	nach einem mässig strengen Winter:	nach einem sehr strengen Winter:
einer zu kalt ist	= 0.81	= 0.87
zwei » » sind	= 0.64	= 0.67
drei » » »	= 0.35	= 0.13.

Schliesslich stelle ich noch die wegen ihrer strengen Kälte berühmtesten Winter Berlins und die darauf gefolgten Sommer neben einander, um des weiteren zu zeigen, dass nach strengem Winter ein kühler Sommer am ehesten zu erwarten steht.

	Abweichungssummen Nov. bis Febr.	Juni bis August
1739/40	− 23°3	− 4°1
1759/60	− 10.1	0.3
1783/84	− 10.7	− 2.4
1788/89	− 12.4	0.8
1798/99	− 14.3	0.2
1799/1800	− 10.9	− 6.0
1804/05	− 15.2	− 5.6
1808/09	− 9.0	− 1.3
1812/13	− 7.4	− 5.7
1813/14	− 8.2	− 2.9
1819/20	− 7.5	− 4.0
1822/23	− 11.4	− 1.9
1829/30	− 21.8	0.2
1837/38	− 12.2	− 2.4
1844/45	− 8.8	0.5
1846/47	− 8.2	2.7
1847/48	− 7.8	− 2.0
1849/50	− 6.9	− 0.5
1854/55	− 10.0	− 0.6
1864/65	− 10.7	− 0.2
1870/71	− 9.5	− 2.6

Digitized by Google

Die im Vorstehenden und a. a. O. erhaltenen Resultate unserer Untersuchung über die Aufeinanderfolge von Witterungsanomalien lassen sich in folgende drei Sätze formuliren:

1. Nach einem {mässig / sehr} milden Winter folgt am wahrscheinlichsten ein {kühler / warmer} Sommer.
2. Nach einem {mässig / sehr} warmen Sommer folgt am wahrscheinlichsten ein {mässig milder / kalter} Winter.
3. Nach einem {mässig / sehr} kalten Winter folgt am wahrscheinlichsten ein {kühler / sehr kühler} Sommer.

Hr. G. Karsten, welcher in Anknüpfung an meine Studie über die milden Winter Berlins seit 1720 eine ähnliche Skizze in den »Schriften des naturwiss. Vereins für Schleswig-Holstein«, Bd. V, 1884 veröffentlicht hat und meine ersten Resultate bestätigt findet, glaubt, dass nicht allein die Intensität der Störung, sondern auch der Zeitabschnitt des Jahres, in welchem sie eintritt, und der Ort der Erdoberfläche, an welchem sie eingeleitet wird, in Betracht gezogen werden müsse. Auch ich halte eine derartige Erweiterung der Untersuchung für überaus wünschenswerth; aber dazu wären vor Allem neue, kritisch bearbeitete Temperaturtafeln von möglichst vielen Orten mit langen Beobachtungsreihen erforderlich, da die Arbeiten Dove's über die nicht periodischen Änderungen der Temperatur mit dem Ende der fünfziger Jahre abschliessen und seitdem ein gewaltiges neues Beobachtungsmaterial hinzugekommen ist. Es scheint mir sehr fraglich, ob bei dem gegenwärtigen Stande der Meteorologie ein Einzelner noch in der Lage wäre, derartige umfassende Temperatur- und zugehörige Abweichungstafeln bis auf die Neuzeit fortzuführen. Vielmehr wird es die Aufgabe eines geeigneten wissenschaftlichen Instituts oder einer gelehrten Körperschaft bleiben, ein solches Unternehmen ins Werk zu setzen. Dass die dazu verwendeten Mittel an Geld und Zeit nicht umsonst verausgabt sein würden, glaube ich in vorstehender Mittheilung zum mindesten gezeigt zu haben.

Digitized by Google

15. Bericht über die Wirksamkeit der Humboldt-Stiftung für Naturforschung und Reisen.

Von E. du Bois-Reymond,
Vorsitzendem des Curatoriums.

(Öffentliche Sitzung zur Feier des Geburtstages Seiner Majestät des Kaisers und Königs [St. XV].)

Das Curatorium der Humboldt-Stiftung für Naturforschung und Reisen erstattet statutenmässig Bericht über die Wirksamkeit der Stiftung im verflossenen Jahre.

Mit dem Ende dieses Jahres lief die vierjährige Wahlperiode der drei wählbaren Mitglieder des Curatoriums ab; dieselben wurden durch statutenmässige Neuwahl seitens der Königlichen Akademie der Wissenschaften in ihren Ämtern bestätigt.

Zu der Ausarbeitung der Ergebnisse seiner mit Stiftungsmitteln ausgeführten dreijährigen Reise nach der pacifischen Inselwelt war Hrn. Dr. Otto Finsch in Bremen, laut unserem vorjährigen Bericht, eine angemessene Unterstützung bewilligt worden. Hr. Dr. Finsch hatte schon wieder einen illustrirten Katalog seiner Gypsmasken (als Supplementheft zu der Zeitschrift für Ethnologie) unter Zufügung von Messungen, Umrisszeichnungen von Händen und Füssen, ethnologischen Notizen u. d. m. herausgegeben, als er aus dieser Beschäftigung durch eine dringende Veranlassung gerissen wurde, abermals nach jener Weltgegend sich zu begeben. Er beabsichtigt, nach Rückkehr von dieser auf ein Jahr veranschlagten Reise die Bearbeitung seiner früheren Ergebnisse wieder aufzunehmen. Gewiss werden diese durch seine neuen Beobachtungen noch an Umfang und innerem Werth gewinnen. Als jene Veranlassung wurde übrigens von den Tagesblättern die Verwerthung einer so erfahrenen und kenntnissreichen Persönlichkeit, wie die des langjährigen Reisenden der Humboldt-Stiftung, im Colonial-Interesse bezeichnet.

Der vorjährige Bericht meldete den Anfang einer neuen mit Stiftungsmitteln ausgerüsteten Unternehmung, auf deren Fortsetzung auch wieder ein Theil der Mittel des verflossenen Jahres verwendet worden ist. Hr. Dr. Eduard Arning hat sich zur Untersuchung der auf den Sandwich-Inseln ausgebrochenen furchtbaren Lepra-Seuche

Digitized by Google

nach Honolulu begeben, und ist dort seit November 1883 mit deren klinischer, pathologisch-anatomischer und bakteriologischer Erforschung beschäftigt gewesen. Nach den letzten Nachrichten, vom 16. Januar d. J., befand er sich noch in Honolulu und gedachte seine Rückreise noch hinauszuschieben, da die Hauptfrage, nämlich die nach der Verbreitung des Aussatzes durch Ansteckung, sich mehr und mehr verwickelt hat. Jetzt studirt er vorzugsweise das Auftreten der Krankheit unter der eingewanderten oder dort geborenen weissen Bevölkerung. Übertragung der Krankheit auf Thiere gelang noch nicht in zweifelloser Weise. Ebensowenig konnten wirkungsfähige Reinculturen von Lepra-Bacillen erlangt werden. Dagegen haben sich die Erfahrungen über Verbreitung der Bacillen im peripherischen Nervensystem und in inneren Organen sehr vermehrt.

Noch ein drittes Unternehmen verdankte im verflossenen Jahre der Humboldt-Stiftung die Mittel zu seiner Ausführung, und ist sogar schon zu glücklichem Abschluss gelangt. Hr. Prof. Schweinfurth, welcher einst mit Hülfe unserer Stiftung im Gefolge der Khartumer Sklavenjäger die jetzt wohl für lange Zeit wieder unzugänglichen Länder des Gazellenstromes bis zu den anthropophagen Monbuttu und dem Pygmaen-Geschlecht der Ticki-Ticki erschlossen hatte, und welcher seitdem von Unteraegypten aus schon eine Reihe kleinerer Expeditionen, wie nach der Insel Sokotra und durch die Libysche Wüste zum Birkat-el Qerun ausführte, wünschte längst durch planmässige Erforschung der aegyptisch-arabischen Wüste, zwischen Nil und Rothem Meer, unsere an dieser Stelle immer noch lückenhafte Kenntniss des afrikanischen Nordostens zu vervollständigen. Auch dies Gebiet, welches an Ausdehnung der Apenninen-Halbinsel gleichkommt, hatte er schon in jährlich wiederholten Ausflügen von 1876 bis 1884 nach verschiedenen Richtungen durchstreift, wobei er sich dreierlei vorsetzte: erstens Aufzeichnung der geognostischen Lagerungsverhältnisse und der horizontalen Verbreitung der einzelnen Schichtenglieder behufs Herstellung einer geognostischen Karte wenigstens innerhalb der Grenzen des eigentlichen Aegyptens; zweitens Einsammeln von palaeontologischen und mineralogischen Belegstücken; drittens Herstellung einer topographischen Karte im Maassstabe von 1 : 100000 vermittelst Triangulation zwischen den gegebenen Punkten am Nil und Rothen Meer. Die grosse, auf diese Aufgaben bezügliche Summe einzelner Beobachtungen und Ergebnisse aller Art sollte nun ergänzt und zusammengefasst werden, und gern bewilligten Akademie und Curatorium dem bewährten Forscher die dazu nöthige Unterstützung.

Es giebt einen Begriff von der Ausdehnung jener Länder, welche wir, immer wieder durch den Maassstab der Karten verführt, uns

Digitized by Google

nur schwer vergegenwärtigen, dass Hr. Schweinfurth mit einer Begleitung von zehn Lastkameelen für Gepäck, Wasser und Futter, und von zwölf eingeborenen Begleitern zur Bedienung der Karawane, eine hunderttägige Reise zwischen Nil und Rothem Meer ohne die geringste Anfechtung zur selben Zeit wagen konnte, wo der Mahdi vor Khartum lag und die Engländer vergeblich sich nilaufwärts abmühten, das drohende Verhängniss vom Haupt ihres dort eingeschlossenen Helden abzuwenden.

Hrn. Schweinfurth's Abwesenheit von Cairo dauerte vom 15. November v. J. bis zum 10. Februar. Die Wüstenreise begann in Heluān, durchschnitt das nördliche und südliche Galala-Gebirge, und folgte vom Wadi Mōr aus der langen Thalsenkung, die sich an der Westseite des krystallinischen Küstengebirges bis nach Queneh im Nilthal hinzieht. Die Strasse von Queneh nach Quossëir bildete die südliche Grenze des durchforschten Gebietes. Mit besonderer Sorgfalt wurden die grossartigen Granitbrüche des Mons Claudianus untersucht, welche bisher erst von zwei Reisenden, von Wilkinson 1823 und von Lepsius 1845 besucht wurden. Die Rückreise folgte der Küste des Rothen Meeres bis Saffarana, von wo der nordöstliche Theil des Galala-Gebirges überschritten wurde, um zurück nach Cairo zu gelangen. Umfangreiche Sammlungen sind auf dem Wege hieher, welche neue und werthvolle Aufschlüsse über den geologischen Bau der aegyptisch-arabischen Wüste versprechen.

Das Capital der Stiftung hat im Jahre 1884 keinen Zuwachs erhalten. Die für das laufende Jahr zu Stiftungszwecken verwendbare Summe beläuft sich ordnungsmässig abgerundet auf 8250 Mark.

Digitized by Google

Digitized by Google

16. Über die Zeitdauer der Reaction zwischen Jodsäure und schwefliger Säure.

Von H. Landolt.

(Vorgetragen am 29. Mai 1884 und 26. März; — gedruckt im Bericht vom 26. März [St. XVI]; — ausgegeben am 4. April.)

Erste Mittheilung.

1. Wird zu wässeriger schwefliger Säure Jodsäurelösung im Überschuss gesetzt, so findet bekanntlich Abscheidung von Jod statt. Die Reaction erfolgt sofort, wenn die Flüssigkeiten concentrirt sind; nimmt man dieselben aber verdünnt, so tritt die frappante Erscheinung auf, dass die mit etwas Stärke versetzte Mischung sich anfangs vollständig klar erhält und erst nach Verfluss einer gewissen Zeit, welche einige Secunden bis Minuten betragen kann, plötzlich tief bläut. Unter Anwendung gleicher Mengen der beiden Lösungen und Innehaltung der nämlichen Temperatur ist die Zeitdauer von dem Momente des Mischens bis zum Eintritt der Blaufärbung vollständig constant, und es kann dieselbe leicht mittelst der Uhr bestimmt werden.

Wie vorläufige Versuche ergaben, hängt der Zeitpunkt des Beginnes der Jodabscheidung von folgenden Umständen ab:

1. Von dem Massenverhältniss der beiden auf einander reagirenden Substanzen. Bei Gleichhaltung der Wassermenge tritt die Bläuung um so rascher ein, je mehr man die Quantität der Jodsäure gegenüber der schwefligen Säure vergrössert.
2. Von der Wassermenge, welche in der Weise wirkt, dass ihre Vermehrung den Eintritt der Reaction verlangsamt.
3. Von der Temperatur, deren Steigerung den Vorgang beschleunigt.

In Anbetracht der Sicherheit, mit welcher der zeitliche Verlauf der Reaction bestimmt werden kann, sowie der leichten Verfolgbarkeit der sie variirenden Einflüsse, erschien dieselbe zum Studium der Massenwirkung sowie anderer Fragen der chemischen Dynamik geeignet, und ich habe daher deren nähere Untersuchung in Arbeit genommen.

Digitized by Google

Prüfung der Reaction zwischen HJO_3 und SO_2.

2. Was zunächst die zwischen den beiden Substanzen vor sich gehende Reaction betrifft, welche wie es scheint bis jetzt noch nicht näher untersucht worden ist,[1] so kann dieselbe je nach dem Mengenverhältniss in verschiedener Weise verlaufen. Fügt man zu wässeriger schwefliger Säure steigende Volume Jodsäurelösung, so bleiben die ersten Mischungen klar und enthalten dann bloss Jodwasserstoffsäure und Schwefelsäure, während in den folgenden die Jodabscheidung eintritt. Zur Feststellung des Molekularverhältnisses, bei welchem das Auftreten von freiem Jod beginnt, sind die nachstehenden Titrirversuche vorgenommen worden:

a) Zu 200^{cbcm} schwefliger Säure, in welchen zufolge Titrirung mit Jodlösung 0.13277^{gr} SO_2 vorhanden waren, wurde aus einer Bürette Jodsäurelösung, im Liter 2.0108^{gr} HJO_3 enthaltend, gegeben, bis die ursprünglich mit Stärke versetzte Flüssigkeit soeben dauernde Blaufärbung zeigte. Der Verbrauch betrug: 60.1, 60.6^{cbcm}.

b) Bei Wiederholung des Versuchs unter Zusatz von 500^{cbcm} Wasser zur schwefligen Säure waren: 60.5, 60.2^{cbcm} Jodsäurelösung erforderlich. Die Verdünnung hat also keinen Einfluss.

Das Mittel der Bestimmungen beträgt 60.35^{cbcm}, und hiernach verlangen:

0.13277^{gr}	SO_2	0.12135^{gr}	HJO_3
1 Mol.	SO_2 (63.9)	0.33294 Mol.	HJO_3 (175.42)
oder 3 »	SO_2	0.9988 »	$HJO_3 = 1$.

Bei der ohne Jodabscheidung vor sich gehenden Zersetzung reagiren demnach 3 Mol. SO_2 auf 1 Mol. HJO_3, und der einfachste Ausdruck hierfür ist:[2]

$$3SO_2 + HJO_3 = 3SO_3 + HJ.$$

Es wäre aber auch denkbar, dass die Reaction aus folgenden zwei nacheinander stattfindenden Phasen besteht:

---

[1] In der Litteratur liess sich nur die von Gay-Lussac herstammende und von Kämmerer (Erdm. Journ. f. prakt. Chemie. Bd. 83 S. 72. 1861) bestätigte Angabe auffinden, dass wenn man in wässerige Jodsäurelösung schwefligsaures Gas einleitet, Bildung von Schwefelsäure und Abscheidung von Jod eintritt, welch letzteres bei weiterer Einwirkung von schwefliger Säure in Jodwasserstoff übergeht. In den Lehrbüchern finden sich hierfür die Gleichungen:

$$5SO_2 + 2HJO_3 + 4H_2O = 5H_2SO_4 + 2J$$
$$2J + SO_2 + 2H_2O = H_2SO_4 + 2HJ.$$

[2] Der Einfachheit wegen setze ich in den Gleichungen SO_3 statt H_2SO_4.

Digitized by Google

$$\begin{aligned} 5SO_2 + 2HJO_3 &= 5SO_3 + H_2O + 2J \\ SO_2 + 2J + H_2O &= SO_3 + 2HJ \\ \hline 6SO_2 + 2HJO_3 &= 6SO_3 + 2HJ, \end{aligned}$$

deren Endresultat ebenfalls auf das einfachste Verhältniss von $3SO_2 : HJO_3$ führt.

Welcher von den beiden genannten Vorgängen der richtige ist, dürfte sich wohl kaum entscheiden lassen.

Sowie nun aber mehr als 1 Mol. HJO_3 auf 3 Mol. SO_2 vorhanden ist, tritt die Jodabscheidung ein, und zwar wird diese erfolgen durch Einwirkung der entstandenen Jodwasserstoffsäure auf die überschüssige Jodsäure:

$$5HJ + HJO_3 = 3H_2O + 6J.$$

3. Die erwähnte Erscheinung des anfänglichen Klarbleibens und sodann plötzlichen Färbens der Mischungen von schwefliger Säure mit Jodsäure zeigt sich, wenn in denselben auf 3 Mol. SO_2 mehr als 1 Mol. HJO_3 und mehr als etwa 20000 Mol. Wasser (2000 Gew. Th. auf 1 Th. SO_2) vorhanden sind. Die Zeitdauer kann, wie bereits bemerkt, durch Änderung der Mischungsverhältnisse innerhalb gewisser Grenzen variirt werden und beträgt beispielsweise bei Vorhandensein von:

1.5	Mol.	HJO_3	und	60000	Mol.	H_2O	auf	3	Mol.	SO_2	:	124.0 Sec.
2.1	»	»	»	60000	»	»	»	3	»	»	:	68.4 »
3.0	»	»	»	60000	»	»	»	3	»	»	:	38.3 »
6.0	»	»	»	60000	»	»	»	3	»	»	:	12.2 »
9.0	»	»	»	60000	»	»	»	3	»	»	:	6.2 »
—				—								—
3	»	»	»	30000	»	»	»	3	»	»	:	6.2 »
3	»	»	»	45000	»	»	»	3	»	»	:	19.0 »
3	»	»	»	60000	»	»	»	3	»	»	:	38.3 »
3	»	»	»	75000	»	»	»	3	»	»	:	65.6 »

wenn den beiden Flüssigkeiten vor dem Zusammengiessen eine Temperatur von 20° ertheilt worden war.

4. Es fragt sich nun, was vor sich geht, wenn die Mischung noch in dem Zustande vollständiger Klarheit befindlich ist. Dass die Jodsäure und schweflige Säure nicht erst eine Zeit lang unthätig zusammenbleiben und dann plötzlich unter Jodabscheidung auf einander reagiren, geht aus der Thatsache hervor, dass schon bald nach dem Vermischen sich erhebliche Mengen von Jodwasserstoff in der noch farblosen Flüssigkeit nachweisen lassen. Versetzt man dieselbe mit Ammoniak im Überschuss und sodann mit Silbernitrat, so bleibt eine starke Trübung von Jodsilber, während das gleichzeitig gebildete jodsaure und schwefligsaure Silber in dem Ammoniak gelöst bleiben.

Digitized by Google

Ferner ist mittelst Chlorbaryum eine Vermehrung des Gehaltes an Schwefelsäure erkennbar. Es beginnen also sofort Reactionen,[1] welche nach und nach die schweflige Säure zu Schwefelsäure oxydiren und bei denen auch schon von Anfang an Abscheidung von Jod möglich ist. Dasselbe kann aber so lange nicht erscheinen, als die Flüssigkeit noch schweflige Säure enthält; erst dann, wenn letztere vollständig verschwunden ist, wird schliesslich die Färbung resp. Bläuung auftreten.

Die sämmtlichen Processe, welche hierbei ins Spiel treten können, sind folgende:

$$\text{I. } 3SO_2 + HJO_3 = 3SO_3 + HJ$$
$$\text{II. } 5SO_2 + 2HJO_3 = 5SO_3 + H_2O + 2J$$
$$\text{III. } SO_2 + 2J + H_2O = SO_3 + 2HJ$$
$$\text{IV. } 5HJ + HJO_3 = 3H_2O + 6J.$$

Von den beiden letzten Reactionen ist es nun bekannt, dass dieselben auch bei grossen Verdünnungen momentan vor sich gehen. Trotzdem habe ich es für nöthig gehalten zu untersuchen, ob etwa bei Gegenwart sehr erheblicher Wassermengen sich eine Verzögerung dieser Processe bemerkbar macht. Zu diesem Behufe wurden folgende Versuche angestellt:

1) Zur Prüfung der Geschwindigkeit der Reaction:

$$SO_2 + 2J + H_2O = SO_3 + 2HJ$$

versetzte man eine verdünnte Jod-Jodkaliumlösung, welche durch Zusatz von Stärke blau gefärbt worden war, in einem weiten Gefässe plötzlich mit soviel verdünnter schwefliger Säure, dass etwas mehr als 1 Mol. SO_2 auf 2 At. Jod kamen und also Entfärbung der Mischung eintreten musste. Bei Herstellung der drei folgenden Mengenverhältnisse zeigte es sich, dass in allen Fällen im Momente des Zusammengiessens augenblicklich das freie Jod verschwand.

---

[1] Ein weiterer Beweis für die sogleich stattfindende Einwirkung der schwefligen Säure auf die Jodsäure liegt in der eintretenden Temperaturerhöhung, welche die noch farblose Mischung erkennen lässt. Dieselbe ist zwar, da die Erscheinung des anfänglichen Klarbleibens sich nur bei stark verdünnten Lösungen zeigt, eine sehr kleine, aber immerhin kann sie mit Hülfe eines empfindlichen, hundertstel Grade angebenden Thermometers mit Bestimmtheit constatirt werden. So zeigte sich z. B. beim Eingiessen von 150^{gr} Jodsäurelösung (enthaltend 0.33556^{gr} HJO_3) in 300^{gr} schweflige Säure (enthaltend 0.1660^{gr} SO_2) eine Temperaturzunahme von 0°2. Die beiden Flüssigkeiten hatten ursprünglich die übereinstimmende Temperatur 17°35, ebenso die umgebende Luft. Nach dem Mischen begann das Thermometer sofort langsam zu steigen, stand, als nach Verfluss von 19 Secunden die Jodabscheidung eingetreten war, auf 17°50, und erhob sich dann noch bis zu 17°55. Eine Wiederholung des Versuchs gab dasselbe Resultat. Die obige Mischung entspricht dem Mol. Verhältniss:

$$3SO_2 : 2.2\,HJO_3 : 28900\,H_2O.$$

Digitized by Google

	Mischung I	Mischung II	Mischung III
SO_2	0.011684 gr.	0.011684 gr.	0.005842 gr.
J	0.044572 »	0.044572 »	0.022286 »
H_2O	535.2 »	1035.2 »	2022.6 »
Mol. H_2O auf 1 Mol. SO_2	162970	488910	1231800

Schon die erste dieser Mischungen enthielt sehr viel mehr Wasser (die fünffache Menge), als bei den Versuchen über die Zeitdauer des Vorganges zwischen Jodsäure und schwefliger Säure in Anwendung kam, indem bei diesen auf 1 Mol. SO_2 höchstens 30000 Mol. Wasser vorhanden waren.

2) Um zu untersuchen, ob die Reaction:

$$5HJ + HJO_2 = 3H_2O + 6J$$

durch starke Verdünnungen Verzögerung erleidet, wurden titrirte Lösungen von Jodkalium (mit verdünnter Schwefelsäure versetzt) und Jodsäure in Verhältnissen, welche der obigen Gleichung entsprachen, abgemessen, mit verschiedenen Wassermengen verdünnt und nach dem Zufügen von Stärke zusammengegossen. Die hergestellten Mischungen enthielten:

	Mischung I	Mischung II	Mischung III
HJO_3	0.020078 gr	0.020078 gr	0.0040156 gr
HJ	0.072988 »	0.072988 »	0.014598 »
H_2O	411.2 »	1039.9 »	1024.0 »
Mol. H_2O auf 1 Mol. HJO_3	200030	505880	2490700

Die erste Mischung wurde momentan blau, ebenso war dies bei der zweiten der Fall. Dagegen blieb Mischung III anfangs klar, und erst nach Verfluss von etwa 19 Secunden begann Bläuung, welche nach und nach stärker wurde. Verdünnungen dieser Art kamen jedoch bei den Flüssigkeiten, welche zu den nachfolgenden Zeitbestimmungen dienten, niemals vor; es blieb bei diesen die Zahl der Wassermoleküle auf 1 Mol. HJO_3 stets unter 50000, und die Zeitdauer der in Rede stehenden Reaction war daher in den betreffenden Fällen immer eine unmessbar kleine.

3) Da dem Obigen zufolge die Processe III und IV mit grosser Geschwindigkeit vor sich gehen, so kann die Ursache des anfänglichen Klarbleibens der Mischungen von Jodsäure und schwefliger Säure vielleicht in einem langsamen Verlauf entweder der Reaction I oder II liegen. Eine directe Prüfung der letzteren ist nicht möglich, weil

Digitized by Google

sie sich von den anderen Vorgängen nicht trennen lassen.[1] Man kann nur nachweisen, dass die Producte, welche aus HJO_3 und SO_2 vor der auftretenden Jodabscheidung entstehen, nämlich HJ nebst SO_3 in der noch farblosen Flüssigkeit allmälig sich vermehren. Betreffs der Jodwasserstoffsäure haben dies folgende Versuche dargethan:

Wird z. B. das Mol.-Verhältniss $3SO_2 : 2.1\,HJO_3 : 60000\,H_2O$ gewählt, so bleibt bei der Temperatur 20° eine solche Mischung 70 Secunden lang klar. Fügt man während dieser Zeit Ammoniak im Überschuss hinzu, so erfolgt Stillstand der Reaction, indem schwefligsaures und jodsaures Ammonium nicht aufeinander einwirken, und man kann nachher, wie schon früher erwähnt, mittelst Silbernitrat die vorhandene Jodwasserstoffsäure für sich allein ausfällen. Zur Ausführung der Versuche diente 1. schweflige Säure, von welcher 200.20^{gr} 0.12651^{gr} SO_2 enthielten und noch mit 210.20^{gr} Wasser versetzt wurden, 2. Jodsäurelösung mit 0.20078^{gr} HJO_3 in 100^{gr}, von welcher 121.08^{gr} mit 190.04^{gr} Wasser zu vermischen waren, um dem obigen Mol.-Verhältniss zu entsprechen. Diese beiden Flüssigkeiten, welchen die Temperatur 20° ertheilt worden war, wurden zusammengegossen, und zunächst nach Verfluss von 20 Secunden mit Ammoniak und Silberlösung versetzt. Bei einer auf's Neue hergestellten Mischung geschah dies nach Verfluss von 40, und bei einer dritten nach 60 Secunden.

Die angewandte Menge von 0.12651^{gr} SO_2 musste bei vollständiger Vollendung entweder der Reaction:

$$3SO_2 + HJO_3 = 3SO_3 + HJ$$

oder der beiden Vorgänge:

$$5SO_2 + 2HJO_3 = 5SO_3 + H_2O + 2J$$
$$SO_2 + 2J + H_2O = SO_3 + 2HJ$$

0.11577^{gr} HJO_3 zerlegen und im Ganzen die Bildung von 0.08417^{gr} HJ veranlassen. Bei den erwähnten drei Versuchen wurden folgende Mengen von Jodwasserstoff erhalten:

Fällung nach:	I 20 Sec.	II 40 Sec.	III 60 Sec.
Erhaltenes Jodsilber	0.0264 gr	0.0654 gr	0.1145 gr
Entsprechend Jodwasserstoff	0.01438 "	0.03562 "	0.06235 "
Procente der ganzen entstehbaren Menge HJ (0.08417) resp. Procente oxydirter SO_2	17.1 Proc.	42.3 Proc.	74.1 Proc.

[1] Kämmerer hat bei der Einwirkung von trockenem schwefligsaurem Gas auf pulverisirte wasserfreie Jodsäure bei 100° beobachtet, dass erst nach Verlauf einer viertel bis halben Stunde plötzlich die Masse eine hellgelbe Färbung annahm, und dann nachher rasche Zersetzung unter Freiwerden von Jod erfolgte. Es scheint also hier anfangs ein langsamer Vorgang stattzufinden. (Erdm. J. f. prakt. Ch. Bd. 83 S. 73.)

Digitized by Google

Bezüglich der Schwefelsäure lässt sich der Nachweis ihrer allmäligen Vermehrung quantitativ weniger genau durchführen, weil die schweflige Säure schon von Anfang einen Gehalt an dieser Substanz besitzt und ausserdem die Oxydation durch die Luft Fehler verursachen kann.

5. Die nicht leicht zu erklärenden Vorgänge, welche beim Zusammenbringen schwefliger Säure mit überschüssiger Jodsäure stattfinden, können wenn man ein langsames Fortschreiten entweder der Reaction:

$$3SO_2 + HJO_3 = 3SO_3 + HJ$$
$$\text{oder } 5SO_2 + 2\,HJO_3 = 5SO_3 + H_2O + 2J$$

voraussetzt, wofür sich aber wie erwähnt kein directer Nachweis geben lässt, in folgender Weise aufgefasst werden:

Bei Annahme des erstgenannten Processes hat man den Verlauf:

$$\text{Primäre Reaction: I. } 3SO_2 + HJO_3 = 3SO_3 + HJ$$
$$\text{Secundäre Reactionen } \begin{cases} \text{II. } 5HJ + HJO_3 = 3H_2O + 6J \\ \text{III. } SO_2 + 2J + H_2O = SO_3 + 2HJ. \end{cases}$$

Solange die Flüssigkeit noch farblos ist, d. h. schweflige Säure enthält, gehen die Reactionen I (langsam) II, III (rasch) vor sich, und es bildet sich Jodwasserstoff in zunehmender Menge. Ist die schweflige Säure durch die Processe I und III vollständig oxydirt, so überwiegt schliesslich der Vorgang II, und es tritt freies Jod auf. Da nun die Processe II und III unter den obwaltenden Verdünnungen augenblicklich stattfinden, so würde die Zeitmessung von dem Momente des Mischens bis zur erfolgenden Jodabscheidung als die Dauer der Reaction I anzusehen sein.

Wird der zweite Fall angenommen, d. h. wirken zuerst 5 Mol. SO_2 auf 2 Mol. HJO_3 ein, so hat man:

$$\text{Primäre Reaction: I. } 5SO_2 + 2HJO_3 = 5SO_3 + H_2O + 2J$$
$$\text{Secundäre Reactionen } \begin{cases} \text{II. } SO_2 + 2J + H_2O = SO_3 + 2HJ \\ \text{III. } 5HJ + HJO_3 = 3H_2O + 6J. \end{cases}$$

Die auftretende Bläuung bedeutet hier das Ende der Processe I und II, und da II (sowie III) momentan vor sich geht, so misst man die Zeitdauer der Reaction I.

Die obige Darstellung der Vorgänge gebe ich nur als eine vorläufige und schliesse die Möglichkeit nicht aus, in dem später folgenden zweiten Theile der Arbeit eine ganz andere Betrachtungsweise an deren Stelle zu setzen.

Welche von den beiden primären Reactionen stattfindet, muss wie früher erwähnt, unentschieden bleiben. Für das Molekularver-

Digitized by Google

hältniss, in welchem schweflige Säure und Jodsäure beim Beginn der Jodabscheidung aus der Flüssigkeit verschwunden sind, ist es gleichgültig, ob der eine oder der andere Vorgang auftritt, denn in beiden Fällen wird dasselbe in diesem Zeitpunkte = 3 : 1 sein, wie aus folgender Zusammenstellung hervorgeht:

I.

$$\begin{aligned} 15SO_2 + 5HJO_3 &= 15SO_3 + 5HJ \\ 5HJ + HJO_3 &= 3H_2O + 6J \\ 3SO_2 + 6J + 3H_2O &= 3SO_3 + 6HJ \\ \hline 18SO_2 + 6HJO_3 &= 18SO_3 + 6HJ \\ 3SO_2 + HJO_3 &= 3SO_3 + HJ \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} 15SO_2 + 6HJO_3 &= 15SO_3 + 3H_2O + 6J \\ 3SO_2 + 6J + 3H_2O &= 3SO_3 + 6HJ \\ \hline 18SO_2 + 6HJO_3 &= 18SO_3 + 6HJ \\ 3SO_2 + HJO_3 &= 3SO_3 + HJ. \end{aligned}$$

Jede Menge von HJO_3, welche über 1 Mol. auf 3 Mol. SO_2 hinausgeht, ist daher überschüssig.

Obgleich dem Obigen zufolge die Vorgänge zwischen schwefliger Säure und Jodsäure complicirt erscheinen, so dürften sich doch bezüglich der Abhängigkeit ihrer Zeitdauer von den Mischungsverhältnissen bestimmte Beziehungen ableiten lassen. Die Prüfung der letzteren war um so mehr von Interesse, als die Reaction einen Fall bietet, welcher bis jetzt noch wenig bei Untersuchungen dieser Art berücksichtigt worden ist, nämlich den eines unter den gegebenen Verhältnissen nicht umkehrbaren Processes.

Ausführung der Zeitbestimmungs-Versuche.

6. Die Genauigkeit, mit welcher die Zeitdauer der Reaction sich bestimmen lässt, machte es erforderlich, auch auf alle übrigen in Betracht kommenden Operationen, wie namentlich die exacte Herstellung der Mischungsverhältnisse, möglichste Sorgfalt zu legen. Dies ist in folgender Weise geschehen.

Angewandte Materialien: a) Jodsäure. Dieselbe wurde aus der chemischen Fabrik von Dr. Schuchardt in Görlitz bezogen, und zur Prüfung ihrer Reinheit nachstehenden Versuchen unterworfen.

Digitized by Google

1. Zur Erkennung möglicherweise vorhandener Salpetersäure wurde in die Lösung der Substanz schwefligsaures Gas bis zum völligen Klarwerden eingeleitet, die entstandene Jodwasserstoffsäure mit Silbersulfat ausgefüllt, das Filtrat mit Soda neutralisirt und nach dem Concentriren auf gewöhnliche Weise mit Eisenvitriol sowie Diphenylamin geprüft. Die Präparate erwiesen sich als vollkommen salpetersäurefrei.

2. Erhitzen im Porzellantiegel:

3.7253^{gr} Krystalle (Sendung I) hinterliessen 0.0010^{gr} Rückstand = 0.03 Proc.

4.1949^{gr} Krystalle (Sendung II) hinterliessen 0.0023^{gr} Rückstand = 0.05 Proc.

3. Titrirungen durch Zersetzung mit Jodkalium nach der bekannten zuerst von Hrn. RAMMELSBERG[1] angewandten jodometrischen Methode.

4. Zersetzung der Substanz mittelst metallischen Silbers. Dieses Verfahren, welches sich rasch bewerkstelligen lässt, habe ich in folgender Weise ausgeführt: In eine Glasröhre von ungefähr 200^{mm} Länge und 5^{mm} Weite, welche an einem Ende zugeschmolzen ist, wird zunächst die Probe Jodsäure und sodann eine mindestens 80^{mm} lange Schicht schwammförmigen Silbers, wie man es durch Erhitzen von Silberoxyd erhält, eingefüllt. Indem man nunmehr diese letztere mit einem BUNSEN'schen Brenner stark erhitzt und hierauf das Ende, wo die Jodsäure sich befindet, vorsichtig erwärmt, tritt das frei gewordene Jod vollständig mit dem zunächstgelegenen Silber in Verbindung. Um kleine Mengen von Wasser, welche nach der Zersetzung noch in der Röhre befindlich sein können, zu entfernen, wird dieselbe mit einer Luftpumpe verbunden, erwärmt und einige Male trockne Luft eingelassen. Aus der Gewichtszunahme des Silbers ergiebt sich die Quantität HJO_3.

Sowohl dieses Verfahren als auch die Titrirungen dienten namentlich dazu, um über den Wassergehalt der Jodsäure in's Klare zu kommen. Es hatte sich nämlich gezeigt, dass wenn die gepulverte Substanz unter dem Exsiccator über Schwefelsäure längere Zeit aufbewahrt wird, bereits theilweise Bildung von Jodsäureanhydrid eintreten kann, und dass im Dampftrockenschrank erwärmte Präparate diesen letzteren Körper schon in erheblicher Menge enthalten. Folgende Versuche geben hierüber Aufschluss:

---

[1] Pogg. Ann. 135. 493. (1868.)

Digitized by Google

	1		2
	Lufttrockene Substanz		Substanz 1 Tag unter dem Exsiccator
	I	II	
Gewicht der Röhre.....	10.4412 gr	10.4460 gr	9.4232 gr
Mit Jodsäure.....	10.8792 "	10.8736 "	9.8917 "
Mit Silber.....	13.0989 "	13.0390 "	12.3979 "
Nach dem Erhitzen.....	12.9751 "	12.9175 "	12.2672 "
Jodsäure angewandt.....	0.4380 gr	0.4276 gr	0.4685 gr
HJO_3 gefunden.....	0.4356 "	0.4243 "	0.4683 "
	= 99.45 Proc.	= 99.24 Proc.	= 99.97 Proc.

	3		4	5
	Substanz 3 Tage unter dem Exsiccator		Substanz 4 Wochen unter dem Exsiccator	Substanz im Dampftrockenschrank erwärmt
	I	II		
Gewicht der Röhre	10.9540 gr	12.0625 gr	12.3313 gr	12.1613 gr
Mit Jodsäure.....	11.2759 "	12.5347 "	12.7159 "	12.7471 "
Mit Silber.....	14.1459 "	15.4352 "	15.3743 "	15.6744 "
Nach dem Erhitzen	14.0563 "	15.3065 "	15.2711 "	15.5697 "
Jodsäure angewandt....	0.3219 gr	0.4722 gr	0.3846 gr	0.5858 gr
HJO_3 gefunden	0.3220 "	0.4762 "	0.3901 "	0.6628 "
	= 100.04 Proc.	= 100.84 Proc.	= 101.43 Proc.	= 113.14 Proc.
Bestimmungen durch Titrirung	100.40 Proc.		102.26 Proc. 103.96 "	

Die zwei letzten Präparate mussten, da sie ein zu hohes Resultat gaben, bereits Jodsäureanhydrid enthalten. Für die Folge ist stets die nur einige Tage unter dem Exsiccator über Schwefelsäure in dünner Schicht getrocknete Substanz benutzt worden.

Die verschiedenen Jodsäurelösungen, deren Gehalt nach Gewichtsprocent bekannt sein musste, und zwischen 0.1 und 0.6 Procent schwankte, wurden durch Abwägen in Quantitäten von 2 bis 8 Litern hergestellt.

b) Schweflige Säure. Concentrirte Säure wurde mit soviel Wasser verdünnt, dass der Gehalt an SO_2 in 100^{cbcm} 0.05 bis 0.08^{gr} betrug. Zur Aufbewahrung diente eine 10 Liter haltende Flasche, welche auf hohem Stative befindlich, durch einen Heber mit einer tiefer stehenden Hahnpipette communicirte. Dies geschah mittelst einer oberhalb des Abflusshahnes der letztern angeschmolzenen seitlichen Röhre, die ebenfalls mit Hahn versehen war. Die Pipette besass zwei Marken, innerhalb deren sie circa 200^{cbcm} auslaufen liess. Um die schweflige Säure vor Oxydation zu schützen, ging durch den auf dem Halse der Vorrathsflasche befindlichen, den Heber tragenden Kautschukstopfen noch eine Röhre, die zu zwei mit Lösung von Pyro-

Digitized by Google

gallussäure in Kalilauge gefüllten WOULFE'schen Flaschen führte, durch welche die Luft passiren musste. Durch eine dritte Öffnung des Stopfens tauchte ein Thermometer in die schweflige Säure.

Die Gehaltsbestimmung der Flüssigkeit geschah nach der BUNSEN'schen jodometrischen Methode unter Anwendung von Jodlösungen mit 2 bis 8^{mgr} Jod im Liter. Da es sich herausstellte, dass der bekanntlich veränderliche Titer sogar in dem Zeitraume von 24 Stunden in nachweisbarem Grade abnahm, so wurde die Jodlösung jeden Tag neu bereitet. Zu den Titrirungen dienten circa 90^{cm} lange Büretten, welche in zehntel Cubikcentimeter getheilt waren und hundertstel mittelst eines Fernrohres ablesen liessen. Zur Füllung derselben war über dem Abflusshahne eine seitliche, ebenfalls mit Hahn versehene Röhre angeschmolzen, deren Verlängerung in die Jodlösung tauchte; die letztere wurde durch eine am oberen Ende der Bürette befindliche lange Kautschukröhre aufgesogen.

c) Wasser. Dasselbe war in einer ganz gleich wie für die schweflige Säure eingerichteten Flasche enthalten, welche mit zwei Pipetten (von 100 und 200^{cbcm} Inhalt) in Verbindung stand.

Sämmtliche Messgeräthschaften waren sorgfältig calibrirt, und zu denselben Correctionstabellen berechnet worden, welche den Inhalt bei verschiedenen Temperaturen bezw. das Gewicht Flüssigkeit, welches sie ausfliessen liessen, angaben.

7. Die Bestimmung der Reactionsdauer einer gegebenen Mischung von schwefliger Säure, Jodsäure und Wasser bestand aus folgenden Operationen, welche im Ganzen eine Zeit von 4 bis 5 Stunden beanspruchten. Vor Beginn derselben wurden, da die Versuche stets bei 20° ausgeführt werden sollten, sämmtliche Flüssigkeiten sowie die Zimmerluft nahezu auf diese Temperatur gebracht.

1) Herstellung der titrirten Jodlösung.
2) Ermittelung der Menge SO_2 in 1 Pipette (200^{cbcm}, zum Theil 100^{cbcm}) schwefliger Säure von bestimmter Temperatur durch 2 bis 5 malige Titrirung.
3) Berechnung der Gewichtsmenge Jodsäurelösung von bekanntem Gehalt und der Menge Wasser, welche auf die in einer Pipette enthaltene Quantität SO_2 abgewogen werden mussten, damit die später hergestellte Mischung einem gegebenen Molekularverhältniss von $3SO_2 : nHJO_3 : mH_2O$ entsprach.
4) Abwägen der Jodsäurelösung. Hierzu dienten auf der Innenseite mit einer dünnen Schicht Paraffin überzogene Bechergläser, aus denen sich die Flüssigkeit ohne den mindesten Gewichtsverlust wieder ausgiessen liess. Die benutzte Waage liess mit Sicherheit 1^{cgr} erkennen.

Digitized by Google

5) Einfliessenlassen einer Pipette (200^{cbcm}) schwefliger Säure in ein weites Becherglas, in welches zuvor ein Theil (200 oder 300^{gr}) der berechneten Wassermenge gebracht worden war. Zusatz von $10^{cbcm} = 10.01^{gr}$ sehr verdünnter Stärkelösung.

Die noch übrige Quantität Wasser wurde mittelst der Pipetten und schliesslich einer Bürette zu der Jodsäurelösung gegeben.

6) Erwärmen der in beiden Bechergläsern enthaltenen Flüssigkeit auf genau die Temperatur 20°. Dies liess sich sehr rasch mittelst der Hand oder einer kleinen Gasflamme bewerkstelligen, da die Lösungen schon vorher annähernd auf den bezeichneten Wärmegrad gebracht worden waren.

7) Vornahme der Reaction durch plötzliches Eingiessen der Jodsäurelösung in die schweflige Säure und Zeitbestimmung bis zum Eintritt der Bläuung.

8. Zu den Zeitmessungen benutzte ich eine mit elektrischem Federcontact versehene Secundenpendel-Uhr, welche mit einem elektrischen Chronographen in Verbindung stand. Der letztere, nach Art eines Morse'schen Telegraphenapparates eingerichtet, stammte aus der Werkstatt von R. Fuess in Berlin;[1] seine Regulirung war so gestellt, dass die Secundenpunkte auf dem Papierstreifen eine Länge von circa 10^{mm} hatten und demnach hundertstel Secunden abgelesen werden konnten. Hierfür diente ein besonderes sehr bequem eingerichtetes Instrument, das ich der Güte des Hrn. G. Hansemann verdanke. Von dem Chronographen ging eine Drahtleitung zu einem neben dem Becherglas, in welchem die chemische Reaction ausgeführt wurde, aufgestellten elektrischen Taster.

9. Als Beispiel eines Versuchs führe ich folgenden an, bei welchem der herzustellenden Mischung das Molekularverhältniss

$$3\,SO_2 : 3\,HJO_3 : 60000\,H_2O$$

zu Grunde gelegt ist:

Titer der Jodlösung: 0.004718^{0gr} J im Liter.

Für 200^{cbcm} schwefliger Säure von 18° Temperatur = 200.10^{gr} verbrauchte Jodlösung: a) 92.63, b) 92.72, c) 92.64^{cbcm}, Mittel: 92.66 entsprechend 0.11038^{gr} SO_2.

Gehalt der angewandten Jodsäurelösung: 0.20004^{gr} HJO_3 in 100^{gr}

[1] Die Beschreibung des Fuess'schen Chronographen findet sich in dem Bericht über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879. S. 35.

Digitized by Google

Molekular-verhältniss	Gewichts-verhältniss	Angewandte Mengen	Entsprechende Mengen Lösung	Darin enthaltenes Wasser
$3\,SO_2$	191.7	0.11038 gr	200.10 gr	199.99 gr
$3\,HJO_3$	526.26	0.30302 »	151.48 »	151.18 »
$60000\,H_2O$	1077600	620.49 »	Wasser der Stärkelösung:	10.01 »
		620.90 »	Noch zuzusetzendes Wasser:	259.31 »
				620.49 gr

Hergestellte Flüssigkeiten.

I. Lösung der schwefligen Säure	II. Jodsäurelösung
200.10 gr schwefl. Säure = 1(200 cbcm) Pip. v. 18°	151.48 gr Jodsäurelösung
99.92 » Wasser = 1(100 ») Pip. v. 18°	99.92 » Wasser = 1(100 cbcm) Pip. v. 18°
10.01 » Stärkelösung	59.47 » Wasser v. 19° = 59.45 Bürettengrade
310.03 gr	310.87 gr

620.90 gr (Gesammtgewicht der Mischung).

Temperatur der beiden Flüssigkeiten: 20°0.

Beobachtete Zeitdauer bis zum Eintritt der Blaufärbung: Versuch 1) 38.04 Sec.; » 2) 37.90 »; » 3) 37.95 »; » 4) 37.70 » — Mittel 37.90 Sec.

Der Raumersparniss wegen gebe ich in der Folge die Versuchselemente in abgekürzter Form an.

10. Vor Ausführung der Hauptversuche war noch festzustellen, ob eine Verschiedenheit der absoluten Gewichtsmengen, in welchen ein bestimmtes Molekularverhältniss zwischen SO_2, HJO_3 und H_2O hergestellt wird, auf die Reactionsgeschwindigkeit von nachweisbarem Einfluss ist. Zur Entscheidung dieser Frage wurde ein dem Verhältniss:

$$3\,SO_2 + 1.5\,HJO_3 + 45000\,H_2O$$

entsprechende Mischung in drei verschieden grossen Massen auf die Dauer ihres Klarbleibens geprüft. Es ergab sich folgendes Resultat:

Molekular-verhältniss	Gewichts-verhältniss	Angewandte Mengen I	II	III
$3\,SO_2$	191.7	0.12944 gr	0.25888 gr	0.38832 gr
$1.5\,HJO_3$	263.13	0.17767 »	0.35534 »	0.53301 »
$45000\,H_2O$	808200	545.71 »	1091.42 »	1637.13 »
Gesammtgewicht der Mischung		546.02 gr	1092.04 gr	1638.05 gr
Beobachtete Zeitdauer bei der Temperatur 20°		58.26	58.21	58.31 Sec.

Der betreffende Umstand ist also von keinem Einfluss.

Digitized by Google

Einige weitere Versuche haben gezeigt, dass es auch ganz gleichgültig ist, ob man die Jodsäure in die schweflige Säure giesst oder umgekehrt verfährt.

11. Was die Fehlerquellen betrifft, welche bei den Versuchen auftreten können, so sind diese folgende:

1. Ungenauigkeit in der Zusammensetzung der Mischung. Diese wird in erster Linie verursacht durch den Fehler bei der Titrirung der schwefligen Säure, welcher sich auf die Berechnung der Jodsäure- sowie der Wassermenge fortpflanzt; in zweiter durch die sonstigen Wägungs- und Messungsfehler.

2. Verminderung des Gehalts der schwefligen Säure durch Oxydation. Eine solche ist namentlich zu befürchten bei dem plötzlichen Eingiessen der Jodsäurelösung, wobei viele Luftblasen durch die Flüssigkeit hindurch getrieben werden. Dass hierbei in der That eine Wirkung stattfindet, zeigen nachstehende Versuche, bei welchen man zu schwefliger Säure, welche in einem weiten Becherglase befindlich war, verschiedene Wassermengen rasch zuschüttete:

I. 200^{cbcm} schweflige Säure ohne Wasserzusatz brauchten:

Jodlösung mit 2.0962gr J im Liter

a) $93.21^{cbcm} = 0.04933^{gr}\ SO_2$
b) $93.08 \quad = 0.04927 \quad »$

$93.15^{cbcm} = 0.04930^{gr}\ SO_2 = 100$ gesetzt.

II. Nach dem Eingiessen von 400^{cbcm} Wasser:

a) $92.21^{cbcm} = 0.04880^{gr}\ SO_2$
b) $92.37 \quad = 0.04889 \quad »$

$92.29^{cbcm} = 0.04885^{gr}\ SO_2 = 99.09.$

III. Nach dem Eingiessen von 600^{cbcm} Wasser:

a) $91.85^{cbcm} = 0.04861^{gr}\ SO_2$
b) $91.78 \quad = 0.04858 \quad »$

$91.82^{cbcm} = 0.04860^{gr}\ SO_2 = 98.58.$

Um den durch Oxydation entstehenden Fehler zu vermeiden, habe ich bei vielen Versuchen die Oberfläche der in dem Becherglase befindlichen schwefligen Säure mit einer Schicht Petroleum bedeckt, wodurch die Bildung von Luftblasen beim Zuschütten der anderen Flüssigkeit bedeutend vermindert wird. Da aber bei den Zeitbestimmungen sich keine wesentlich andere Resultate ergaben, als ohne Anwendung dieser Vorsichtsmaassregel, so wurde diese wieder aufgegeben.

3. Zeitverlust beim Zusammengiessen der beiden Flüssigkeiten, bis gleichförmige Mischung erfolgt ist. Das zur möglichsten Verminderung

Digitized by Google

dieses Fehlers angewandte Verfahren bestand darin, dass man zur Aufnahme der schwefligen Säure weite Bechergläser von 10 bis 11^{cm} Durchmesser anwandte, in welchen die Flüssigkeitsschicht nur eine Höhe von etwa 3^{cm} einnahm, und die Jodsäurelösung, deren Volum ungefähr ebenso viel betrug, in einem Guss hinzufügte. Wie besondere Versuche zeigten, trat beim Einschütten einer gefärbten Flüssigkeit in reines Wasser unter Benutzung der gleichen Gefässe und Volume sofort ganz gleichmässige Färbung der Mischung ein.

4. Ein persönlicher Fehler beim Signalgeben wird endlich noch hinzutreten, wenn die Versuche von verschiedenen Beobachtern ausgeführt werden.

Alle diese vier Umstände zusammengenommen verursachen, wie sich aus der nachfolgenden Beobachtungsreihe III ableiten lässt, einen mittleren Fehler in der Bestimmung der Zeit von ± 0.2 bis 0.7, im Mittel 0.47 Procent ihres Werthes.

Die Fehlerquelle 1. ist entschieden die erheblichste. Schliesst man dieselbe aus, d. h. wiederholt man eine Zeitbestimmung mehrmals unter Anwendung der nämlichen Lösungen, so zeigt das Resultat bloss einen mittleren Fehler von ± 0.01 bis 0.03 Procent.

12. Unter gewissen Verhältnissen kann aber bei den Versuchen noch eine weitere und zwar erhebliche Unsicherheit auftreten. Wenn nämlich die Mischungen eine derartige Zusammensetzung haben, dass die Dauer des Klarbleibens über 1 Minute beträgt, so zeigt sich nicht mehr eine plötzliche tiefe Blaufärbung, sondern dieselbe erscheint allmälig. Die Resultate welche man erhält, wenn als Merkmal der Eintritt der erst entstehenden hellblauen Färbung genommen wird, sind entschieden viel zu niedrig; es ist daher in diesem Zeitpunkte die Reaction jedenfalls noch nicht vollendet, sondern sie schreitet, wie dies auch aus der Zunahme der Bläuung hervorgeht, noch weiter fort; ihr Ende aber lässt sich nicht erkennen. Steigert man durch grössere Verdünnung der Flüssigkeit die Dauer des Klarbleibens bis zu mehreren Minuten, so tritt die Erscheinung immer deutlicher zu Tage. Zu Berechnungen über chemische Massenwirkung werden nur solche Versuche brauchbar sein, bei welchen die Zersetzung der Jodsäure rasch mit plötzlich erfolgender intensiver Blaufärbung vor sich geht, und dies ist bei allen denjenigen Mischungen der Fall, deren Reactionsdauer weniger als 1 Minute beträgt. Hierdurch ist allerdings die ganze Arbeit in erheblichem Grade eingeschränkt worden, aber dennoch war es möglich, eine zu den Beobachtungen vollständig genügende Menge Beobachtungsmaterial zu sammeln.

Digitized by Google

Bei der Ausführung der Arbeit wurde ich in erfreulicher Weise durch einen meiner Assistenten, Hrn. Dr. ANTRICK, unterstützt, dessen mit grosser Sorgfalt und Geschicklichkeit ausgeführten Versuche ich mit vollstem Vertrauen unter die meinigen einreihe. Es sei mir gestattet, demselben hier meinen Dank auszusprechen.

Erste Abtheilung.

Bestimmung des Einflusses zunehmender Jodsäuremengen bei constantem Verhältniss zwischen schwefliger Säure und Wasser und der constanten Temperatur 20°.

Es wurden drei Reihen von Mischungen mit 30000, 45000 und 60000 Mol. H_2O auf 3 Mol. SO_2 geprüft.

Erste Versuchsreihe.[1]

Mischungsverhältniss: $3\,SO_2 : n\,HJO_3 : 30000\,H_2O$.

Mischung 1.

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : 1.2\,HJO_3 : 30000\,H_2O$.[2]
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 210.50 : 538800.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.14002^{gr} SO_2 in 199.92^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 1.1682^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.14002 gr	0.15376 gr	393.56 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.92 "	13.16 "	
Zugesetztes Wasser	99.87 "	80.90 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	299.79 "	94.06 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 393.85 gr.
Beobachtete Zeit: 23.24 — 23.35 — 23.38 — 23.23. Mittel: **23.30** Sec.

Mischung 2.

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : 1.5\,HJO_3 : 30000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 263.13 : 538800.
Gehalt der schwefligen Säure wie bei Mischung 1.

[1] Die zugehörigen Beobachtungen sind sämmtlich von mir ausgeführt worden. Sie sind die ersten, die ich vornahm, und es können bei denselben die Versuchsfehler etwas grösser sein, als bei den späteren Reihen.

[2] Als Molekulargewichte wurden genommen: $SO_2 = 63.9$, $HJO_3 = 175.42$, $H_2O = 17.96$.

Digitized by Google

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.14002 gr	0.19220 gr	393.56 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.92 »	16.45 »	
Zugesetztes Wasser	99.87 »	77.65 »	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	299.79 »	94.10 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 393.89 gr.
Beobachtete Zeit: 17.12 — 17.11. Mittel: **17.12** Sec.

Mischung 3.

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : 1.8\,HJO_3 : 30000\,H_2O$.

Gewichtsverhältniss: 191.7 : 315.76 : 538800.

Gehalt der schwefligen Säure und Jodsäurelösung wie bei Mischung 1.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.14002 gr	0.23064 gr	393.56 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.92 »	19.77 »	
Zugesetztes Wasser	99.87 »	74.37 »	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	299.79 »	94.14 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 393.93 gr.
Beobachtete Zeit: 13.13 — 13.21 — 13.02. Mittel: **13.12** Sec.

Mischung 4.

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : 2.4\,HJO_3 : 30000\,H_2O$.

Gewichtsverhältniss: 191.7 : 421.01 : 538800.

Gehalt der schwefligen Säure: $0.13880^{gr}\ SO_2$ in 199.98^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: $1.1682^{gr}\ HJO_3$ in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.13880 gr	0.30483 gr	390.12 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.98 »	26.10 »	
Zugesetztes Wasser	99.92 »	64.56 »	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	299.90 »	90.66 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 390.56 gr.
Beobachtete Zeit: 8.34 — 8.61 — 8.50. Mittel: **8.48** Sec.

Mischung 5.

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : 3.0\,HJO_3 : 30000\,H_2O$.

Gewichtsverhältniss: 191.7 : 631.51 : 538800.

Gehalt der schwefligen Säure: $0.14673^{gr}\ SO_2$ in 199.92^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: $1.1682^{gr}\ HJO_3$ in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.14673 gr	0.40281 gr	412.41 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.92 »	34.48 »	
Zugesetztes Wasser	99.87 »	78.69 »	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	299.79 »	113.17 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 412.96 gr.
Beobachtete Zeit: 6.26 — 6.18 — 6.26. Mittel: **6.23** Sec.

Digitized by Google

Mischung 6.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 3.6HJO_3 : 30000H_2O$.

Gewichtsverhältniss: 191.7 : 631.51 : 538800.

Gehalt der schwefligen Säure: 0.14600^{gr} SO_2 in 199.98^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: 1.1682^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.14600 gr	0.48097 gr	410.35 gr
Entsprechende Mengen Lösungen	199.98 "	41.17 "	
Zugesetztes Wasser	99.92 "	69.91 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	299.90 "	111.08 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 410.98 gr.
Beobachtete Zeit: 4.83 — 4.81. Mittel: **4.82** Sec.

Mischung 7.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 4.2HJO_3 : 30000H_2O$.

Gewichtsverhältniss: 191.7 : 736.76 : 538800.

Gehalt der schwefligen Säure und Jodsäurelösung wie bei Mischung 6.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.14600 gr	0.56113 gr	410.35 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.98 "	48.03 "	
Zugesetztes Wasser	99.92 "	63.13 "	
Gewicht der Jodsäurelösung	299.90 "	111.16 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 411.06 gr.
Beobachtete Zeit: 3.85 — 3.91 — 3.88. Mittel: **3.88** Sec.

Zweite Versuchsreihe.[1]

Mischungsverhältniss: $3SO_2 : nHJO_3 : 45000H_2O$.

Mischung 1.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 1.5HJO_3 : 45000H_2O$.

Gewichtsverhältniss: 191.7 : 263.13 : 808200.

Versuch I (L).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.12944^{gr} in 200.03^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: 0.20078^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.12944 gr	0.17767 gr	545.71 gr
Entsprechende Mengen Lösungen	200.03 "	88.49 "	
Zugesetztes Wasser	109.91 "	147.59 "	
Gewicht der beiden Lösungen	309.94 "	136.08 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 546.02 gr.
Beobachtete Zeit: 58.26 — 58.21 — 58.31. Mittel: 58.26 Sec.

[1] Die betreffenden Versuche sind mit Ausnahme des ersten (mit L bezeichneten) sämmtlich von Hrn. Dr. Antrick ausgeführt worden.

Digitized by Google

Versuch II.

Gehalt der schwefligen Säure: 0.13898^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47868^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.13898 gr	0.19076 gr	585.94 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	39.85 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	236.48 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	276.33 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 586.26 gr.
Beobachtete Zeit: 59.51 — 59.57. Mittel: 59.54 Sec.
Mittel aller Bestimmungen: **58.77** Sec.

Mischung 2.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 1.8\,HJO_3 : 45000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 315.76 : 808200.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.13898^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47868^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.13898 gr	0.22892 gr	585.94 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	47.82 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	228.54 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	276.36 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 586.29 gr.
Beobachtete Zeit: 43.51 — 43.56. Mittel: **43.54** Sec.

Mischung 3.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 2.1\,HJO_3 : 45000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 368.38 : 808200.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.13885^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47868^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.13885 gr	0.26682 gr	585.40 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	55.74 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	220.12 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	275.86 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 585.79 gr.
Beobachtete Zeit: 33.88 — 33.76 — 33.84. Mittel: **33.83** Sec.

Mischung 4.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 2.4\,HJO_3 : 45000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 421.01 : 808200.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.10265^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.46296^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

Digitized by Google

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10265 gr	0.22545 gr	432.79 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	48.69 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	74.49 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	123.18 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 433.11 gr.
Beobachtete Zeit: 27.09 — 27.07. Mittel: **27.08** Sec.

Mischung 5.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 2.7\,HJO_3 : 45000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 473.63 : 808200.
Gehalt der schwefligen Säure: $0.10265^{gr}\,SO_2$ in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: $0.46296^{gr}\,HJO_8$ in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10265 gr	0.25363 gr	432.79 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	54.78 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	68.43 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	123.21 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 433.14 gr.
Beobachtete Zeit: 22.68 — 22.67 — 22.62. Mittel: **22.66** Sec.

Mischung 6.

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : 3\,HJO_3 : 45000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 526.26 : 808200.

Versuch I.

Gehalt der schwefligen Säure: $0.10274^{gr}\,SO_2$ in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: $0.46296^{gr}\,HJO_3$ in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10274 gr	0.28205 gr	433.15 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	60.92 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	62.68 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	123.60 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 433.53 gr.
Beobachtete Zeit: 18.72 — 19.03 — 18.98. Mittel: 18.91 Sec.

Versuch II.

Gehalt der schwefligen Säure: $0.14130^{gr}\,SO_2$ in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: $0.47868^{gr}\,HJO_3$ in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.14130 gr	0.38789 gr	595.70 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	81.03 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	205.26 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	286.29 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 596.22 gr.
Beobachtete Zeit: 19.00 — 18.95 — 19.00. Mittel: 18.98 Sec.
Mittel aller Bestimmungen: **18.95** Sec.

Digitized by Google

Mischung 7.

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : 3.6\,HJO_3 : 45000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 631.51 : 808200.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.10471^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.46296^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10471 gr	0.34493 gr	441.44 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 »	74.50 »	
Zugesetztes Wasser	109.90 »	57.45 »	
Gewicht der Flüssigkeiten	309.93 »	131.95 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 441.88 gr.
Beobachtete Zeit: 14.16 — 14.14. Mittel: **14.15** Sec.

Mischung 8.

Molekularverhältniss: $3\,SO : 4.2\,HJO_3 : 45000\,HO_2$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 736.76 : 808200.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.10464^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.46296^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10464 gr	0.40217 gr	441.16 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 »	86.87 »	
Zugesetztes Wasser	109.90 »	44.86 »	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 »	131.73 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 441.66 gr.
Beobachtete Zeit: 11.06 — 11.00 — 11.04. Mittel: **11.03** Sec.

Mischung 9.

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : 4.5\,HJO_3 : 45000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 789.39 : 808200.

Versuch I.

Gehalt der schwefligen Säure: 0.14153^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47868^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.14153 gr	0.58281 gr	596.70 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 »	121.75 »	
Zugesetztes Wasser	109.90 »	165.74 »	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 »	287.49 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 597.42 gr.
Beobachtete Zeit: 9.80 — 9.82. Mittel: 9.81 Sec.

Digitized by Google

Versuch II.

Gehalt der schwefligen Säure: 0.13457^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47868^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.13457 gr	0.55415 gr	567.36 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	115.77 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	142.34 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	258.11 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 568.04 gr.
Beobachtete Zeit: 9.85 — 9.82. Mittel: 9.83 Sec.
Mittel aller Bestimmungen: **9.82** Sec.

Mischung 10.

Molekularverhältniss: **$3SO_2 : 4.8\,HJO_3$; 45000 H_2O.**
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 842.02 : 808200.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.11189^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.46296^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11189 gr	0.49149 gr	471.74 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	106.18 "	
Zugesetztes Wasser	66.24 "	99.89 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	266.27 "	206.07 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 472.34 gr.
Beobachtete Zeit: 8.96 — 8.91. Mittel: **8.94** Sec.

Mischung 11.

Molekularverhältniss: **$3SO_2 : 5.4\,HJO_3 : 45000\,H_2O$.**
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 947.27 : 808200.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.11685^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.46296^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11685 gr	0.57739 gr	492.63 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	124.72 "	
Zugesetztes Wasser	109.91 "	58.65 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.94 "	183.37 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 493.31 gr.
Beobachtete Zeit: 7.35 — 7.25 — 7.24. Mittel: **7.28** Sec.

Mischung 12.

Molekularverhältniss: **$3SO_2 : 6\,HJO_3 : 45000\,H_2O$.**
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 1052.52 : 808200.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.11681^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.46296^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

Digitized by Google

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11681 gr	0.64131 gr	492.44 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	138.53 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	44.73 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	183.26 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 493.19 gr.
Beobachtete Zeit: 6.21 — 6.15 — 6.11. Mittel: **6.16** Sec.

Mischung 13.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 7.2\,HJO_3 : 45000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 1263.00 : 808200.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.11182^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.46296^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11182 gr	0.73672 gr	471.42 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	159.13 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	3.20 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	162.33 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 472.26 gr.
Beobachtete Zeit: 4.50 — 4.56 — 4.50. Mittel: **4.52** Sec.

Dritte Versuchsreihe.

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : n\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.

Diese Reihe wurde ausführlicher als die beiden vorhergehenden durchgearbeitet, und zwar sind die meisten Mischungen sowohl von Hrn. Dr. ANTRICK wie von mir geprüft worden, um die sämmtlichen in §. 11 der Einleitung bezeichneten Fehler kennen zu lernen. Die ANTRICK'schen Beobachtungen finden sich in der Folge mit (A), die meinigen mit (L) bezeichnet. Aus der Gesammtzahl derselben wurde der mittlere Fehler des Resultats berechnet.

Als man zuerst die Verhältnisse $3\,SO_2 : 1.2$ bis $2.1\,HJO_3$ prüfte, trat der in §. 12 erwähnte Umstand auf, dass die Jodabscheidung nicht plötzlich, sondern allmälig erfolgte, und daher kein sicheres Kennzeichen der Beendigung der Reaction vorlag. Bei den folgenden Beobachtungen, deren Versuchselemente ich weglasse, wurde als Merkmal zur Zeitbestimmung der erste Beginn der Blaufärbung benutzt; die erhaltenen Resultate sind aber entschieden zu niedrig und für die Rechnung nicht brauchbar. Aus den Zahlen lässt sich noch ersehen, dass wenn auch wiederholte Versuche mit den gleichen Flüssigkeiten Resultate geben, welche nur um Bruchtheile einer Secunde von ein-

Digitized by Google

ander abweichen, bei Herstellung der nämlichen Mischung mit Hülfe von Lösungen andern Gehalts die Differenzen bis zu mehreren Secunden steigen können. Unter den betreffenden Verhältnissen tritt also der durch die Ungenauigkeit in der Zusammensetzung der Mischung bewirkte Fehler stark hervor.

a) $3SO_2 : 1.2\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.

Mischung I. (L)	186.95 — 186.75 — 186.61 — 186.65.	Mittel:	186.74 Sec.
» II. (L)	189.55 — 188.41.	»	189.03 »
» III. (L)	195.05 — 195.15.	»	195.10 »

b) $3SO_2 : 1.5\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.

Mischung I. (L)	124.40 — 123.54 — 123.92.	Mittel:	123.95 Sec.
» II. (L)	120.05 — 120.15 — 120.22 — 120.35.	»	120.19 »

c) $3SO_2 : 1.8\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.

Mischung I. (L)	87.81 — 88.31 — 87.42 — 87.61.	Mittel:	87.79 Sec.
» II. (A)	91.78 — 91.96 — 92.39 — 92.29.	»	92.10 »

d) $3SO_2 : 2.1\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.

Mischung I. (L)	68.19 — 68.24 — 68.74 — 68.49.	Mittel:	68.42 Sec.
» II. (L)	70.23 — 69.84.	»	70.03 »
» III. (A)	71.57 — 71.55.	»	71.56 »

Von dem Verhältniss von $3SO_2 : 2.4\,HJO_3$ an, wo die Dauer der Reaction unter eine Minute sinkt, zeigen sich die erwähnten Übelstände nicht mehr, und es sind daher die nachstehenden Versuche zu weiteren Schlüssen benutzbar.

Mischung I.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 2.4\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.

Gewichtsverhältniss: $191.7\,SO_2 : 421.01 : 1077600$.

Versuch I (L).

Gehalt der schwefligen Säure: $0.04844^{gr}\,SO_2$ in 99.88^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: $0.20127^{gr}\,HJO_3$ in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.09688 gr	0.21277 gr	544.60 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.76 »	105.72 »	
Zugesetztes Wasser	99.87 »	139.56 »	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	299.63 »	245.28 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 544.91 gr.

Beobachtete Zeit: 55.23 — 55.16 — 54.40 — 54.34. Mittel: 54.79 Sec.

Versuch II (A).

Gehalt der schwefligen Säure: $0.11212^{gr}\,SO_2$ in 200.03^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: $0.47868^{gr}\,HJO_3$ in 100^{gr}.

Digitized by Google

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11212 gr	0.24623 gr	630.24 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 »	51.44 »	
Zugesetztes Wasser	109.91 »	269.21 »	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.94 »	320.65 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 630.59 gr.
Beobachtete Zeit: 56.54 — 56.44. Mittel: 56.49 Sec.

Versuch III (A).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.11574^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.46296^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11574 gr	0.25418 gr	650.62 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 »	54.90 »	
Zugesetztes Wasser	195.99 »	200.06 »	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	396.02 »	254.96 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 650.98 gr.
Beobachtete Zeit: 57.22 — 57.35 — 57.12 Mittel: 57.23 Sec.
Mittel aller Bestimmungen: **55.98** ± 0.40 Sec.

Mischung 2.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 2.7\,HJO_3 : 60000H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 473.63 : 1070600.

Versuch I (L).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.09958^{gr} SO_2 in 199.80^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.13207^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.09958 gr	0.24602 gr	559.74 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.80 »	186.28 »	
Zugesetztes Wasser	109.93 »	64.08 »	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.73 »	250.36 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 560.09 gr.
Beobachtete Zeit: 44.60 — 44.60 — 44.65 — 44.53 — 44.75 — 44.53 — 44.75.
Mittel: 44.64 Sec.

Versuch II (A).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.10808^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47868^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10808 gr	0.26704 gr	607.56 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 »	55.78 »	
Zugesetztes Wasser	109.90 »	242.21 »	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 »	297.99 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 607.92 gr.
Beobachtete Zeit: 45.59 — 45.52. Mittel: 45.55 Sec.

Digitized by Google

Versuch III (A).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.09989^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.46296^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.09989 gr	0.24681 gr	561.54 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	53.31 "	
Zugesetztes Wasser	108.47 "	200.06 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	308.50 "	253.37 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 561.87 gr.
Beobachtete Zeit: 46.91 — 47.23 — 47.14. Mittel: 47.09 Sec.
Mittel aller Bestimmungen: **45.40** ± 0.31 Sec.

Mischung 3.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 3HJO_3 : 60000H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 526.26 : 1077600.

Versuch I (L).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.11038^{gr} SO_2 in 200.10^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.20004^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11038 gr	0.30302 gr	620.49 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.10 "	151.48 "	
Zugesetztes Wasser	109.93 "	159.39 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	310.03 "	310.87 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 620.90 gr.
Beobachtete Zeit: 38.04 — 37.70 — 37.95 — 37.90. Mittel: 37.90 Sec.

Versuch II (L).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.04920^{gr} SO_2 in 99.88^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.20019^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.09840 gr	0.27014 gr	553.16 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.76 "	134.94 "	
Zugesetztes Wasser	99.77 "	119.06 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	299.53 "	254.00 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 553.53 gr.
Beobachtete Zeit: 38.34 — 38.15 — 38.34. Mittel: 38.28 Sec.

Versuch III (L).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.13105^{gr} SO_2 in 200.10^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.20078^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

Digitized by Google

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.13105 gr	0.35977 gr	736.68 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.10 "	179.18 "	
Zugesetztes Wasser	210.11 "	147.78 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	410.21 "	326.96 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 737.17 gr.
Beobachtete Zeit: 38.84 — 38.83 — 38.39 — 38.49 — 38.49. Mittel: 38.71 Sec.

Versuch IV (A).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.17098^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.44870^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.17098 gr	0.46938 gr	961.13 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	104.61 "	
Zugesetztes Wasser	257.01 "	400.12 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	457.04 "	504.73 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 961.77 gr.
Beobachtete Zeit: 37.53 — 37.54 — 37.53. Mittel: 37.53 Sec.

Versuch V (A).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.11204^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47868^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11204 gr	0.30758 gr	629.83 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	64.25 "	
Zugesetztes Wasser	109.91 "	256.05 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.94 "	320.30 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 630.24 gr.
Beobachtete Zeit: 39.04 — 38.98 — 39.06. Mittel: 39.03 Sec.
Mittel aller Bestimmungen: **38.28** ± 0.12 Sec.

Mischung 4 (A).

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 3.3\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 578.89 : 1077600.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.16912^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.4487^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.16912 gr	0.51069 gr	950.68 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	113.82 "	
Zugesetztes Wasser	237.39 "	400.12 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	437.42 "	513.94 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 951.36 gr.
Beobachtete Zeit: 31.96 — 31.65 — 31.75 — 31.60. Mittel: **31.74** ± 0.08 Sec.

Digitized by Google

Mischung 5.

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : 3.6\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.

Gewichtsverhältniss: 191.7 : 631.51 : 1077600.

Versuch I (L).

Gehalt der schwefligen Säure: $0.05614^{gr}\,SO_2$ in 99.93^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: $0.20127^{gr}\,HJO_3$ in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11229 gr	0.36992 gr	631.22 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.86 "	183.79 "	
Zugesetztes Wasser	99.97 "	148.08 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	299.83 "	331.87 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 631.70 gr.

Beobachtete Zeit: 28.80 — 28.41 — 28.61 — 28.11 — 28.32. Mittel: 28.45 Sec.

Versuch II (A).

Gehalt der schwefligen Säure: $0.10835^{gr}\,SO_2$ in 200.03^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: $0.47868^{gr}\,HJO_3$ in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10835 gr	0.35690 gr	609.10 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	74.57 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	225.05 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	299.62 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 609.55 gr.

Beobachtete Zeit: 28.57 — 28.61. Mittel: 28.59 Sec.

Versuch III (A).

Gehalt der schwefligen Säure: $0.17195^{gr}\,SO_2$ in 200.03^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: $0.44870^{gr}\,HJO_3$ in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.17195 gr	0.56645 gr	966.58 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	126.24 "	
Zugesetztes Wasser	240.92 "	400.12 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	440.95 "	526.36 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 967.31 gr.

Beobachtete Zeit: 27.92 — 28.11 — 28.15. Mittel: 28.06 Sec.

Mittel aller Bestimmungen: **28.36** ± 0.09 Sec.

Mischung 6 (A).

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : 3.9\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.

Gewichtsverhältniss: 191.7 : 684.14 : 1077600.

Gehalt der schwefligen Säure: $0.16912^{gr}\,SO_2$ in 200.03^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: $0.44870^{gr}\,HJO_3$ in 100^{gr}.

Digitized by Google

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.16912 gr	0.60354 gr	950.68 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	134.51 "	
Zugesetztes Wasser	216.79 "	400.12 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	416.82 "	534.63 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 951.45 gr.
Beobachtete Zeit: 24.70 — 24.30 — 24.31. Mittel: **24.44** ± 0.13 Sec.

Mischung 7.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 4.2\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 736.77 : 1077600.

Versuch I (L).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.04863^{gr} SO_2 in 99.88^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.20019^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.09727 gr	0.37383 gr	546.78 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.76 "	186.74 "	
Zugesetztes Wasser	99.87 "	60.88 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	299.63 "	247.62 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 547.25 gr.
Beobachtete Zeit: 21.98 — 21.90 — 21.75. Mittel: 21.88 Sec.

Versuch II (A).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.09984^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.46296^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.09984 gr	0.38371 gr	561.21 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	82.88 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	168.87 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	251.75 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 561.68 gr.
Beobachtete Zeit: 22.67 — 22.63. Mittel: 22.65 Sec.

Versuch III (A).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.10855^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47868^{gr} HJO_3 in 100^{gr}

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10855 gr	0.41720 gr	610.20 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	87.15 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	213.63 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	300.78 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 610.71 gr.
Beobachtete Zeit: 22.37 — 22.29 — 22.26. Mittel: 22.31 Sec.
Mittel aller Bestimmungen: **22.23** ± 0.12.

Digitized by Google

Mischung 8 (A).

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 4.5\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.

Gewichtsverhältniss: 191.7 : 789.39 : 1077600.

Gehalt der schwefligen Säure: 0.11468^{gr} SO_2 in 200.10^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: 0.44870^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11468 gr	0.47220 gr	644.64 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.07 "	105.24 "	
Zugesetztes Wasser	139.82 "	200.10 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	339.89 "	305.34 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 645.23 gr.

Beobachtete Zeit: 19.91 — 20.08 — 20.13. Mittel: **20.04** ± 0.07 Sec.

Mischung 9.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 4.8\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.

Gewichtsverhältniss: 191.7 : 842.02 : 1077600.

Versuch I (L).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.05561^{gr} SO_2 in 99.91^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: 0.33180^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11122 gr	0.48851 gr	625.19 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.82 "	146.74 "	
Zugesetztes Wasser	99.92 "	179.31 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	299.74 "	326.05 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 625.79 gr.

Beobachtete Zeit: 17.70 — 17.57 — 17.55. Mittel: 17.61 Sec.

Versuch II (A).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.10829^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: 0.46296^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10829 gr	0.47566 gr	608.74 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	102.74 "	
Zugesetztes Wasser	109.91 "	196.63 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.94 "	299.37 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 609.31 gr.

Beobachtete Zeit: 18.12 — 18.08. Mittel: 18.10 Sec.

Mittel aller Bestimmungen: **17.80** ± 0.12 Sec.

Mischung 10 (A).

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 5.1\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.

Gewichtsverhältniss: 191.7 : 894.64 : 1077600.

Gehalt der schwefligen Säure: 0.11450^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.

Gehalt der Jodsäurelösung: 0.44870^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

Digitized by Google

	SO_2	HJO_3	HO_2
Angewandte Mengen	0.11450 gr	0.53436 gr	643.68 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	119.09 "	
Zugesetztes Wasser	125.15 "	200.06 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	325.18 "	319.15 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 644.33 gr.
Beobachtete Zeit: 16.23 — 16.15 — 16.10. Mittel: **16.16** ± 0.04 Sec.

Mischung 11. (A).

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 5.4\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 947.27 : 1077600.
Gehalt der schwefligen Säure: $0.10585^{gr}\,SO_2$ in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: $0.47825^{gr}\,HJO_3$ in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10585 gr	0.52306 gr	595.03 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	109.37 "	
Zugesetztes Wasser	86.20 "	200.06 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	286.23 "	309.43 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 595.66 gr.
Beobachtete Zeit: 14.73 — 14.66 — 14.62. Mittel: **14.67** ± 0.03 Sec.

Mischung 12.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 6\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 1052.52 : 1077600.

Versuch I (L).

Gehalt der schwefligen Säure: $0.05561^{gr}\,SO_2$ in 99.91^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: $0.33180^{gr}\,HJO_3$ in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11122 gr	0.61063 gr	625.19 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.82 "	184.03 "	
Zugesetztes Wasser	109.93 "	132.13 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.75 "	316.16 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 625.91 gr.
Beobachtete Zeit: 12.18 — 12.14 — 12.11. Mittel: 12.14 Sec.

Versuch II (A).

Gehalt der schwefligen Säure: $0.10816^{gr}\,SO_2$ in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: $0.46296^{gr}\,HJO_3$ in 100^{gr}.

Digitized by Google

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10816 gr	0.59384 gr	608.00 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	128.27 "	
Zugesetztes Wasser	109.90 "	170.49 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.93 "	298.76 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 608.69 gr.
Beobachtete Zeit: 12.38 — 12.29 — 12.35. Mittel: 12.34 Sec.
Mittel aller Beobachtungen: **12.24** ± 0.05 Sec.

Mischung 13 (A).

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 6.6\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 1157.77 : 1077600.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.10968^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47825^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10968 gr	0.66240 gr	616.54 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	138.55 "	
Zugesetztes Wasser	78.57 "	200.06 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	278.60 "	338.61 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 617.31 gr.
Beobachtete Zeit: 10.53 — 10.47. Mittel: **10.50** ± 0.03 Sec.

Mischung 14 (A).

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 7.2\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 1263.02 : 1077600.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.10959^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47825^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10959 gr	0.72202 gr	616.03 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	150.97 "	
Zugesetztes Wasser	65.79 "	200.06 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	265.82 "	351.03 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 616.85 gr.
Beobachtete Zeit: 9.06 — 9.09. Mittel: **9.08** ± 0.02 Sec.

Mischung 15.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 7.5\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 1315.65 : 1077600.

Digitized by Google

Versuch I (L).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.05513^{gr} SO_2 in 99.91^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.33180^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11026 gr	0.75673 gr	619.81 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.82 "	228.07 "	
Zugesetztes Wasser	109.93 "	82.86 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.75 "	310.93 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 620.68 gr.
Beobachtete Zeit: 8.20 — 8.22 — 8.23. Mittel: 8.22 Sec.

Versuch II (L).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.10922^{gr} SO_2 in 200.10^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.20078^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10922 gr	0.74957 gr	613.94 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.10 "	373.33 "	
Zugesetztes Wasser	41.37 "	—	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	241.47 "	373.33 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 614.80 gr.
Beobachtete Zeit: 8.51 — 8.37. Mittel: 8.44 Sec.

Versuch III (A).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.08669^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47868^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.08669 gr	0.59497 gr	487.32 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	124.30 "	
Zugesetztes Wasser	63.77 "	99.89 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	263.80 "	224.19 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 487.99 gr.
Beobachtete Zeit: 8.48 — 8.43. Mittel: 8.45 Sec.
Mittel aller Bestimmungen: 8.35 ± 0.05 Sec.

Mischung 16 (A).

Molekularverhältniss: 3 SO_2 : 7.8 HJO_3 : 60000 H_2O.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 1368.28 : 1077600.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.10004^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47825^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

Digitized by Google

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.10004 gr	0.71407 gr	562.37 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	149.31 "	
Zugesetztes Wasser	113.95 "	99.89 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	313.98 "	249.20 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 563.18 gr.
Beobachtete Zeit: 7.91 — 8.08 — 8.01. Mittel: 8.00 ± 0.05 Sec.

Mischung 17 (A).

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : 8.4\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 1473.53 : 1077600.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.09996^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47825^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.09996 gr	0.76837 gr	561.91 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 "	160.66 "	
Zugesetztes Wasser	102.19 "	99.89 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	302.22 "	260.55 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 562.77 gr.
Beobachtete Zeit: 7.15 — 7.02 — 7.04 — 7.06. Mittel: 7.07 ± 0.03 Sec.

Mischung 18.

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 9\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 1578.78 : 1077600.

Versuch I (L).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.05513^{gr} SO_2 in 99.91^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.39844^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.11026 gr	0.90808 gr	619.81 gr
Entsprechende Mengen Lösung	199.82 "	227.91 "	
Zugesetztes Wasser	109.93 "	83.17 "	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	309.75 "	311.08 "	

Gesammtgewicht der Mischung: 620.83 gr.
Beobachtete Zeit: 6.20 — 6.23 — 6.16 — 6.19. Mittel: 6.20 Sec.

Versuch II (A).

Gehalt der schwefligen Säure: 0.08652^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47868^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

Digitized by Google

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.08652 gr	0.71256 gr	486.37 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 »	148.86 »	
Zugesetztes Wasser	38.38 »	99.89 »	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	238.41 »	248.75 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 487.16 gr.
Beobachtete Zeit: 6.21 — 6.23. Mittel: 6.22 Sec.
Mittel aller Bestimmungen: **6.20** ± 0.01 Sec.

Mischung 19 (A).

Molekularverhältniss: $3SO_2 : 9.6\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 1684.03 : 1077600.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.09941^{gr} SO_2 in 200.07^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47825^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.09941 gr	0.87334 gr	558.85 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.07 »	182.61 »	
Zugesetztes Wasser	177.13 »	—	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	377.20 »	182.61 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 559.81 gr.
Beobachtete Zeit: 5.61 — 5.54 — 5.50. Mittel: **5.55** ± 0.03 Sec.

Mischung 20 (A).

Molekularverhältniss: $3\,SO_2 : 10.2\,HJO_3 : 60000\,H_2O$.
Gewichtsverhältniss: 191.7 : 1789.28 : 1077600.
Gehalt der schwefligen Säure: 0.09876^{gr} SO_2 in 200.03^{gr}.
Gehalt der Jodsäurelösung: 0.47825^{gr} HJO_3 in 100^{gr}.

	SO_2	HJO_3	H_2O
Angewandte Mengen	0.09876 gr	0.92180 gr	555.16 gr
Entsprechende Mengen Lösung	200.03 »	192.75 »	
Zugesetztes Wasser	163.39 »	—	
Gewicht der beiden Flüssigkeiten	363.42 »	192.75 »	

Gesammtgewicht der Mischung: 556.17 gr.
Beobachtete Zeit: 5.12 — 5.03. Mittel: **5.08** ± 0.04 Sec.

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der erhaltenen Resultate über die Abhängigkeit der Zeitdauer der Reaction zwischen Jodsäure und schwefliger Säure von dem Molekularverhältniss dieser Körper.

Digitized by Google

Temperatur 20°.

Anzahl Moleküle HJO_3 auf		Anzahl Moleküle Wasser auf 3 Mol. SO_2						
		I 30000		II 45000		III 60000		
10 Moleküle SO_2	3 Moleküle SO_2	Beobacht. Zeit Sec.	Zahl der Beobacht.	Beobacht. Zeit Sec.	Zahl der Beobacht.	Beobacht. Zeit Sec.	Mittlerer Fehler des Resultats.	Zahl der Beobacht.
4	1.2	23.30	4	—	—	—	—	—
5	1.5	17.12	2	58.77	5	—	—	—
6	1.8	13.12	3	43.54	2	—	—	—
7	2.1	—	—	33.83	3	—	—	—
8	2.4	8.48	3	27.08	2	55.98	± 0.40	9
9	2.7	—	—	22.66	3	45.40	0.31	12
10	3.0	6.23	3	18.95	6	38.28	0.12	18
11	3.3	—	—	—	—	31.74	0.08	4
12	3.6	4.82	2	14.15	2	28.36	0.09	10
13	3.9	—	—	—	—	24.44	0.13	3
14	4.2	3.88	3	11.03	3	22.23	0.12	8
15	4.5	—	—	9.82	4	20.04	0.07	3
16	4.8	—	—	8.94	2	17.80	0.12	5
17	5.1	—	—	—	—	16.16	0.04	3
18	5.4	—	—	7.28	3	14.67	0.03	3
20	6.0	—	—	6.16	3	12.24	0.05	6
22	6.6	—	—	—	—	10.50	0.03	2
24	7.2	—	—	4.52	3	9.08	0.02	2
25	7.5	—	—	—	—	8.35	0.05	7
26	7.8	—	—	—	—	8.00	0.05	3
28	8.4	—	—	—	—	7.07	0.03	4
30	9.0	—	—	—	—	6.20	0.01	6
32	9.6	—	—	—	—	5.55	0.03	3
34	10.2	—	—	—	—	5.08	0.04	2

Auf die Verwendung dieser Zahlen zur Berechnung der chemischen Massenwirkung gehe ich erst ein, nachdem auch die Versuche über den Einfluss verschiedener Wassermengen, sowie der Temperatur auf die Zeitdauer der betreffenden Reaction beendigt sein werden. Diese sollen in einer zweiten Abhandlung folgen.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

INHALTSVERZEICHNISS.

Seite

14. Hellmann: Über gewisse Gesetzmässigkeiten im Wechsel der Witterung aufeinanderfolgender Jahreszeiten 93
15. E. du Bois-Reymond: Bericht über die Wirksamkeit der Humboldt-Stiftung für Naturforschung und Reisen 103
16. Landolt: Über die Zeitdauer der Reaction zwischen Jodsäure und schwefliger Säure 107

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE

aus den Jahren 1882, 1883 und 1884.

(In Commission in Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.)

Schrader: Gedächtnissrede auf Justus Olshausen . . . . . M. 1.00
Virchow: Alttrojanische Gräber und Schädel . . . . . " 12.20
Braun: Fragmente einer Monographie der Characeen. Nach den hinterlassenen Manuscripten herausgegeben von Dr. Otto Nordstedt . . . . . " 11.50
Diels: Zur Textgeschichte der Aristotelischen Physik . . . . . " 2.00
Schwendener: Die Schutzscheiden und ihre Verstärkungen . . . . . " 6.00
Zeller: Über Begriff und Begründung der sittlichen Gesetze . . . . . " 1.50
Bernays: Über die unter Philon's Werken stehende Schrift über die Unzerstörbarkeit des Weltalls " 4.00
Bernays: Über die Unzerstörbarkeit des Weltalls. II. . . . . " 4.00
Hagen: Geschwindigkeit des strömenden Wassers in verschiedenen Tiefen, untersucht nach den von Brünings ausgeführten Messungen . . . . . " 4.00
Tobler: Die altvenezianische Übersetzung der Sprüche des Dionysius Cato . . . . . " 3.50
Eichler: Beiträge zur Morphologie der Marantaceen . . . . . " 6.30
Kronecker: Über bilineare Formen von vier Variabeln . . . . . " 2.50
Schrader: Zur Frage nach dem Ursprunge der babylonischen Cultur . . . . . " 3.00
Tobler: Über das Buch des Uguçon da Laodho . . . . . " 5.00
Dillmann: Über die Regierung, insbesondere die Kirchenordnung des Königs Zar'a-Jacob . . " 5.00
Imhoof-Blumer: Die Münzen der Dynastie von Pergamon . . . . . " 5.00
Roth: Beiträge zur Petrographie plutonischer Gesteine. IV. . . . . " 7.50
Virchow: Über Schädel von Assos und Cypern . . . . . " 5.00
Wiedemann: Über die Bestimmung des Ohm . . . . . " 4.50

Noether: Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Curven . . . . . M. 6.00
Studer: Übersicht über die Ophiuriden, welche während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—1876 gesammelt wurden . . . . . " 3.50
Studer: Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle an der Westküste von Africa, auf Ascension und am Cap der guten Hoffnung gesammelten Crustaceen . . . . . " 2.50
Studer: Über die von S. M. S. Gazelle auf der Reise um die Erde 1874—1876 gesammelten Isopoden . . . . . " 2.50
Marshall: Agilardiella radiata . . . . . " 1.50
Krabbe: Über das Wachsthum des Verdickungsringes und der jungen Holzzellen in seiner Abhängigkeit von Druckwirkungen . . . . . " 4.50
Studer: Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—1876 gesammelten Asteriden und Euryaliden . . . . . " 4.50

Register für die Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie zu Berlin vom Jahre 1874 bis 1881 M. 3.00

Digitized by Google

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im Auszuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden Theil des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus diesen Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der reinen Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschaften in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder von fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch demselben Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, Reden und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in Monatsheften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird in der Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften und Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen »Sitzungsberichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zuschicken zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu geben.

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämlich:

die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,

" " " Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,

" " " October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Fertigstellung des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1884 nicht zugekommen sein sollten, werden gebeten, hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamationen nur in Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1885 angebracht werden.

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchhändlerischen Bezuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann) in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungsberichte« oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften von der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in einzelnen Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten, zu liefern. Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der genannten Buchhandlung in Verbindung setzen.

Digitized by Google

13.892

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

HEFT IV.

APRIL 1885.

MIT TAFEL I.

BERLIN 1885.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN.

Digitized by Google

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Separatabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

Digitized by Google

17. Uber die Thermoelektricität geschmolzener Metalle.

Von F. Braun
in Karlsruhe.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 12. März; — gedruckt im Bericht vom 9. April [St. XVIII]; — ausgegeben am 16. April.)

1. In einem Kreise metallischer Leiter kann ein durch Temperaturdifferenzen hervorgebrachter Strom sein Aequivalent nur in Wärme haben, welche von aussen zugeführt wird. Nimmt man an: 1. der Process sei reversibel; 2. es werde Wärme nur an der höher temperirten Contactstelle aufgenommen und nur an der kälteren abgegeben — so folgt, dass die thermoelektrische Kraft der Temperaturdifferenz der Löthstellen für beliebig grosse Intervalle proportional sein muss. Setzt man an beiden Löthstellen einen Sprung der Potentialfunction voraus, so lässt sich das Resultat auch aussprechen in der Form, dass dieser Potentialsprung der absoluten Temperatur der Löthstelle proportional sei. Die elektromotorische Kraft, aufgetragen als Function der Temperaturdifferenz, sollte also eine gerade Linie sein. Die Erfahrung zeigt nun, dass in allen seither untersuchten Ketten diese lineare Abhängigkeit nicht stattfindet; in weitaus den meisten Fällen ergiebt sich vielmehr für die Curve eine Parabel. Dies führte W. Thomson zu dem Schlusse, dass auch im Inneren desselben, aber ungleich erwärmten Metalles beim Stromdurchgang reversibele, der ersten Potenz der Stromintensität proportionale Wärme erzeugt werden müsse (wir wollen sie mit Le Roux den Thomsoneffect nennen). In der That, wenn die Thermokette nicht zwischen zwei Temperaturen, sondern zwischen unendlich vielen arbeitet, so folgt umgekehrt, dass ihre elektromotorische Kraft sich nicht mehr als lineare Function der grössten in derselben vorkommenden Temperaturdifferenz darstellen lässt. Obschon strenge genommen sich über den Sitz der elektromotorischen Kräfte gar nichts sagen lässt, so wird man doch geneigt sein, zu den an den Löthstellen angenommenen Potentialänderungen (von denen aber auch noch nicht bewiesen ist, dass sie dort auftreten) neue im Inneren der ungleich temperirten Metalle hinzuzufügen.

Seither hat man, meines Wissens, immer Ketten untersucht, in denen wenigstens ein Metall sich im festen Aggregatzustande befand.

Digitized by Google

Es liegt dann nahe, diese inneren thermoelektrischen Kräfte dadurch zu erklären, dass die Wärme selber das feste Metall ändere und heisses und kaltes Metall sich wie zwei verschiedene Stoffe verhalten, oder, wie man es kurz ausdrücken kann, dass die Wärme Structuränderungen hervorbringt. In der That geben, nach den bekannten Versuchen von MAGNUS, Stücke desselben Metalles, die von verschiedener Temperatur sind, rasch zusammengebracht, einen Thermostrom. Nur bei Blei konnte er diesen nicht mit Sicherheit nachweisen. In Blei ist nun, wie LE ROUX gezeigt, auch der Thomsoneffect vollständig oder sehr nahe gleich Null. — Im Allgemeinen zeigen diejenigen Metalle, welche grossen Thomsoneffect haben, noch die fernere Erscheinung, dass beim Erhitzen eines einzigen Drahtes — während seine Enden auf constanter Temperatur bleiben — ein Thermostrom entsteht, dessen Intensität (und sogar Richtung) mit oft geringfügigen Änderungen in der Vertheilung der Temperatur oder der Structur des Drahtes variirt. Diese Ströme sind, um es gleich hier zu erwähnen, so energisch und vor Allem so variabel, namentlich wenn die Temperatur bis zur Rothgluth steigt, dass ich bei meinen Ketten darauf bedacht sein musste, dass nicht in einem festen Metall starke Temperaturdifferenzen vorhanden waren. Nur im Blei habe ich, auch beim Eintauchen von festem Blei in geschmolzenes, keine solchen Ströme mit Sicherheit finden können. Nach einem oft citirten Versuche von MAGNUS — den ich kurz den MAGNUS'schen Versuch nennen will — fehlen dieselben vollständig beim Quecksilber.

Es liegt nahe, die Ströme, welche beim Zusammenlegen eines kalten und eines warmen Metalls entstehen, gleichfalls auf Structurverschiedenheiten zurückzuführen (obschon man dann entweder der Zeit oder der Temperaturvertheilung, vielleicht dem Gefälle, einen Einfluss zuschreiben muss) und dieselben in Beziehung zu bringen zu dem Thomsoneffect, d. h. den Abweichungen, welche die thermoelektrische Kraft von der Proportionalität mit der Temperaturdifferenz zeigt. Wenn gewisse Metalle weder bei dem MAGNUS'schen Versuch, noch beim Erhitzen eines Drahtes, dessen Enden auf constanter Temperatur gehalten werden, einen Thermostrom geben, so kann dies in zweierlei Weise erklärt werden: entweder es treten zu beiden Seiten der erhitzten Stelle Potentialänderungen ein, welche aber um die gleiche Grösse beiderseits abnehmen, oder es entsteht überhaupt keine thermoelektrische Erregung in dem gleichen Körper, sobald Structurverschiedenheiten seiner Natur nach ausgeschlossen sind.

Dieser letzteren, wenn auch specielleren Annahme, scheint mir, wird man a priori am meisten zuneigen. Es ist anzunehmen, dass auch andere geschmolzene Metalle sich wie Quecksilber verhalten, was ich auch thatsächlich bestätigt fand (vergl. §. 7).

Digitized by Google

2. Fasst man den MAGNUS'schen Versuch in der zweiten Weise auf, so würde folgen, dass die thermoelektrische Kraft geschmolzener Metalle proportional der Differenz der absoluten Temperaturen ihrer Contactstellen sein müsste. Dies würde aber die Möglichkeit gewähren, absolute Temperaturen bis zu sehr hohen Graden zu messen in einer Weise, welche viele Vorzüge vor den Messungen mit dem Luftthermometer voraus hat (kleinerer Raum von constanter Temperatur, Unabhängigkeit von Ausdehnung und Formänderungen des Gefässes). Man würde ferner, und man darf wohl sagen, zum ersten Male, Zahlen erhalten, welche lediglich durch die chemische Natur der Substanz definirt sind und von den Unbestimmtheiten wie: hart, weich etc. frei wären. Sie würden uns eher einen Aufschluss versprechen über die inneren Vorgänge, durch welche thermoelektrische Kräfte erregt werden. In der That erscheint es sehr sonderbar, warum bei gleichen äusseren Verhältnissen (wo beliebige Wärmemengen zur Verfügung stehen) an der Contactstelle mancher Metalle grosse Quantitäten Wärme in die Energieform mechanischer Arbeit übergeführt werden, bei anderen wieder sehr geringe.[1] Da ferner jedes geschmolzene Metall in thermoelektrischer Beziehung durch eine einzige Constante (die allerdings noch vom Druck abhängen könnte) charakterisirt wäre, so müsste diese mit anderen von der Temperatur unabhängigen für das betreffende Metall charakteristischen Constanten in Beziehung stehen; als solche bleiben aber füglich nur die Atomgewichte.

3. Diese Erwägungen veranlassten mich in möglichst weiten Temperaturgrenzen die thermoelektrischen Kräfte geschmolzener Metalle gegen einander zu messen. Lineare Abhängigkeit derselben von der Temperatur erschien mir von vornherein so wahrscheinlich, dass ich von Anfang an mein Augenmerk auf möglichst vollkommene chemische Reinheit der Materialien lenkte und zunächst blos Elemente wählte. Erst später wurden noch einige Legirungen herangezogen.

Ich gebe im Folgenden die Combinationen, welche gemessen wurden, sowie den benutzten Temperaturumfang; t soll die Temperatur der kälteren Contactstelle, T die der an der wärmeren Contactstelle erreichte höchste bedeuten.

---

[1] Dass man die PELTIER'sche Wärme auffasst als das Aequivalent für die Arbeit, welche die Elektricität beim Übergang auf ein anderes Potentialniveau an der Contactstelle leistet, entbehrt jeglicher Berechtigung. Die an der einen Contactstelle verlorene Arbeit kann geleistet werden durch die gleich grosse an der anderen gewonnene, ebenso wie die Arbeiten in gleich hohen Theilen der beiden Schenkel eines Hebers mit Flüssigkeit sich compensiren. Man kann keineswegs, wie dies MAXWELL gethan hat, aus der PELTIER'schen Wärme auf den an der Berührungsstelle zweier Leiter in Folge der Contactelektricität stattfindenden Sprung der Potentialfunction schliessen.

Digitized by Google

Na/Hg ($t = 20°$, resp. $100°$; $T = 370°$)
Pb/Hg ($t = 20°$; $T = 580°$)
K/Hg ($t = 20°$, resp. $100°$; $T = 520°$)
Sn/Hg ($t = 20°$; $T = 460°$)
Hg/(Na + K)[1] ($t = 20°$; $T = 380°$)
Pb/Sn ($t = 20°$; $T = 435°$; $t = 424°$, $T = 974°$)
Bi/Sn ($t = 508°$; $T = 882°$)
Hg/(Hg + Bi + Pb)[2] ($t = 20°$; $T = 530°$).

4. Zur Bestimmung der hohen Temperaturen in oft kleinen Räumen dienten Platinspiralen, deren galvanischer Widerstand vorher als Temperaturfunction ermittelt war. Ich benutzte dazu einen grossen, mit Steinkohlen geheizten Muffelofen, auf dessen Beschreibung, sowie einige andere mit ihm ausgeführte Versuche ich demnächst an einem anderen Orte zurückkommen werde. Die Gefässe für das Luftthermometer waren aus Meissener Porzellan.[3] Die Dimensionen konnten so gewählt werden, dass — Constanz der Temperatur vorausgesetzt — Temperaturen von 1000° C. noch bis 1 oder 2° genau garantirt werden können.

5. Die Metalle waren, soweit Glas benutzt werden konnte, in Glasröhren eingeschlossen. Als Leitung nach aussen dienten Platindrähte, welche in die Glaswand eingeschmolzen waren. Bei einigen Metallen war der Platindraht direct mit den Metallen in Contact; bei anderen wurde dieser Contact vermittelt durch einen Stift aus Retortenkohle[4] oder Graphit, bei anderen durch einen Eisendraht. Zwei mit Metallen gefüllte Glasröhren standen vertical dicht neben einander. An der heisseren (oberen) Contactstelle waren die Platindrähte ausserhalb der Röhren im Knallgasgebläse an einander geschmolzen. Soweit an den Enden der Röhren (den heissesten und kältesten Stellen) die zur Vermittelung der Leitung dienenden Drähte in die flüssigen Metalle tauchten, musste Alles auf der gleichen Temperatur sich befinden. — Die kälteren (unteren) Enden der Röhren tauchten in zwei concentrische Gefässe voll Quecksilber, welche in einem Bade von constanter Temperatur (aber nicht immer Zimmertemperatur) sich befanden. Aus diesen Quecksilbergefässen führten Bleidrähte nach aussen zu einem Bade von Petroleum, welches sich auf Zimmertemperatur befand. Erst

[1] Bei gewöhnlicher Temperatur flüssige Legirung; circa 1 Aequ. K auf 1 Aequ. Na.

[2] Bei gewöhnlicher Temperatur flüssig; 1 Theil Blei, 1 Theil Wismuth, 3 Theile Quecksilber.

[3] Es drängt mich, an dieser Stelle der Königl. Sächs. Porzellanmanufactur, insbesondere dem Hrn. Büttner, meinen allerherzlichsten Dank auszusprechen für die ausserordentliche Liebenswürdigkeit, mit welcher dieselbe mir in der sehr schwierigen Herstellung dieser Gefässe entgegengekommen ist.

[4] Platin wird bei 200° durch Quecksilber amalgamirt, bei etwa 500° von demselben ungefähr ebenso energisch aufgelöst wie von kochendem Königswasser.

Digitized by Google

von dort fingen die Kupferleitungen an. Die Bleidrähte durften natürlich nicht direct in das Quecksilber eintauchen. Deshalb waren ihre Enden in eine Glasröhre geschmolzen, durch deren unteres geschlossenes Ende ein kurzer Platindraht führte. Ich übergehe hier die Vorsichtsmaassregeln, welche nöthig waren, um zu bewirken, dass in den übrigen Theilen des Stromkreises nur geringe und längere Zeit constante thermoelektrische Kräfte waren. Diese wurden immer besonders bestimmt.

Die elektromotorischen Kräfte wurden durch Compensation gemessen.

6. Die Temperatur der heisseren Contactstelle wurde hergestellt: 1. in einem Bade von schwer siedendem Mineralöl, welches durch einen Rührer fortwährend gemischt wurde. Man konnte so auf circa 380° C. kommen. 2. In einem aus drei concentrischen Eisencylindern bestehenden, aussen von einem Eisen- und einem Chamottemantel umgebenen Luftbad, welches nach meinen Angaben für eine andere Untersuchung construirt war und welches Hr. EHRHARDT neulich[1] beschrieben hat. Es wurde mit Gas geheizt. Ich bin in ihm bis zu 580° C. gelangt. 3. Durch einen lebhaften Dampfstrom constant siedender Substanzen, welcher durch ein gegen Wärmeabgabe nach aussen geschütztes Glasgefäss hindurchgeschickt wurde. Es waren: Alkohol (80° C.), Wasser, Xylol (140°5 C.), Anilin (183° C.), Dimethylanilin (192° C.), Toluidin (198° C.), Xylidin (214° C.). Zur sicheren Entscheidung einzelner Fragen kam es mir nämlich auf wenig von einander abstehende, constante Temperaturen an. — Zur Controle anderer Messungen wurden ferner benutzt Bäder aus den Dämpfen von Benzoesäure (250° C.), Quecksiberjodid (357° C.) und Schwefel (448° C.).

Für noch höhere Temperaturen (bis zu 980° C.) diente 4. die Muffel. Die Gefässe, welche das Metall aufnahmen, waren aus Thon. Man denke sich eine etwa 10° gegen den Horizont geneigte Thonröhre, an beiden Enden mit vertical stehenden Pfeifenköpfen versehen. Zwei solche, gleich lange Röhren liegen nebeneinander. Jede enthält ein geschmolzenes Metall. Die höher gelegenen Pfeifenköpfe befinden sich im Inneren der Muffel und werden auf höhere Temperatur geheizt, als die tiefer gelegenen. Sie werden durch einen Bügel aus dickem Eisendraht oder Retortenkohle[2] überbrückt, um die Leitung daselbst herzustellen. — Ein weiter, dickwandiger Chamottehals ging aus der Muffel durch den Heizkanal nach aussen. Durch ihn führten die Thonröhren; die beiden anderen Pfeifenköpfe befanden

[1] WIED. Ann. Bd. 24 S. 217. 1885.

[2] Eisen wird bei etwa 1000° C. von Zinn aufgelöst. Ein 10^{mm} dicker Draht ist nach einer halben Stunde auf etwa 3^{mm} Durchmesser reducirt.

Digitized by Google

sich ausserhalb der Muffel, umgeben von einem Eisenkasten, welcher mit Kohlen geheizt wurde. Die Temperatur wurde dort möglichst nahe dem Schmelzpunkt des strengflüssigeren Metalles gehalten. — Um die Leitung aus den ausserhalb der Muffel befindlichen geschmolzenen Metallen weiter zu führen, war nach vorherigen Erfahrungen als Metall, welches den Temperaturübergang bis zur Zimmertemperatur vermittelte, nur Blei (abgesehen von Quecksilber) tauglich. Mit Rücksicht auf die Eigenschaften der nachgenannten Stoffe ergab sich dann die folgende Anordnung: An das untere Ende eines dünnwandigen Messingrohres (diesem kommt keine wesentliche Bedeutung zu) von ca. 12^{mm} Durchmesser war ein Eisenrohr hart angelöthet; es war unten mit einem eingeschraubten Eisenscheibchen geschlossen, auf welches innen ein Stückchen Platinblech hart angelöthet war. Die Schraube schloss dicht gegen das geschmolzene Metall, in welches das Eisenrohr eintauchte. Auf das Platinblech legte sich federnd ein Platindraht an. Dieser war durch das geschlossene untere Ende einer Glasröhre durchgeschmolzen. Der Boden derselben war ca. 10^{mm} hoch mit Graphit vollgestopft. Man schob dann in das Glasrohr langsam Bleidraht ein; derselbe schmolz in demselben, und es bildete sich von dem Graphit aus ein continuirlicher Übergang vom geschmolzenen bis zum festen Blei. Der feste Bleidraht führte weiter bis zu Stellen von Zimmertemperatur. Alle die verschiedenen Leiter: Eisen, Platin, Graphit befanden sich ganz von dem im Pfeifenkopf geschmolzenen Metall umgeben; dasselbe stand etwa 4^{cm} über dem oberen Ende der Graphitschicht. Man darf deshalb in ihnen allen gleiche Temperatur voraussetzen. Diese zuletzt beschriebene Versuchsanordnung wurde für die Ketten Pb/Sn und Sn/Bi verwendet.

7. Ich gehe zu den Resultaten über. Trägt man die Temperaturen als Abscissen, die elektromotorischen Kräfte als Ordinaten auf, so ergiebt sich Folgendes. Die meisten, wenn nicht alle Curven, sind keine geraden Linien; sie sind so gestaltet, dass der Krümmungsmittelpunkt auf der der Abscissenaxe abgewendeten Seite der Curve liegt, d. h. sie steigen rascher an als der Proportionalität mit der Temperatur entspricht. Nur die Curve für Na/Hg, welche eine längere Strecke fast geradlinig verläuft, scheint bei höherer Temperatur eine Krümmung nach der anderen Seite anzunehmen. Die thermoelektrische Kraft dieses Elementes ist aber so gering, dass die Messungen an ihm besondere Schwierigkeiten bieten. K/Hg verläuft fast geradlinig, hat aber besondere Eigenthümlichkeiten (vergl. unten).

Die Curven sind sicher nicht zweiten Grades, sondern mindestens vom dritten. Die Annahme Tait's, dass die specifische Wärme der Elektricität der absoluten Temperatur proportional sei, was zur Gleichung

Digitized by Google

der Parabel führt, ist also für geschmolzene Metalle nicht zulässig. Als einen Beleg gebe ich einige Zahlen aus der Curve für das Element Pb/Hg. Es ist wegen der Eigenschaft des Bleis, keinen Thomsoneffect zu zeigen, von besonderem Interesse.

Tabelle I.

Blei/Quecksilber.

	ϑ	e	de/dϑ		Π (cal.)
			beobachtet	berechnet	
20° C.	293°	0	3.4	—	46.2
100	373	340	4.8	—	83.0
200	473	920	7.0	6.5	153.7
300	573	1710	9.2	8.3	244.6
400	673	2640	10.2	10.0	318.5
500	773	3750	12.5	11.8	448.3
580	853	4940	19.0	13.2	751.9

Die erste Spalte giebt die Temperatur der wärmeren Contactstelle in Grad Cels., die zweite dieselbe gerechnet vom absoluten Nullpunkt. Die Temperatur der anderen Contactstelle ist fortwährend gleich 20° C. gedacht. Die dritte Spalte enthält die elektromotorische Kraft e in Mikrovolts. Stellte sich e als Function von ϑ durch eine Curve zweiten Grades dar, so sollte de/dϑ lineare Function von ϑ sein. Den beobachteten Werth von de/dϑ zeigt die vierte Spalte, die fünfte den aus den beiden ersten Zahlen der vierten Spalte berechneten Werth. Die Abweichungen gehen weit über die Grenzen der möglichen Beobachtungsfehler hinaus. — Die letzte Spalte giebt diejenige Wärmemenge in Grammecalorien, welche an den Contactstellen von der absoluten Temperatur ϑ entsteht, wenn die Elektricitätsmenge, welche 2^{gr} Wasserstoff elektrochemisch äquivalent ist (193000 Coulombs), durch sie hindurchfliesst (elektrochemische Elektricitätseinheit).

Wenn man aus den Versuchen von Le Roux (der für den Thomsoneffect ja keine absoluten Werthe giebt) schliesst, dass in Blei kein Thomsoneffect stattfindet, so müsste ein solcher in Quecksilber vorhanden sein. Und zwar würde seine Grösse durchaus nicht unbeträchtlich sein. Es folgt dies aus Beobachtungen an den Ketten Hg/Cu, Hg/Pt, Hg/Fe, deren elektromotorische Kraft ich für einige Temperaturdifferenzen gemessen habe. In den Metallen: Cu, Pt, Fe ist der Thomsoneffect sehr erheblich; in Quecksilber müsste er nach dem Ergebniss dieser Messungen von mindestens gleicher Grösse sein. Die benutzten Drähte der drei Metalle gaben beim Erhitzen in der Mitte (auch nach wiederholtem Glühen), während die Enden auf

Digitized by Google

constanter Temperatur gehalten waren, sehr beträchtliche elektromotorische Kräfte (70 bis 200 Mikrovolt und darüber), Quecksilber dagegen, wie bekannt, nicht. Diese letztere Erscheinung und der Thomsoneffect können also nicht direct mit einander in Beziehung stehen. —

In dem Thermoelement Pb/Hg mögen die Contactstellen die resp. absoluten Temperaturen Θ und ϑ ($\Theta > \vartheta$) haben; es mag so lange geschlossen gedacht werden, bis sein Thermostrom die elektrochemische Elektricitätseinheit durch dasselbe hindurchgeschickt hat. Dann ist bei der Temperatur Θ die Wärmemenge Π_Θ aufgenommen, bei ϑ die Wärmemenge Π_ϑ an die Umgebung abgegeben worden. Die Differenz $\Pi_\Theta - \Pi_\vartheta$ kann in dem vorliegenden Beispiele nicht vollständig in elektrische Energie übergeführt sein (bei einer entgegengesetzten Krümmung der Curve wäre sie nicht das alleinige Aequivalent, sondern es wäre noch Wärme aus dem Inneren der Metalle selber in Arbeit umgesetzt worden).

Die folgende Tabelle II giebt für verschiedene Temperaturintervalle die Wärme $\Pi_\Theta - \Pi_\vartheta$ in Grammecalorien. Ferner die elektrische Arbeit L in gleichem Maasse. Es ergiebt sich aus ihr, dass im günstigsten Falle 47 Procent der Wärme $\Pi_\Theta - \Pi_\vartheta$ als nutzbare elektrische Arbeit auftreten. Der Rest, von wenigstens 53 Procent, bleibt in den Metallen selber in der Form von (reversibler) Wärme. Sie ist in der vierten Spalte angegeben. — Die Thermokette nimmt bei der höchsten Temperatur Θ die Wärmemenge Π_Θ auf; mindestens mit diesem Wärmecapital arbeitet die Kette. Wie viel von dieser Wärme tritt als nutzbare Arbeit auf? Die sechste Spalte zeigt, dass es höchstens 40 Procent sind. Wäre von der Wärmemenge Π_Θ der ganze, nicht in Arbeit verwandelte Rest bei der Temperatur ϑ abgegeben worden, so müsste der Bruchtheil $(\Theta - \vartheta)/\Theta$ in Stromenergie übergeführt worden sein. Die folgende Spalte enthält diesen Bruch.

Tabelle II.

Temp. Intervalle	$\Pi_\Theta - \Pi_\vartheta$	El. Arbt. L	$(\Pi_\Theta - \Pi_\vartheta) - L$ d. h. Wärme in den Metallen	$\frac{\text{El. Arbt.}}{\Pi_\Theta - \Pi_\vartheta}$	$\frac{\text{El. Arbt.}}{\Pi_\Theta}$	$\frac{\Theta - \vartheta}{\Theta}$	$\frac{\Pi_\Theta - \Pi_\vartheta}{\Pi_\Theta}$
20 bis 100°	36.8	15.8	21.0	0.43	0.19	0.21	0.44
20 » 200	107.5	42.7	64.8	0.40	0.28	0.38	0.70
20 » 300	198.4	79.4	119.0	0.40	0.32	0.49	0.81
20 » 400	272.3	128.5	149.8	0.47	0.40	0.56	0.85
20 » 500	402.1	174.0	228.1	0.43	0.39	0.62	0.89
20 » 580	705.7	229.2	476.5	0.32	0.30	0.66	0.94

Fragt man sich danach, ob die Thermoelemente geeignete Vorrichtungen sind, um Wärme in Arbeit umzusetzen, so ergiebt sich Folgendes. Elemente, deren elektromotorische Kraft mit steigender Temperaturdifferenz stark zunimmt, wie das bei dem Element Hg/Pb

Digitized by Google

der Fall ist, arbeiten mit sehr geringem Nutzeffect (von den Wärmeverlusten durch Leitung, Strahlung etc. ganz abgesehen). Thermoelemente, deren elektromotorische Kraft mit steigender Temperatur abnimmt, arbeiten mit mehr Nutzeffect, sind aber weniger günstig für den absoluten Betrag der zu erzielenden Arbeit.

Auch die anderen Elemente mit flüssigen Metallen führen zu wesentlich den gleichen Resultaten wie das Pb/Hg-Element. Mit den Curven für letzteres hat fast genau gleichen Verlauf diejenige für Hg/(Hg + Bi + Pb). In ihm sind beide Bestandtheile bei gewöhnlicher Temperatur flüssig; ich habe dasselbe in einem Temperaturintervall von über 500° untersucht. Es schien mir von besonderem Interesse mit dieser flüssigen Legirung den MAGNUS'schen Versuch anzustellen. Wurde in den auf circa 300° geheizten einen Theil des Amalgames kaltes eingetaucht, so entstand kein Thermostrom, dessen elektromotorische Kraft mehr als 0.5 Mikrovolt betragen hätte, was die Grenze des für mich Messbaren war.

Eine besondere Eigenthümlichkeit zeigt die Curve für dieses Element. Bis 180° convex gegen die Abscissenaxe, wird sie zwischen 180° und 210° concav und von da wieder convex. Sie gleicht in dieser Beziehung qualitativ durchaus der Curve, welche Platin-Eisenelemente geben, nur dass in letzteren die Erscheinung noch prägnanter ausgesprochen ist. Beim Pt/Fe-element steigt bis etwa 360° die Curve steil und etwas concav gegen die Abscissenaxe an, biegt dann rasch gegen die horizontale Richtung um, hat bei 420° ein Maximum, fällt von diesem ganz wenig (fast horizontal) zu einem Minimum bei 520°, erhebt sich wieder langsam und steigt dann von etwa 630° an wieder ebenso steil bis zu 1000° an, wie auf der Strecke von 0° bis 360°.

Ganz analoges Verhalten zeigt das aus geschmolzenem Kalium und Quecksilber bestehende Element. Die Curve geht schlangenförmig in die Höhe. Übereinstimmende Werthe erhält man bei letzterem Elemente aber nur, wenn man die Dämpfe constant siedender Substanzen zur Erhitzung benutzt. Im Öl- und Luftbad untersucht, fallen bei gleicher Temperatur die Werthe oft ziemlich weit auseinander.

Man wird diese Erscheinungen wohl nur erklären können durch die Annahme, dass auch in den flüssigen Körpern moleculare Umwandlungen vor sich gehen (wie sie ja auch sonst, z. B. bei Schwefel bekannt sind), und diese Änderungen scheinen, wenigstens was die Geschwindigkeit des Verlaufes betrifft, vom Gang der Erwärmung abzuhängen. Es liegt dann die Frage nahe, ob geschmolzenes Cadmium, welches im dampfförmigen Zustande einatomig ist, mit dem gleich beschaffenen Quecksilber zu einem Thermoelement combinirt, lineare Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft von der Temperatur ergiebt. Das zur Ver-

Digitized by Google

fügung stehende Temperaturintervall schien mir zur sicheren Entscheidung zu gering, als dass ich den Versuch gemacht hätte. Cadmiumamalgam gegen Quecksilber zu untersuchen, hielt ich für ungeeignet, da in den Amalgamen keine isolirten Atome mehr anzunehmen sind.

8. Fasst man die Gesammtheit der Resultate zusammen, so kommt man zu dem Schluss, dass wir im Gebiete der Thermoelektricität noch weiter von einem Einblick in das wahre Wesen entfernt sind, als wohl mit mir die meisten Physiker gedacht hatten. Auch im Inneren geschmolzener Metalle von ungleicher Temperatur müssen wir elektromotorische Kräfte annehmen. Und zwar folgen dieselben durchaus keinen einfachen Gesetzen. Es wird keine Schwierigkeiten bieten, Formeln für die in dem Inneren der Metalle gedachten elektromotorischen Kräfte zu finden, welche den Beobachtungen genügen. Einer Vorstellung von den Vorgängen kommen wir aber damit, wie mir scheint, vorerst nicht näher. Mit Bestimmtheit darf man sagen, dass auch flüssige, ungleich erwärmte Metalle elektrisch geladen sind und dass durch blosse Temperaturungleichheiten in einem Leiter die Bedingungen zur Umwandlung von Wärme in Arbeit erfüllt sind, nur dass wir die Arbeit nicht gerade in der bequemen Form eines geschlossenen Stromes gewinnen können. Vielleicht findet diese elektrische Erregung in allen Flüssigkeiten, überhaupt in allen Stoffen, d. h. auch im sogenannten Vacuum statt, und es würde sich dann freilich um die principiell wichtige weitere Frage handeln, welchen Einfluss dieser seither nicht berücksichtigte Umstand auf physikalische Vorgänge hat.

Kehren wir zu den oben mitgetheilten Thatsachen zurück, so deutet Alles darauf hin, dass die thermoelektrische Erregung ein intermolecularer Vorgang ist, der abhängt von der Atomzahl und eventuell Atomgruppirung im Molecul. Man wird so auf den Gedanken geführt, dass auch alle die grob mechanischen Änderungen, welche so grossen Einfluss auf das thermoelektrische Verhalten eines festen Körpers ausüben und welche in Zug, Biegung, Härten, Anlassen etc. bestehen, mit intermolecularen, also gewissermaassen chemischen Vorgängen verbunden sind. Es würde dies in Übereinstimmung mit der einen bereits bekannten Thatsache stehen, dass im Stahl beim Übergang aus dem weichen in den harten Zustand und umgekehrt (auch durch blossen Zug) die Quantität chemisch gebundenen Kohlenstoffs sich ändert. Harter und weicher Stahl geben bekanntlich ziemlich kräftige thermoelektrische Wirkungen.

Digitized by Google

18. Einige Beobachtungen an Milchsaftgefässen.

Von S. Schwendener.

(Vorgetragen am 16. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XX]; — ausgegeben am 23. April.)

Hierzu Taf. I.

Die folgenden Mittheilungen beziehen sich auf einige wenige Fragen, die bis dahin unerörtert geblieben sind, obschon sie für die anatomisch-physiologische Betrachtungsweise sehr nahe liegen. Es soll gezeigt werden 1. mit welchen besonderen Umständen die zuweilen sehr beträchtliche Wanddicke der Milchsaftröhren in Beziehung steht; 2. durch welche physikalischen Eigenschaften die Wandungen dieser Gefässe sich auszeichnen und 3. wie die Bewegung des Milchsaftes zu erklären sei. Daneben mögen noch einige weitere, theils untergeordnete, theils ungenügend aufgeklärte Punkte eine kurze Besprechung finden.

1. Die Wandverstärkungen.

Starke Wandverdickungen finden sich namentlich bei den Euphorbia-Arten, wo in Folge dessen die Milchsaftgefässe der inneren Rinde auf Querschnitten sehr augenfällig hervortreten (Fig. 7—9). Ihr Durchmesser erreicht hier nicht selten 60—80 Mik., zuweilen sogar 100 Mik. und darüber, indess die Wanddicke durchschnittlich etwa $^1/_5$—$^1/_6$ dieses Werthes, also ca. 10—16 Mik. beträgt. Doch bemerke ich ausdrücklich, dass die letztere Angabe sich auf Messungen an Querschnitten bezieht und dass der unversehrte, turgescente Zustand erheblich geringere Werthe ergiebt. Immerhin ist die Wanddicke der Milchröhren auch unter dem Druck des Inhaltes eine sehr beträchtliche.

Die Untersuchung älterer Euphorbienstämme von ca. 1^m Höhe und darüber ergab nun, dass eine allmälige Abnahme der Wanddicke nach oben hin, etwa nach Maassgabe des von der Höhe abhängigen Druckes, nicht stattfindet. Zwar beobachtet man in den obersten Partien des Stammes, soweit die Entwickelung der Gewebe noch nicht abgeschlossen ist, auch dünnwandige und wenig verdickte Milchröhren; die ausgewachsenen Theile jedoch lassen eine dem Abstande von der Spitze proportionale Verstärkung der Wandungen nicht erkennen. Überdies sieht man hin und wieder einen dünnern Ast mit viel

Digitized by Google

schwächerer Wand von den longitudinalen Hauptröhren sich abzweigen und in die primäre Rinde ausbiegen; an solchen Stellen befinden sich also, auch wenn der Übergang ein allmäliger ist, eine dickwandige und eine dünnwandige Röhre in offener Communication und somit unter gleichem hydrostatischen Druck, so dass die Annahme, der letztere allein sei für die Wanddicke maassgebend, ausgeschlossen ist.

Ebensowenig kann daran gedacht werden, zwischen Wanddicke und Röhrendurchmesser eine einfache arithmetische Beziehung aufzufinden, etwa in dem Sinne, dass die beiden Dimensionen sich in nahezu gleichem Verhältniss veränderten. Es ist im Gegentheil sehr leicht zu constatiren, dass die engeren Milchröhren der peripherischen Rinde eine relativ schwächere Membran besitzen als die viel dickeren Hauptstämme an der Grenze des Phloems. Daraus ergiebt sich zugleich, dass eine länger andauernde Dickenzunahme der Wandungen entweder gar nicht oder nur in beschränktem Maasse stattfindet. Eine Proportionalität zwischen Alter und Wanddicke ist somit bei den Euphorbien ebenfalls ausgeschlossen.

Richtet man jedoch sein Augenmerk auf die Umgebungen der Milchröhren, so gewahrt man, dass die dickwandigen Hauptröhren der inneren Rinde an Intercellularräume grenzen, in der Art, dass jede Röhre auf ihrem Längsverlaufe mindestens an zahlreichen Stellen, wenn auch nicht gerade durchgehends, von luftführenden Gängen oder Lücken umschlossen erscheint (Fig. 7—9), während die zartwandigen Röhren der peripherischen Rinde das Parenchym interstitienlos durchsetzen. Die feineren Milchröhren, welche sich bis zur Hautschicht erstrecken, stehen also unter dem Gegendruck des lebensfrischen Parenchyms, welches eine zu weit gehende Dehnung der Röhrenwand verhindert; die innenständigen Hauptröhren dagegen haben den vollen hydrostatischen Druck ihres eigenen Inhalts auszuhalten und bedürfen daher einer grösseren Widerstandsfähigkeit. Eine entsprechende Verdickung der Zellwand erscheint daher begreiflich.

Durch diesen Hinweis soll indess nicht bestritten werden, dass Milchröhren aus der Rinde älterer Stämme zuweilen merklich dickere Wände besitzen, als man sie an jüngeren Trieben je beobachtet. An alten Stämmen von *Morus alba*, bei welcher Pflanze die Milchröhren zum Theil jahrelang zartwandig bleiben, betrug z. B. die Wanddicke der Hauptröhren durchgehends ca. 4 Mik. oder etwa $^1/_9$ des Durchmessers (Fig. 14), ebenso bei *Nerium Oleander* (Stammdicke = 50^{mm}) ca 2—3 Mik. oder etwa $^1/_{12}$ des Durchmessers (Fig. 12). Und möglicherweise steigt der maximale Grenzwerth in ganz alten Stämmen noch etwas höher. Unter allen Umständen bleiben jedoch diese Zahlenwerthe so sehr hinter denen der Euphorbien zurück, dass der inter-

Digitized by Google

stitienlose Anschluss des umgebenden Parenchyms an die Röhrenwand, welcher bei *Morus* und *Nerium* die Regel bildet, nicht auffallen kann. Denn so lange wir die etwaigen Turgescenzschwankungen in der Rinde nicht etwas genauer bestimmen können, als es gegenwärtig möglich ist, können auch geringfügige Wandverstärkungen, die vielleicht damit zusammenhängen, nicht Gegenstand der Betrachtung sein. Wir müssen uns auch hier, wie immer in solchen Fragen, auf die extremen Fälle beschränken, wie sie bei den Euphorbien vorliegen.

2. Spannungszustände der Membran.

Wie gross der hydrostatische Druck in den Milchsaftröhren werden kann, ist bis jetzt nicht ziffermässig ermittelt. Dass er aber eine sehr beträchtliche Höhe erreicht, geht aus folgenden Thatsachen unzweifelhaft hervor. Man begegnet zuweilen auf Längsschnitten braungelben Massen von Milchsaft, welcher letztere hier augenscheinlich in einen geronnenen, halbfesten Zustand übergegangen ist. Lässt man nun Äther auf diese pfropfenartigen Inhaltsmassen einwirken, so lösen sich dieselben allmälig auf und man beobachtet alsdann, dass sich hierbei der Durchmesser der Röhre um mehrere (z. B. circa 4 bis 5) Procent verkleinert, indess die Wanddicke um 50 Procent und darüber (z. B. von 6 auf 10 Mik.) zunimmt. Das Ergebniss bleibt dasselbe, wenn der zugesetzte Äther nachträglich wieder durch Wasser verdrängt wird. Die bezeichneten Dimensionsänderungen sind also nicht etwa als specifische Wirkungen des umgebenden Mediums zu betrachten, sondern stehen zweifellos mit dem Verschwinden der pfropfenartigen Inhaltsmassen im Zusammenhang.

Dieser Zusammenhang kann meines Erachtens nur in folgender Weise gedacht werden. Der Milchsaft stand zu der Zeit, als die Gerinnung stattfand, unter einem ansehnlichen hydrostatischen Druck. Durch diesen Druck wurde die Wandung der Röhre elastisch gedehnt, ihr Durchmesser daher entsprechend vergrössert. Gleichzeitig erlitt auch die Wanddicke eine beträchtliche Reduction; die inneren Lamellen der Membran dehnten sich also stärker als die äusseren. In diesem Zustande erfolgte die Bildung des gedachten Pfropfens, wodurch die vorhandene Spannung fixirt wurde. Durch Zusatz von Äther wird sodann die geronnene Masse erweicht und gelöst; die gespannte Membran zieht sich jetzt in tangentialer Richtung um einige Procent zusammen, bis die Spannung verschwunden ist, und auch die Wanddicke steigert sich bis zu dem Maass, welches dem spannungslosen Zustand entspricht.

Digitized by Google

Dass die inneren Lamellen der Wand in ihren physikalischen Eigenschaften von den mehr peripherischen merklich abweichen, geht auch aus dem Verhalten einzelner Röhrenstücke in Wasser hervor. Das freie Ende eines solchen Stückes erscheint nämlich mehr oder weniger erweitert, oft sehr deutlich (Fig. 10), und die inneren Membranschichten stehen etwas über die anderen hervor, so dass die Schnittfläche, auch wenn das Messer genau quer geführt wurde, merklich schief zu stehen kommt. Es beweist dies, dass die inneren Lamellen im unverletzten Zustande sich sowohl in longitudinaler wie in tangentialer Richtung in Druckspannung befinden, während in den äusseren eine entsprechende Zugspannung besteht. Zunächst der Schnittfläche wird nun begreiflicherweise das Gleichgewicht gestört; die peripherischen Schichten contrahiren sich etwas, die inneren erweitern und verlängern sich. Damit stimmt auch die Thatsache überein, dass Theilstücke eines ringförmigen Querschnittes weniger stark gekrümmt sind, als der unversehrte Ring, weil an solchen Stücken sich Zug- und Druckspannungen theilweise ausgleichen können.

Schon die vorhin erwähnte Erweiterung der Milchsaftröhren um 4—5 Procent, hervorgerufen durch den hydrostatischen Druck, beweist zur Genüge, dass ihre Wandungen einen ziemlich hohen Grad von Dehnbarkeit besitzen. Beobachtungen an längeren Röhrenstücken, welche in der Längsrichtung gezerrt wurden, lassen indess noch auf erheblich stärkere Dehnungen schliessen, die ich auf mindestens 15—20 Procent veranschlagen möchte. In einzelnen Fällen wurde sogar eine Verlängerung bis zu 25 Procent constatirt. Jedenfalls gehören die Wandungen der Milchröhren zu den dehnbarsten Membranen, die man kennt. Dabei scheint ihre Elasticität innerhalb gewisser, ziemlich weit gezogener Grenzen eine nahezu vollkommene zu sein.

Die Tragfähigkeit der Wandsubstanz ist zwar, wie sich erwarten liess, nicht eben gross, doch mit Rücksicht auf die Weichheit derselben immerhin beträchtlich. Isolirte Röhrenstücke von circa 1.5^{cm} Länge, 52 Mik. Durchmesser und 8 Mik. Wanddicke trugen z. B. ohne zu reissen 3.74^{g}, was pro Quadratmillimeter Querschnittsfläche $= 3.38^{kg}$ ausmacht. In tangentialer Richtung ist die Festigkeit voraussichtlich geringer; eine genauere Messung derselben ist jedoch mit allzugrossen Schwierigkeiten verknüpft.

Berechnet man den tangentialen Zug x, den die Röhrenwandung unter dem Druck des Milchsaftes auszuhalten hat, so erhält man für einen Überdruck von n Atmosphären (die Atmosphäre à 10^{g} pro Quadratmillimeter), wenn der Radius der Röhre zu 30 Mik. und die Wanddicke zu 10 Mik. angenommen wird, pro Quadratmillimeter den Werth[1]

[1] Nach der Formel $x = \frac{rp}{d}$ (s. Mikroskop, 2. Aufl. S. 413).

Digitized by Google

$$x = \frac{n \cdot 0.03 \cdot 10}{0.01} = n \cdot 30^{g}.$$

Hiernach würde also die Inanspruchnahme pro Quadratmillimeter selbst bei einem Überdruck von 10 Atmosphären erst 300^{g} betragen. Ist nun auch die Widerstandsfähigkeit der Membran in tangentialer Richtung unbekannt und jedenfalls nicht hoch zu veranschlagen, so scheint mir doch aus obigen Zahlenverhältnissen mit grosser Wahrscheinlichkeit hervorzugehen, dass der Druck in den Milchsaftröhren zum Mindesten mehrere Atmosphären erreicht. Denn angenommen, das Tragvermögen pro Quadratmillimeter betrage in der Richtung der Tangente noch nicht ganz die Hälfte des oben für die Längsrichtung gefundenen Werthes, also etwa 1500^{g}, und die beobachtete Dehnung von 5 Procent sei nur der fünfte Theil der zulässigen, so würde dies immerhin einen tangentialen Zug von 300^{g} pro Quadratmillimeter, also genau den vorhin erwähnten Überdruck von 10 Atmosphären ergeben.

Aus der hohen Spannung der Membran in den Milchröhren erklärt sich auch die eigenthümliche Erscheinung, dass der Milchsaft selbst an ganz welken, theilweise vertrockneten Exemplaren noch aus Schnittwunden hervorquillt, während dies an Objecten mit dünnwandigen Röhren, wo der Druck vorzugsweise vom turgescenten Parenchym ausgeht, nicht wahrgenommen wird.

3. Bewegung des Milchsaftes.

Die elastische Spannung der Röhrenwand, welche nach dem Vorhergehenden mit einer Dehnung von circa 5 Procent verknüpft ist, stellt offenbar eine Kraftquelle dar, welche sofort Bewegung im Inhalte hervorruft, sobald irgendwo im System eine Druckverminderung eingetreten ist, und zwar wird die Bewegung stets nach den Orten geringeren Druckes gerichtet sein. Insofern besteht eine gewisse Ähnlichkeit zwischen den dickwandigen Milchsaftröhren der Euphorbien und den elastisch gespannten Arterien der höheren Thiere. Aber während bei diesen die Verluste an Spannkraft durch die rhythmischen Bewegungen des Herzens rasch wieder ersetzt werden, ist die Pflanze bei diesem Ersatze in letzter Instanz auf die langsam wirkenden endosmotischen Kräfte angewiesen. Dafür ist aber auch die Spannung in den Milchröhren eine mehrfach höhere als in den Arterien,[1] der Kraftvorrath also entsprechend grösser.

Dass in der That durch locale Druckverminderung in den Milchsaftgefässen eine Strömung nach den Orten geringeren Druckes hin

[1] In der menschlichen *Aorta* beträgt der Blutdruck nach Angabe der Lehrbücher circa 250^{mm} Quecksilber, in der *Brachialis* circa $110—120^{mm}$.

Digitized by Google

bewirkt wird, lässt sich experimentell am besten an unversehrten, aber hinlänglich zarten Organen mit durchscheinenden Milchröhren nachweisen. Ich benutzte hierzu Keimpflanzen von *Chelidonium majus*, welche ausser den Cotyledonen noch etwa ein Blättchen entfaltet hatten. Solche Pflänzchen wurden zunächst so auf den Objectträger gebracht, dass der grösste Theil des Wurzelsystems in Wasser unter das Deckglas zu liegen kam, während die Spitze der Pfahlwurzel in die Luft hervorragte und hier der Verdunstung ausgesetzt war. Nach kurzer Zeit entstand alsdann in dem Wurzelstück unter dem Deckglas eine lebhafte Strömung, welche nach der unversehrten, langsam vertrocknenden Wurzelspitze gerichtet war. Gewöhnlich fand allerdings diese Strömung nicht mit gleichmässiger Geschwindigkeit, sondern mehr ruckweise statt, weil die zahlreichen Körnchen des Inhalts sich in den engen Röhren leicht stauen, aber die Bewegungsrichtung war durchaus constant und stets nach der Spitze hin gerichtet. Brachte man dagegen das ganze Wurzelsystem unter Deckglas in Wasser und liess das frei vorstehende Stämmchen mit seinen Blättchen langsam welken, so trat eine ebenso deutliche Bewegung nach der entgegengesetzten Seite hin ein.

Die physikalische Erklärung dieser Vorgänge liegt sehr nahe. Durch die Verdunstung wird zunächst der Turgor der Parenchymzellen verringert und damit auch der Druck auf die Milchröhren abgeschwächt. Bei weiterem Welken muss nothwendig ein Stadium eintreten, in welchem die Parenchymzellen den Milchröhren Wasser entziehen, wodurch der hydrostatische Druck in den letzteren noch mehr reducirt wird. Diese Reduction erreicht endlich einen solchen Grad, dass eine deutliche Bewegung eintritt, welche so lange andauert, bis die Reibungswiderstände den noch übrig bleibenden Druckdifferenzen das Gleichgewicht halten.

Im Wesentlichen wirkt bei diesem Versuche dasselbe ursächliche Moment, welches das Ausfliessen des Milchsaftes aus angeschnittenen oder irgendwie verletzten Milchröhren veranlasst: es ist die locale Druckverminderung und die damit gegebene Druckdifferenz zwischen verschiedenen Punkten des Systems. Allein die allmälige Abgabe von Wasser an das umgebende Parenchym, wie sie beim Welken stattfindet, schliesst sich doch näher an die im Leben vorkommenden Erscheinungen an, als eine mit dem Messer oder mit der Nadel herbeigeführte Verwundung. Denn im Verlaufe der Lebensprocesse ist es ja ebenfalls nur die Abgabe von Bestandtheilen des Inhalts (freilich nicht blos von Wasser), welche eine locale Verminderung des hydrostatischen Druckes in den Milchsaftgefässen bewirkt. Und umgekehrt kann eine Erhöhung dieses Druckes an irgend einer Stelle nur durch

Digitized by Google

Aufnahme von Wasser und Substanz aus der Umgebung zu Stande kommen.

Dass die Milchsaft führenden Pflanzen diese Bedingungen für das Zustandekommen der Bewegung mannigfach verwirklichen, unterliegt keinem Zweifel. Schon das Scheitelwachsthum der Organe und die damit zusammenhängende Verlängerung der Milchröhren ist ohne Druckschwankungen nicht wohl denkbar und der fortwährende Verbrauch von Nährstoffen des Milchsaftes an der einen, die Aufnahme und Neubildung solcher Stoffe an der anderen Stelle bedingt nothwendig eine Steigerung der bereits vorhandenen Druckdifferenzen. An eine directe Beobachtung der hierdurch bewirkten Bewegungen ist jedoch in den meisten Fällen nicht zu denken; wir müssen uns darauf beschränken, Thatsachen festzustellen, welche auf indirectem Wege zu der Schlussfolgerung führen, dass eine Bewegung des Milchsaftes nothwendig stattgefunden haben muss.

Solche Thatsachen hat nun bereits SCHULLERUS[1] für die von ihm untersuchten Euphorbien namhaft gemacht, nachdem schon FAIVRE[2] zu dem Schlusse gekommen, dass die Neubildung des ächten Milchsaftes in den grünen Organen stattfinde und dass von da eine Wanderung desselben nach den Verbrauchsstätten hin anzunehmen sei. SCHULLERUS stützt seine Folgerungen ausschliesslich auf das Verhalten der Stärkekörner des Milchsaftes. Er weist unter anderem nach, dass am Bildungsheerde junger Seitenwurzeln sich Stärkekörner in den Milchröhren ansammeln, welche nach Form und Grösse unmöglich an Ort und Stelle entstanden sein können; dass ferner die Zahl der Stärkekörner im Milchsafte von Blättern, welche man im Dunkeln vegetiren lässt, sofort merklich abnimmt, ohne dass hierbei Lösungsprocesse mitspielten, und dergleichen mehr.

Da die in Rede stehenden Untersuchungen in meinem Institut zu Ende geführt wurden, so hatte ich Gelegenheit, manche der hierauf bezüglichen Präparate näher zu prüfen und mich von der Richtigkeit der vorhin erwähnten Angaben zu überzeugen. Es schien mir aber doch der Mühe werth, auch bei meinen Beobachtungen, die zunächst auf andere Dinge gerichtet waren, die Bewegungsfrage im Auge zu behalten und auf einschlägige Erscheinungen genau zu achten. So mögen denn die folgenden Mittheilungen, in welchen auf einige weitere Belege für die Massenbewegung des Milchsaftes hingewiesen wird, hier Platz finden.

---

[1] Die physiologische Bedeutung des Milchsaftes von *Euphorbia Lathyris*. Abhandlungen des Bot. Vereins der Provinz Brandenburg, XXIV (1882), S. 79.

[2] Ann. sc. nat. 5. série, t. VI (1866) und ebenda t. X (1869).

Digitized by Google

1. Im Milchsaft eines Blattes von *Euphorbia splendens* fanden sich sehr kleine bis mässig grosse Stärkekörner, alle stäbchenförmig und im Maximum 20 bis 26 Mik. lang, ohne Verdickungen an den Enden (Fig. 2). Einige Centimeter weiter unten im Stamm zeigten die hier ziemlich zahlreichen Stärkekörnchen des Milchsaftes alle Übergänge von der grösseren Stäbchenform zur charakteristischen Knochenform (Fig. 3), welche letztere im Blatte nirgends vorkommt. Da andererseits kleine, noch in den ersten Entwickelungsstadien befindliche Stäbchen im Stamme entweder ganz fehlen oder doch äusserst selten sind, so bleibt nur die Annahme übrig, dass die Stäbchen in den Milchröhren der Blätter entstehen, dann unter Beibehaltung ihrer Form in den Stamm einwandern und hier allmälig Knochenform annehmen. Eine solche Einwanderung ist jedoch ohne Massenbewegung des Milchsaftes nicht denkbar.

2. Nicht weniger charakteristisch sind die Formverschiedenheiten, welche man zuweilen an Keimpflanzen einiger Euphorbien zwischen der Milchsaftstärke der Cotyledonen und des hypocotylen Gliedes einerseits und derjenigen der Wurzeln andererseits beobachtet. Die Milchröhren der Wurzeln zeigen nämlich häufig aussergewöhnlich schlanke, raphidenähnliche Stärkekörner (z. B. bei *Euphorbia Peplus*) oder auch solche, welche in Folge zahlreicher Einkerbungen ein gegliedertes Aussehen gewähren (*E. Lathyris*). Die nähere Prüfung ergiebt auch hier, dass solche Formen aus normalen Stäbchen von 15 bis 30 Mik. Länge, wie sie in den oberen Theilen der Keimpflanzen vorkommen, und zwar durch theilweise Lösung entstanden sein müssen. Diese Stäbchen wandern unverändert in die Pfahlwurzel ein und erfahren hier erst nachträglich die angedeuteten Formveränderungen, um endlich vollständig gelöst zu werden.

3. Hin und wieder findet man eine grössere Zahl von Körnern in einer Milchsaftröhre so dicht beisammen, dass sie dieselbe vollständig verstopfen (Fig. 1). In solchen Fällen befindet sich gewöhnlich auf der Seite, nach welcher die Strömung des Milchsaftes vorzugsweise gerichtet ist, irgend ein ungewöhnliches Korn (wie in unserer Figur rechts) oder sonst ein Hinderniss, welches offenbar zuerst die Verstopfung veranlasste und für den nachströmenden Milchsaft wie ein Filter wirkte, indem es die Stärkekörner zurückhielt, die Flüssigkeit aber durchliess. Ähnliche Ansammlungen von Stärkekörnern habe ich gelegentlich auch in der Scheitelwölbung kurzer Milchröhrenäste vorgefunden (Fig. 4).

4. Ein Exemplar von *Chelidonium majus* wurde aus dem Freiland in einen Topf verpflanzt und sodann im Warmhause circa 8 Tage im Dunkeln cultivirt. Die Pflanze entwickelte sich während dieser Zeit

Digitized by Google

sehr kräftig; allein der Milchsaft, welcher zuletzt aus Blattstielwunden ausfloss, war sehr wässerig und offenbar viel ärmer an ungelösten kleinen Körnchen als bei normaler Vegetation. Lässt man nun auch die Frage, ob vielleicht ein Theil der Körnchen resorbirt worden sei, gänzlich ausser Betracht, so ist doch so viel sicher, dass unter allen Umständen eine grössere Vertheilung der Körnchen in der Flüssigkeit stattgefunden haben muss, da dieser Vorgang auch im Falle einer theilweisen Resorption voraussichtlich das Primäre sein würde oder doch höchstens gleichzeitig und allmälig eintreten könnte. Eine solche Vertheilung auf grössere Entfernungen setzt aber nothwendig eine Massenbewegung des Saftes voraus.

Zu der nämlichen Schlussfolgerung führt auch der Vergleich von normal entwickelten Pflanzen (z. B. *Tragopogon porrifolius*) mit solchen, die ihrer Blätter beraubt wurden und in diesem Zustande längere Zeit vegetirt hatten. Der Milchsaft zeigt in Folge dessen eine mehr wässerige Beschaffenheit, wobei die grössere Vertheilung der vorhandenen Mengen ungelöster Bestandtheile jedenfalls mit ins Gewicht fällt, wahrscheinlich sogar allein maassgebend ist. — Auch einige der von FAIVRE beschriebenen Experimente fordern durchaus die Annahme einer Massenbewegung des Milchsaftes.

Durch die vorstehenden Mittheilungen soll indessen keineswegs in Abrede gestellt werden, dass neben den Veränderungen des Inhaltes, welche durch Massenbewegung bewirkt werden, auch andere vorkommen, die wir dem Einfluss des lebenden Plasmaleibes zuschreiben müssen. Dahin rechne ich z. B. das Anschwellen der Milchröhren am Entstehungsorte seitlicher Organe, wie z. B. der Nebenwurzeln und Adventivknospen,[1] ebenso die Bildung seitlicher Ausstülpungen u. dergl. Dahin mögen aber auch manche Vorgänge im Inhalt zu rechnen sein, wie z. B. eine locale Vermehrung gewisser Bestandtheile, der Fetttröpfchen, Harzkügelchen etc. Denn dass alle diese Dinge stets nur in den grünen Geweben entstehen und nach den farblosen translocirt werden, ist jedensfalls nicht erwiesen und, wie mir scheint, auch nicht wahrscheinlich.

4. Verschluss der Milchröhren bei Verwundungen.

Es ist bekannt, dass die durch den Blattfall oder durch künstliche Eingriffe entstehenden Wunden gewöhnlich durch Peridermzonen,

[1] Vergl. hierüber SCHULLERUS, a. a. O. S. 51. Der Autor geht wohl etwas zu weit, wenn er sagt: »Hier wird so recht deutlich, dass die Erweiterungen der Milchsaftschläuche nur eine Folge des Druckes sind, welchen die sich anhäufenden Nährstoffe bewirken müssen, und dass dadurch Verzweigungen erzeugt werden.«

Digitized by Google

welche annähernd parallel zur Wundfläche verlaufen, wieder verschlossen werden und dass bei diesem Vorgang nicht selten ein Zerreissen der vorhandenen Fibrovasalstränge durch das Phellogen erfolgt. Zuweilen findet überdies ein vorläufiger Verschluss der Gefässe durch Gummi statt. Wie verhalten sich nun unter denselben Bedingungen die Milchsaftschläuche? Hierüber liegen, soviel mir bekannt, nur die Beobachtungen von E. Schmidt[1] an den gegliederten Milchröhren von *Scorzonera hispanica* vor. Es mag daher einiges Interesse gewähren, diese Beobachtungen durch übereinstimmende, aber auf ungegliederte Milchröhren bezügliche Angaben zu ergänzen.

Nach meinen bisherigen Wahrnehmungen kommen bei den ungegliederten Milchsaftschläuchen dieselben Arten der Verschlussbildung vor wie bei *Scorzonera*, nämlich 1. Zusammenpressen durch das angrenzende Gewebe und 2. Wandbildung innerhalb der Röhre. Die Blattnarben, die ich bei *Dorstenia elata* näher untersucht habe, bieten sehr instructive Beispiele für die erstere Art, nämlich für das allmälige Zusammenpressen der Milchröhren durch das Phellogen. Das letztere wirkt hier in der That ganz ähnlich, wie der Quetschhahn auf einen Kautschukschlauch. In Fig. 13 ist eine auf diese Weise comprimirte Milchröhre dargestellt; die innersten Zellen, welche in diesem Stadium den Verschluss bilden helfen, sind sklerenchymatisch verdickt. Den Beginn der Compression habe ich bei der nämlichen Pflanze an den Insertionsstellen von Blättern beobachtet, die sich bereits entfärbt hatten, aber noch nicht abgefallen waren.

In der Nähe der Schnittflächen abgeschnittener Stammstücke von *Euphorbia splendens*, die mehrere Tage liegen geblieben, hatten sich dagegen in den Milchröhren selbst vollständige Querwände gebildet, meistens in der Art, dass eine geronnene Inhaltspartie, die wie ein Pfropf in der Milchröhre steckte, beiderseits durch eine Wand abgegrenzt war (Fig. 5). Zuweilen fanden sich sogar zwei solche Pfropfen unmittelbar übereinander, beide mit deutlichen Membranabschlüssen (Fig. 6). Wundperiderm hatte sich an solchen Schnittflächen noch nicht gebildet.

Hiernach besteht also mit Rücksicht auf die vorkommenden Modalitäten der Verschlussbildung kein Unterschied zwischen den gegliederten und den ungegliederten Milchröhren.

Ob die nachträgliche Membranbildung, wie sie die Querschnittsansicht Fig. 11 zeigt, ebenfalls hierher gehört, lasse ich dahingestellt, da mir über den Längsverlauf dieser inneren Membran keine Beobachtungen vorliegen.

---

[1] Bot. Ztg. 1882. Nr. 27 u. 28.

Digitized by Google

5. Bedeutung der Excrete im Milchsaft.

Obschon die neueren Untersuchungen ergeben haben, dass der Milchsaft ein Nahrungssaft ist, welcher plastische Baustoffe (Eiweiss, Fett und Kohlehydrate) enthält und solche auch nach den Orten lebhafteren Wachsthums translocirt, kann doch das gleichzeitige Vorkommen von harzähnlichen Stoffen oder Kautschuk, die wir nach dem gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse nur als Excrete betrachten können, nicht bestritten werden. Darauf hat schon FAIVRE, der in neuerer Zeit (1866) zuerst wieder die ernährungsphysiologische Bedeutung des Milchsaftes erkannte, ausdrücklich hingewiesen. Er sagt in seiner zweiten hierauf bezüglichen Abhandlung[1]: »Qu'il existe dans le latex des principes excrétoires tel que le caoutchouc et le tannin, c'est ce qu'on ne saurait nier, parce que tel est le résultat de l'expérience, mais il y existe surtout des matières assimilables.« In gleichem Sinne äussert sich auch G. HABERLANDT[2], nachdem er für die Ansicht von E. FAIVRE anatomische Belege beigebracht, indem er bemerkt. »Und was die Bedeutung der Milchröhren als Secret- oder richtiger Excretbehälter anlangt, so kann und muss dieselbe .... vollständig anerkannt werden.« Damit stehen auch die Angaben der mir bekannten neueren Lehrbücher in Übereinstimmung.

Andererseits betont aber FAIVRE, dass der Milchsaft von *Ficus* und *Morus* unter Umständen eine wässerige Beschaffenheit zeige, so z. B. bei Sprossen, welche im Dunkeln oder in kohlensäurefreier Luft vegetirt hatten, ebenso bei Stecklingen, die man im Vermehrungshaus zu weiterer Entwickelung gebracht. Von letzteren wird ausdrücklich gesagt:[3] nous constatons que chez une bouture en état de végétation le latex s'étend et diminue très notablement. Und weiterhin[4] wird als Ergebniss von Ringelungsversuchen mitgetheilt: Si l'on pratique sur un tronc ou sur un rameau du Mûrier, au commencement du printemps, une incision annulaire, si l'on a soin d'enlever les feuilles au fur et à mesure de leur développement, on parvient à déterminer par épuisement la disparition du latex dans ces troncs ou ces rameaux.

Da nun die milchweisse Färbung des normalen Inhalts der Milchröhren vorwiegend von den zahlreichen kleinen Kügelchen (von circa 2—4 Mik. Durchmesser) herrührt, welche in demselben vertheilt sind, so liegt die Vermuthung nahe, dass das Wässerigwerden des Saftes

---

[1] Etudes sur le latex du Mûrier blanc. Ann. sc. nat. 5e série, t. X (1869), p. 117.

[2] Zur physiologischen Anatomie der Milchröhren. Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wiss. Bd. LXXXVII (1883), 1. Abth. S. 66.

[3] Ann. sc. nat. 5e série, t. X, p. 106.

[4] Ebenda, p. 109.

Digitized by Google

durch theilweise Resorption dieser Kügelchen bedingt sei. In den letzteren sind aber die oben bezeichneten Excrete jedenfalls mitenthalten; darauf deutet schon ihr optisches Verhalten (das Resultat der chemischen Analyse des Saftes als bekannt vorausgesetzt); dafür spricht auch die Löslichkeit der Kügelchen in Terpentinöl und kaltem Alkohol, sowie die Rothfärbung derselben nach Zusatz von Alcanna-Tinctur.

Einerseits stimmen demnach die Autoren überein in der Annahme, dass Kautschuk, Harze u. dergl., welche oft in erheblicher Menge im Milchsaft enthalten sind, als nutzlose Excrete zu betrachten seien. Andererseits scheint aber aus den Versuchen Faivre's mit Bestimmtheit hervorzugehen, dass die kleinen Kügelchen, welche doch die unverkennbaren Träger der genannten Excrete sind, unter Umständen theilweise resorbirt und folglich verwerthet werden; wenigstens ist bis dahin eine andere Erklärung für das Wässerigwerden des Milchsaftes nicht gegeben worden.

Für die anatomisch-physiologische Betrachtungsweise würde nun die Thatsache einer theilweisen oder vollständigen Resorption sich den sonstigen Erfahrungen über zweckmässige Anpassungen ohne alle Schwierigkeit harmonisch anreihen, während die Annahme, dass die Pflanze während ihres ganzen Lebens ein nutzloses Excret in den Milchröhren hin und her schiebe, etwas Unbefriedigendes hat. Es schien mir deshalb wünschenswerth, vor Allem über das thatsächliche Verhalten der fraglichen Kügelchen volle Gewissheit zu erlangen. Werden dieselben unter gewissen Umständen wirklich gelöst und ist die wässerige Beschaffenheit des Milchsaftes stets nur eine Folge davon, dass die Zahl oder die Grösse der Kügelchen abgenommen hat?

Um diese Frage zu beantworten, wiederholte ich einige der von Faivre angestellten Versuche. Es wurden welke und halbwelke Ficus-Blätter, Sprosse von *Morus alba* im Zustand der Winterruhe, Wurzeln von entblätterten Tragopogon-Stöcken, Theile von *Lactuca* und *Chelidonium*, welche einige Tage im Dunkeln, theils in atmosphärischer Luft, theils in Sauerstoff vegetirt hatten in der Art untersucht, dass der aus Schnittflächen oder Wunden hervorquellende Milchsaft direct unter Deckglas gebracht wurde. Derselbe war in der That in manchen Fällen sehr wässerig geworden, was zum Mindesten eine viel grössere Vertheilung der Kügelchen (Moreen) oder unmessbar kleinen Körperchen (Papaveraceen, Cichoriaceen) voraussetzt. Ob aber zugleich eine Resorption derselben stattgefunden, konnte in keinem Falle mit Sicherheit entschieden werden. Es war namentlich ein Umstand, welcher gegen die Annahme, dass ein Theil der ungelösten Bestandtheile des Milchsaftes verschwunden sei, immer wieder Bedenken einflösste. In den Organen, deren Milchsaft wässerig geworden war,

Digitized by Google

fanden sich nämlich hin und wieder pfropfenartige Massen in den Milchröhren, welche offenbar durch Gerinnen entstanden waren. In diesen Massen waren natürlich auch zahlreiche Kügelchen vereinigt, gleichsam zusammengebacken; an eine quantitative Bestimmung des hierbei verbrauchten Materials war aber nicht zu denken.

Ich will auch nicht unerwähnt lassen, dass die Behandlung des Milchsaftes mit verdünnten Säuren und Pepsin irgend eine lösende Wirkung auf die fraglichen Gebilde nicht erkennen liess. Ebenso mag daran erinnert werden, dass im Milchsafte von *Ficus Carica* und *Carica Papaya* ein pepsinähnliches Verdauungsferment enthalten ist, welches Fibrin zu lösen vermag, die im Safte enthaltenen Körperchen aber nicht angreift.

Nach alledem wüsste ich eine bestimmte Thatsache, aus welcher die Verwendbarkeit der in Rede stehenden Gebilde im Ernährungsprocess zu folgern wäre, nicht beizubringen. Es bleibt mir also nur übrig, bei der bisherigen Annahme, dass es wirkliche Excrete seien, zu verharren.

Damit betrachte ich indessen die Frage keineswegs als erledigt. Die Rolle, welche diese Excrete spielen, kann ja auch in rein mechanischer Hinsicht eine nützliche und nothwendige sein. Es wäre möglich, dass die emulsionsartige Beschaffenheit des Milchsaftes überhaupt bloss den Zweck hätte, das Emporsteigen der specifisch leichteren Fetttröpfchen in der wässerigen Lösung und ebenso das Sinken der specifisch schwereren Stärkekörner zu verhüten und dadurch die gegebene Vertheilung der plastischen Baustoffe, sofern dieselbe nicht durch Massenbewegungen verändert wird, zu erhalten. Dass diese Wirkung thatsächlich eintritt, lässt sich für die bekannten stäbchen- oder knochenförmigen Stärkekörner der Euphorbien leicht constatiren. Man hat nur nöthig, einen Tropfen frischen Milchsaftes von irgend einer Euphorbia-Art zwischen Objectträger und Deckglas zu bringen und die so erhaltene Flüssigkeitsschicht in lothrechter Lage zu untersuchen. Man überzeugt sich alsdann, dass die Stärkekörner keine wahrnehmbare fallende Bewegung zeigen. Die Annahme eines entsprechenden Einflusses auf die kleinen Fetttröpfchen hat daher nichts Unwahrscheinliches.

Ist diese Auffassung gerechtfertigt, so erscheint das Vorkommen der harzähnlichen Körperchen im Milchsaft einigermaassen verständlich. Als vollkommen abgeschlossen möchte ich aber die Frage nicht betrachten.

Digitized by Google

Erklärung der Abbildungen.

Die Vergrösserung ist der Figurennummer auf der Tafel in Parenthesen beigesetzt.

Fig. 1. Milchröhre aus der Wurzel einer Keimpflanze von *Euphorbia grandidens*. Die Stärkekörner sind zusammengeschoben, offenbar weil das vorderste sichelförmige Korn den Weg versperrt hatte. Der Pfeil ist nach der Wurzelspitze gerichtet.

Fig. 2—3. Stärkekörner aus dem Milchsafte von *Euphorbia splendens*. Fig. 2 Stäbchenformen aus dem Basaltheil eines Blattes. Fig. 3 knochenförmige Körner aus dem Milchsafte einer Stammwunde, einige Centimeter unterhalb der untersuchten Blattbasis.

Fig. 4. Seitliche Ausstülpung einer grossen Milchröhre von *Euphorbia splendens*. Die Stärkekörner sind im Scheitel der Ausstülpung zusammengedrängt.

Fig. 5—6. Milchröhrenstücke aus dem Basaltheil eines abgeschnittenen Zweiges, der einige Tage liegen geblieben war. Zu beiden Seiten der geronnenen Milchsaftmassen haben sich Querwände gebildet.

Fig. 7—9. Querschnittsansichten von Milchröhren, welche mit einem Theil ihrer Aussenfläche an einen luftführenden Raum grenzen. Fig. 7 von *E. virosa*, Fig. 8 von *E. canariensis*, Fig. 9 von *E. grandidens*.

Fig. 10. Eine Milchröhre von *Euphorbia splendens*, deren abgeschnittenes oberes Ende eine deutliche Erweiterung und zugleich eine Verkürzung der peripherischen Membranschichten zeigt.

Fig. 11. Querschnittsansicht einer Milchröhre von *Euphorbia splendens*, deren Inhalt sich nachträglich mit einer neuen Membran umhüllt hat.

Fig. 12. Querschnittsansicht einer Milchröhre aus einem 5 Centimeter dicken Stamm von *Nerium Oleander*. Wanddicke ca. 2—3 Mik.

Fig. 13. Querschnitt durch eine Blattnarbe von *Dorstenia elata*. Die Milchröhre *m* ist bei der Korkbildung zusammengedrückt worden.

Fig. 14. Querschnitt durch die innere Rinde eines alten Stammes von *Morus alba*. Die Milchröhre *m* hat 4 Mik. Wanddicke.

Digitized by Google

19. Über die im Laufe der phylogenetischen Entwickelung entstandene, angeborene Spalte des Brustbeinhandgriffes der Brüllaffen.

Von Professor Dr. Paul Albrecht
z. Z. in Brüssel.

(Vorgelegt von Hrn. Waldeyer am 16. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St XX]; — ausgegeben am 23. April.)

Schon in einigen früheren Arbeiten[1] habe ich Gelegenheit gehabt, mich dahin auszusprechen, dass es anscheinend die undankbarste, in Wirklichkeit aber eine zu den unerwartetsten Resultaten führende Aufgabe ist, sich mit der Copularisirung und der Sternalisirung der Wirbelthierrippen und der diesen Organen sei es homologen, homodynamen oder homotropen Gebilde zu beschäftigen.

Aber, wie ich schon damals betonte, hat die Erforschung der diesen beiden Vorgängen zu Grunde liegenden Gesetze in der nüchternsten und phantasielosesten Weise zu geschehen; und nur eben dadurch, dass dies bisher Niemand unternommen hat, ist es zu erklären, dass so viele diesen Vorgängen ihren Ursprung verdankenden Organe ihrem morphologischen Werthe nach bisher nicht verstanden worden sind.

Einen vortrefflichen Beweis für die Richtigkeit des soeben Vorgetragenen giebt uns der Brustbeinhandgriff der Brüllaffen, mit dem sich eine Reihe ausgezeichneter Anatomen beschäftigt, aber nur deshalb die Lösung des uns hier von der Natur vorgelegten Räthsels nicht gefunden hat, weil ihren Forschungen nicht die einfachen mathematischen Copularisations- und Sternalisationsformeln, die ich in einer meiner genannten Schriften[2] entwickelt habe, zu Grunde lagen.

[1] P. Albrecht: 1. Note sur un sixième costoïde cervical chez un jeune *Hippopotamus amphibius L.* (Bulletin du Musée Royal d'Histoire naturelle de Belgique, Bruxelles, 1882). 2. Sur les paracostoïdes des vertèbres lombaires de l'homme (Bruxelles, Manceaux, 1883). 3. Sur le Pelvisternum des Édentés avec des observations morphologiques sur l'appareil sternal des vertébrés (Bulletin de l'Académie Royale des Sciences de Belgique, 1883). 4. Sur les copulae intercostoïdales et les hémisternoïdes du sacrum des mammifères (Bruxelles, Manceaux, 1883). 5. Sur les éléments morphologiques du manubrium du sternum chez les mammifères (Bruxelles, Manceaux, 1884.)

[2] P. Albrecht: Sur les copulae intercostoïdales et les hémisternoïdes du sacrum des mammifères. p. 11.

Digitized by Google

Ich habe nun die Absicht in folgender Weise vorzugehen, erstens das *Manubrium sterni* der Brüllaffen zu untersuchen, zweitens die Ansichten bisheriger Autoren über denselben Gegenstand in ihrer Irrthümlichkeit zu beleuchten, drittens nachzuweisen, dass die bei den Brüllaffen im Laufe der phylogenetischen Entwickelung entstandene *Fissura manubrii sterni congenita* der erste positive, d. h. nicht allein auf Indicien beruhende, Beweis für die Abstammungs- und Anpassungslehre ist.

I. Der Brustbeinhandgriff der Brüllaffen.

Es giebt Brüllaffen, deren Brustbeinhandgriff in allen wesentlichen Eigenschaften völlig dem *Manubrium sterni* des Menschen gleicht.

Als Beweis hierfür erlaube ich mir die nachstehende Zeichnung Fig. 1 vorzulegen, welche uns in ventraler Ansicht die ventralen Enden der beiderseitigen Schlüsselbeine, der beiderseitigen drei ersten Rippen und des vorderen Theiles des Brustbeins eines im Königlichen anatomischen Institute der Universität Königsberg i. Pr. aufgestellten erwachsenen *Mycetes sp.* Illig. entgegenführt. Diese sowohl wie die nachfolgenden Figuren 2 und 4 habe ich in den Jahren 1877—1882, in denen ich die Ehre hatte, der Prosector des genannten Institutes zu sein, nach den betreffenden Skeleten zeichnen und in Holz schneiden lassen.

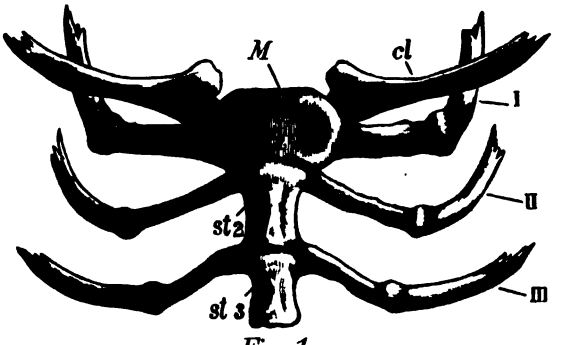


Fig. 1.

Ventrale Ansicht der ventralen Enden der beiderseitigen Schlüsselbeine und drei ersten Rippen, sowie des vorderen Abschnittes des Brustbeins eines im Königl. anatomischen Institut zu Königsberg i. Pr. befindlichen erwachsenen *Mycetes sp.* Illig.[1] (Katalog No. 807 des genannten Institutes.) ½ *cl.* Linkes Schlüsselbein. *I.* Linke 1. Rippe. *II.* Linke 2. Rippe. *III.* Linke 3. Rippe. *M.* Handgriff des Brustbeins. *st* 2 2. Sternebra. *st* 3 3. Sternebra.

[1] Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass die drei Affen des Königl. anatomischen Instituts zu Königsberg, deren *Manubrium sterni* nebst angrenzenden Organen in den Figuren 1, 2 und 4 abgebildet ist, wirklich Brüllaffen sind. Die Bestimmungen rühren von Hrn. Dr. von Seidlitz, ehemaligem Assistenten des genannten Institutes, her und sind im Wintersemester 1877/78 von demselben mit der grössten Sorgfalt ausgeführt. Die in der Figurenerklärung angegebenen Katalognummern derselben sind ebenfalls noch die Nummern des von Seidlitz'schen Säugethierkatalogs des Königsberger anatomischen Institutes.

Digitized by Google

M ist das *Manubrium sterni* unserer Brüllaffen, an das sich, wie beim Menschen die Claviculae, die Knorpel der beiderseitigen 1. und die vorderen Abschnitte der Knorpel der beiderseitigen 2. Rippen befestigen, das also wie beim Menschen zwischen den beiden Schlüsselbeinen, den beiden 1. und den beiden 2. Rippen liegt. st_2 ist die Sternebra zwischen den beiden 2. und den beiden 3., st_3 die Sternebra zwischen den beiden 3. und den beiden 4. Rippen. Die 4. Rippen selbst sind nicht gezeichnet worden.

st_2 ist also die 2., st_3 die 3. Sternebra des vorliegenden Sternum.

Es ist die 2. und 3. Sternebra, weil, wie ich anderweitig nachgewiesen habe,[1] und wie wir später wieder aufzunehmen haben werden, die 1. Sternebra, d. h. die Sternebra zwischen den beiden 1. und den beiden 2. Rippen, und die 0. Sternebra, d. h. die Sternebra zwischen den beiden 1. Brustrippen und den beiden 7. Halsrippen, einen integrirenden Theil des *Manubrium sterni* ausmachen.

Zur Erklärung der letzteren Thatsache erlaube ich mir hinzuzufügen, dass, wie ich ebenfalls anderweitig nachgewiesen zu haben hoffe,[2] der letzte Halswirbel der Säugethiere in Wirklichkeit der 1. Brustwirbel, die beiderseitige Rippe des letzten Halswirbels in Wirklichkeit die beiderseitige 1. Brustrippe derselben ist. Um jedoch nicht in einen für das schnelle Verständniss verhängnissvollen Conflict mit der bestehenden Bezeichnungsweise zu kommen, habe ich für den letzten Halswirbel der Säugethiere den Ausdruck 0. Brustwirbel, für die beiderseitige Rippe des letzten Halswirbels derselben den Ausdruck beiderseitige 0. Brustrippe gesetzt. Alsdann erweist sich die zwischen den beiderseitigen letzten Halsrippen (= Brustrippen) und den beiderseitigen sogenannten 1. Brustrippen liegende, dem *Manubrium sterni* bei den meisten Säugethieren als integrirender Theil verfallende Sternebra als 0. Sternebra, die zwischen den beiden sogenannten 1. und beiden sogenannten 2. Brustrippen liegende, ebenfalls gewöhnlich in das *Manubrium sterni* aufgehende Sternebra als 1. Sternebra.

Mit einem Worte, was wir von dem Sternum des in Rede stehenden Brüllaffen in unserer Fig. 1 abgebildet finden, ist Manubrium + Sternebra 2 + Sternebra 3.

Sehen wir uns jetzt den oberen oder kranialen Abschnitt des Brustbeines eines ebenfalls im Königlichen anatomischen Institute zu Königsberg in Pr. aufgestellten erwachsenen *Mycetus ursinus* GEOFFR.,

---

[1] P. ALBRECHT: Sur les éléments morphologiques du manubrium du sternum chez les mammifères. p. 18 u. s. w. und p. 23 u. s. w.

[2] P. ALBRECHT, ibidem p. 4 u. s. w.

Digitized by Google

den wir in unserer Fig. 2 wiedergegeben finden, an, so constatiren wir zunächst, wenn wir unsere Analyse in caudo-kranialer Richtung vornehmen, die zwischen den beiden wiederum nicht gezeichneten 4. und den beiden in der Figur vorhandenen 3. Rippen befindliche Sternebra 3 (Fig. 2 st_3).

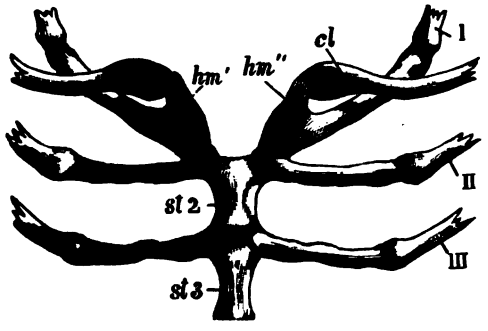


Fig. 2.

Ventrale Ansicht der ventralen Enden der beiderseitigen Schlüsselbeine und drei ersten Rippen, sowie des vorderen Abschnittes des Brustbeines eines im Königl. anatomischen Institute zu Königsberg in Pr. befindlichen erwachsenen *Mycetus ursinus* Geoffr. (Katalog Nr. 805 des genannten Institutes) ½. *cl* Linkes Schlüsselbein. *I* Linke 1. Rippe. *II* Linke 2. Rippe. *III* Linke 3. Rippe. *hm' Hemimanubrium dextrum. hm'' Hemimanubrium sinistrum. st* 2 2. Sternebra. *st* 3 3. Sternebra.

Alsdann folgt kranialwärts die zwischen den beiderseitigen 3. und den beiderseitigen 2. Rippen befindliche Sternebra 2 (Fig. 2 st_2).

Kranialwärts von dieser Sternebra 2 folgt im Gegensatze zu Fig. 1, in der sich das ganze Manubrium (Fig. 1 *M*) vor die sternebra 2 (Fig. 1 st_2) legte, ein Spalt. Sollte das Manubrium gänzlich fehlen? Keineswegs. Was also haben wir vor uns?

Bereits bei der Besprechung der Fig. 1 haben wir gesehen, dass man vom *Manubrium sterni* sagen kann, dass es zwischen den beiden Claviculae, den beiden 1. und den beiden 2. Rippen liegt. Zu jeder Seite stossen nun in Fig. 2 die 2. Rippe, die 1. Rippe und die Clavicula an ein Skeletstück (Fig. 2, *hm'* auf der rechten, *hm''* auf der linken Seite). Was kann also dieses jederseits zwischen Clavicula, 1. Rippe und 2. Rippe liegende Skeletstück nur sein? Antwort: Ein Hemimanubrium.[1]

Die rechte und die linke Hälfte des Brustbeinhandgriffes, welche sich bei dem *Mycetes sp.* Fig. 1 zum unpaaren Manubrium (Fig. 1 *M*) vereinigt haben, sind eben bei dem uns augenblicklich vorliegenden *Mycetes ursinus* Fig. 2 getrennt geblieben (Fig. 2 *hm'* und *hm''*) und zwar getrennt durch eine Längsspalte, durch eine *Fissura manubrii sterni* oder eine *Sternoschisis manubrii.*

---

[1] In meiner Note sur une hémivertèbre gauche surnuméraire de Python Sebae Dum. (Bull. du Musée Royal d'histoire naturelle de Belgique 1883, p. 21) habe ich den Vorschlag gemacht, die paarigen Hälften eines unpaaren Organes als Hemiorgane zu bezeichnen.

Digitized by Google

Dass es sich hier um eine congenitale *Fissura manubrii sterni* unseres *Mycetes ursinus* Fig. 2 handelt, ist nicht zu bezweifeln; dass es sich ferner hier um eine normale und nicht um eine teratologische *Fissura manubrii sterni* handelt, wird sich im Laufe dieser Arbeit unumstösslich erweisen. Da wir überdies beim Menschen die *Fissura manubrii sterni* kaum anders als in Verbindung mit theilweiser oder totaler Spalte des übrigen Brustbeines kennen, so muss es von Interesse sein, neben der normalen *Fissura manubrii* unseres *Mycetes ursinus* Fig. 2 die teratologische, mit fast totaler Spalte des übrigen Brustbeines complicirte, *Fissura manubrii* eines menschlichen Kindes zu sehen. Ich erlaube mir daher, eine Abbildung eines bis auf den Schwertfortsatz gespaltenenen kindlichen Brustbeines zu geben, die ich nach dem in Königsberg i. Pr. befindlichen Präparate meines zweiten Vorgängers in der Prosectur daselbst, jetzigen ordentlichen Professors der Physiologie in Strassburg, habe anfertigen lassen.

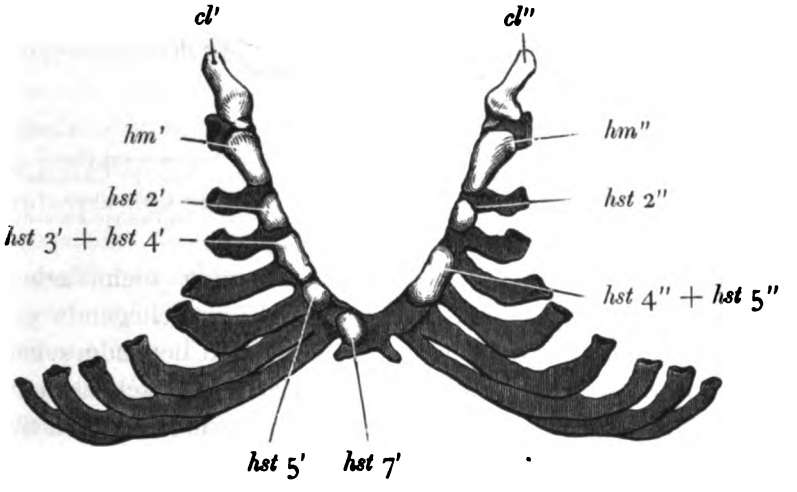


Fig. 3.

Ventrale Ansicht eines von Hrn. Prof. Goltz praeparirten, im Königsberger anatomischen Institute aufgestellten, von praexiphoïder angeborener Spalte betroffenen Brustbeines, sowie der ventralen Abschnitte der beiderseitigen Claviculae und neun ersten Rippen eines 2½jährigen Knaben (Katalog No. 213 des genannten Institutes). ½ *cl'* rechtes Schlüsselbein. *cl''* linkes Schlüsselbein. *hm'* Hemimanubrium dextrum. *hm''* Hemimanubrium sinistrum. *hst 2'* Hemisternebra 2 dextra. *hst 2''* Hemisternebra 2 sinistra. *hst 3'* + *hst 4'* Hemisternebra 3 dextra + Hemisternebra 4 dextra[1]. *hst 4''* + *hst 5''* Hemisternebra 4 sinistra + Hemisternebra 5 sinistra[1]. *hst 5'* Hemisternebra 5 dextra. *hst 7'* Hemisternebra 7 dextra.[2]

Ohne auf die weitere Analyse dieser Figur, welche ich in einer früheren Schrift[4] gegeben habe, wieder einzugehen, mache ich hier lediglich darauf aufmerksam, dass in diesem äusserst werthvollen teratologischen Falle vom Menschen wie bei der normalen *Fissura*

[1] Dies sind knöcherne Dihemisternebrae oder Dicopulae.

[2] Dies ist eine knöcherne Hemisternebra zwischen der rechten 7. Rippe und dem am Sternum hängen gebliebenen ventralen Reste der rechtsseitigen 8. Rippe.

[3] P. Albrecht: Sur les copulae intercostoïdales et les hémisternoïdes du sacrum des mammifères. p. 14.

Digitized by Google

manubrii unseres Brüllaffen, Fig. 2, das jederseitige Hemimanubrium zwischen Schlüsselbein, 1. und 2. Rippe liegt.

Um schliesslich den in Fig. 4 abgebildeten vorderen Abschnitt des Brustbeines eines ebenfalls im Königlichen anatomischen Institute zu Königsberg i. Pr. aufgestellten erwachsenen *Mycetes ursinus* Geoffr. zu verstehen, ist es abermals unumgänglich nöthig, die Analyse desselben in caudo-kranialer Richtung vorzunehmen.

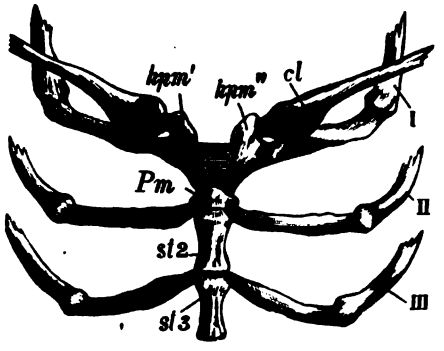


Fig. 4.

Ventrale Ansicht der ventralen Enden der beiderseitigen Schlüsselbeine und drei ersten Rippen, sowie des vorderen Abschnittes des Brustbeines eines im Königl. anatomischen Institut zu Königsberg i. Pr. befindlichen erwachsenen *Mycetes ursinus* Geoffr. (Katalog No. 806 des genannten Institutes) ½. *cl* linkes Schlüsselbein. *I* linke 1. Rippe. *II* linke 2. Rippe. *III* linke 3. Rippe. *hpm'* rechtes Hemipraemanubrium. *hpm''* linkes Hemipraemanubrium. *Pm* Postmanubrium (1. Sternebra). *st* 2 2. Sternebra. *st* 3 3. Sternebra.

st_3 ist wiederum die zwischen den beiden nicht gezeichneten 4. Rippen und den gezeichneten beiden 3. Rippen liegende 3., st_2 die zwischen den beiden 3. und den beiden 2. Rippen liegende 2. Sternebra.

Aber kranialwärts vor dieser 2. Sternebra liegt weder wie beim *Mycetes sp.* Fig. 1 *M* ein grosses zwischen den beiderseitigen Schlüsselbeinen und zwei ersten Rippen befindliches Manubrium, noch wie beim *Mycetes ursinus* Fig. 2 eine Lücke, sondern ein queres dem Manubrium des *Mycetes sp.* Fig. 1 an Grösse bei Weitem nachstehendes Knochenstück (Fig. 4 *Pm*), und erst vor diesem befindet sich eine in diesem Falle noch in ihrem hinteren Abschnitte von einer Membran geschlossene Lücke. Die betreffende Membran ist in der genannten Figur durch quere parallele Striche wiedergegeben, und, um die Aufmerksamkeit nicht von den Constituenten des Manubrium abzulenken, unbezeichnet gelassen.

Was liegt hier also vor? Wir haben hier ein *Manubrium sterni* vor uns, das in kranio-caudaler Richtung nicht wie das Manubrium des Brüllaffen, Fig. 2, bis zur Sternebra 2, sondern nur bis zum Knochenstück, Fig. 4 *Pm*, gespalten ist.

Alles aber, was vor der Sternebra 2 liegt, ist Manubrium, folglich ist in diesem Falle ein hinterer Abschnitt des Manubrium (Fig. 4 *Pm*),

Digitized by Google

den ich das Postmanubrium nennen will, ungespalten geblieben, während der vordere Abschnitt des Brustbeinhandgriffes, den ich als Praemanubrium zu bezeichnen vorschlage, gespalten zu beiden Seiten der Mittellinie in seinen beiden Hälften, dem *Hemipraemanubrium dextrum* (Fig. 4 *hpm'*) und *sinistrum* (Fig. 4 *hpm''*) fortbestehen. Die zwischen den hinteren Abschnitten der beiden Hemipraemanubrien befindliche Membran ist nichts als die an diesem Skelet erhaltene auch bei allen Fällen von teratologischer Sternalspalte beim Menschen vorkommende feste fibröse Membran, welche, indem sie die beiden Hemisterna mit einander in Verbindung setzt, ventralwärts mit dem subcutanen Zellgewebe, dorsalwärts je nach dem Grade der Spalte mit dem Zellgewebe des vorderen Mediastinum, den Pleuren und dem Pericardium verlöthet ist.

Das transversale Knochenstück, das wir als Postmanubrium (Fig. 4 *Pm*) bezeichnet haben, ist aber nichts anderes als die Sternebra 1, d. h. die zwischen den beiden 2. und 1. Rippen liegende, gemeiniglich einen integrirenden Theil des Manubrium bildende Sternebra.

Zwar wird man mir, ohne meine Schrift über die morphologischen Bestandtheile des Brustbeinhandgriffes bei den Säugethieren[1] gelesen zu haben, einwenden, dass die Sternebra 1, in diesem Falle also das Postmanubrium (Fig. 4 *Pm*), in der genannten Figur gar nicht zwischen den beiderseitigen 2. und 1. Rippen liegt, sondern zwischen den beiderseitigen 2. Rippen (Fig. 4 *II*) und den beiden Hemipraemanubrien (Fig. 4 *hpm'* und *hpm''*).

Ich habe jedoch in der zuletzt genannten Schrift nachgewiesen,[2] dass die ganze jederseitige Randstrecke des *Manubrium sterni* zwischen dem Ansatze des Knorpels der 1. Rippe und der Sternebra 1, den ich den jederseitigen parasternalen Abschnitt des *Manubrium sterni* genannt habe, die in das *Manubrium sterni* usurpirte Sternocosta der jederseitigen 1. Rippe ist.

Also liegt auch in Fig. 4 das Postmanubrium, d. h. die Sternebra 1, zwischen den ventralen Enden der beiden 2. und 1. Rippen.

Um über diese Verhältnisse keinen Zweifel zu lassen, gebe ich hier noch einmal das meiner Arbeit über den Brustbeinhandgriff der Säugethiere entnommene Schema Fig. 5[3] über die morphologischen Elemente nicht epiphysealer Natur derselben.

Das *Manubrium sterni* der Säugethiere besteht, wie diese Figur zeigt, aus 10 nicht-epiphysischen Skeletelementen.

---

[1] P. ALBRECHT: Sur les éléments morphologiques du Manubrium du Sternum chez les Mammifères.

[2] S. 43 und ferner.

[3] Fig. XVII S. 50 der genannten Schrift.

Digitized by Google

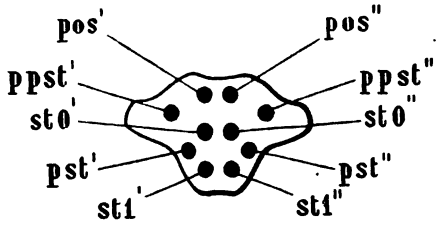


Fig. 5.

Schema der nicht-epiphysischen morphologischen Elemente des Brustbeinhandgriffes der Säugethiere. Ventrale Ansicht. *pos'* rechtes Hemipostomosternum. *pos"* linkes Hemipostomosternum. *ppst'* rechtes Praeparasternale. *ppst"* linkes Praeparasternale. *pst'* rechtes Parasternale. *pst"* linkes Parasternale. *sto'* Copula zwischen dem rechten Praeparasternale und dem rechten Parasternale. *sto"* Copula zwischen dem linken Praeparasternale und dem linken Parasternale. *st1'* Copula zwischen dem rechten Parasternale und der rechten 2. Rippe. *st1"* Copula zwischen dem linken Parasternale und der linken 2. Rippe. Die Praeparasternalia der Säugethiere sind die Sternocostae der Rippen des letzten Halswirbels, die Parasternalia die Sternocostae der Rippen des 1. Brustwirbels derselben.

Diese Elemente sind:

1. und 2. das rechte und das linke Hemipostomosternum (Fig. 5 *pos'* und *pos"*),
3. und 4. das rechte und das linke Praeparasternale, d. h. die Sternocosta der jederseitigen letzten Halsrippe (Fig. 5 *ppst'* und *ppst"*),
5. und 6. das rechte und das linke Parasternale, d. h. die Sternocosta der jederseitigen ersten Brustrippe (Fig. 5 *pst'* und *pst"*),
7. und 8. die rechte und die linke Copula zwischen den Praeparasternalia und Parasternalia (Fig. 5 *sto'* und *sto"*),
9. und 10. die rechte und die linke Copula zwischen den Parasternalia und den zweiten Rippen (Fig. 5 *st1'* und *st1"*).

Also ist die Formel des ganzen Manubrium (*M*) des *Mycetes sp.* Illig., Fig. 1:

$$M = pos' + pos'' + ppst' + ppst'' + pst' + pst'' + sto' + sto'' + st1' + st1'' \quad (1);$$

hingegen die Formeln für das jederseitige Hemimanubrium des *Mycetes ursinus* Geoffr., Fig. 2:

$$hm' = pos' + ppst' + pst' + sto' + st1' \ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

$$hm'' = pos'' + ppst'' + pst'' + sto'' + st1'' \ldots\ldots\ldots \quad (2'');$$

schliesslich die Formeln für die beiden Hemipraemanubrien und das Postmanubrium des *Mycetes ursinus* Geoffr., Fig. 4:

$$hpm' = pos' + ppst' + pst' + sto' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

$$hpm'' = pos'' + ppst'' + pst'' + sto'' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3'')$$

$$Pm = st1' + st1'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3''')$$

Vergleichen wir aber diese Formeln mit einander, so ist

$$(1) = (2') + (2'') = (3') + (3'') + (3''').$$

Mit diesen Kenntnissen bewaffnet, können wir jetzt an die Analyse von Figuren gehen, welche bisherige Untersucher von Brüllaffenmanubrien gegeben haben. Wir werden uns zunächst nicht an die

Digitized by Google

Besprechung der irrigen Ansichten dieser Autoren machen, welche im zweiten Capitel erfolgen wird, sondern deren Figuren analysiren, als wenn sie uns ohne irgend welche Erklärung von Seiten ihrer Herausgeber zur Beurtheilung vorgelegt wären.

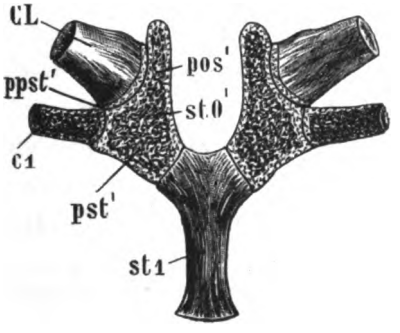


Fig. 6.

Analyse der von W. K. Parker in dessen Monograph on the structure and development of the shoulder-girdle and sternum in the Vertebrata (London 1868) Taf. XXVIII Fig. 19 gegebenen ventralen Ansicht der ventralen Enden der beiderseitigen Schlüsselbeine und 1. Rippen, sowie des *Manubrium sterni* eines erwachsenen *Mycetes seniculus*. $^1/_1$.

Die Parker'sche Figurenbezeichnung ist nicht verwendet, sondern statt dessen eine vom Verfasser der vorliegenden Schrift herrührende analytische Figurenbezeichnung gewählt worden.

CL rechtes Schlüsselbein. *c* 1 rechte 1. Rippe. *pos'* hemipostomosternaler Abschnitt des Hemipraemanubrium dextrum. *ppst'* praeparasternaler Abschnitt des Hemipraemanubrium dextrum. *pst'* parasternaler Abschnitt des Hemipraemanubrium dextrum. *sto'* hemizerosternebraler[1] Abschnitt des Hemipraemanubrium dextrum. *pos'* + *ppst'* + *pst'* + *sto'* bilden das Hemipraemanubrium dextrum. *st* 1 Sternebra 1 (Postmanubrium).

Das in Fig. 6 nach Parker wiedergegebene *Manubrium sterni* eines erwachsenen *Mycetes seniculus* ist mit alleiniger Ausnahme, dass die sternebra 1 (Fig. 6 *st'*) relativ länger ausgewachsen, und dass die sternoschistische Membran zwischen den beiden Hemipraemanubrien bei der Maceration desselben fortgefault ist, identisch mit dem Manubrium unserer *Mycetes ursinus* Fig. 4. *st* 1′ ist das Postmanubrium, *pos′* + *ppst′* + *pst′* + *sto′* das Hemipraemanubrium dextrum.[2] Das Manubrium des Parker'schen Brüllaffen, Fig. 6, löst sich also auf nach den Formeln (3′), (3″) und (3‴), die uns unser *Mycetes ursinus*, Fig. 4, geliefert hat.

Ganz dasselbe ist der Fall bei dem von Mivart abgebildeten, und in unserer Fig. 7 wiedergegebenen Brustbeinhandgriff eines *Mycetes sp.*

---

[1] In meiner Schrift sur les éléments morphologiques du manubrium du sternum chez les mammifères p. 44 habe ich den Vorschlag gemacht, die Sternebra 0 als Zerosternebra, die Sternebra 1 als Protosternebra, die Sternebra 2 als Deuterosternebra u. s. w. zu bezeichnen.

[2] Da es mir jetzt unzweifelhaft erscheint, dass dem Brustbeinhandgriff aller Säugethiere ursprünglich ein jederseitiger praeparasternaler Abschnitt zu vindiciren ist, so ist derselbe als solcher auch in den Fig. 6 und 8 bezeichnet. In den Fig. XV und XVI meiner Arbeit sur les éléments morphologiques du manubrium du sternum chez les mammifères war dies nicht geschehen, um nicht durch Hineinbringung einer damals nicht mit absoluter Sicherheit zu beweisenden Vermuthung, den Leser von dem mir ganz besonders am Herzen liegenden Beweise, dass das Parasternale die Sternocosta der 1. Rippe sei, abzulenken.

Digitized by Google

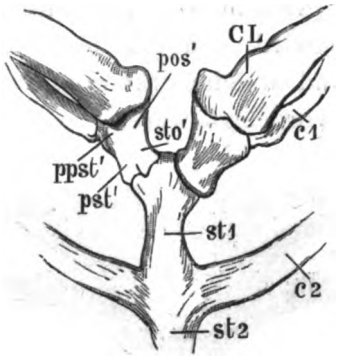


Fig. 7.

Analyse der von St. George Mivart in dessen Lessons in elementary anatomy London 1877 p. 66 gegebenen ventralen Ansicht der ventralen Enden der Schlüsselbeine und der beiderseitigen 1. und 2. Rippen, sowie des *Manubrium sterni* einer erwachsenen *Mycetes sp.* $^1/_1$.

Die Mivart'sche Figurenbezeichnung ist durch eine analytische ersetzt worden.

CL linkes Schlüsselbein. *c* 1 linke 1. Rippe. *c* 2 linke 2. Rippe. *pos'* hemipostomosternaler Abschnitt des Hemipraemanubrium dextrum. *ppst'* praeparasternaler Abschnitt des Hemipraemanubrium dextrum. *pst'* parasternaler Abschnitt des Hemipraemanubrium dextrum. *sto'* hemizerosternebraler Abschnitt des Hemipraemanubrium dextrum. *pos'* + *ppst'* + *pst'* + *sto'* bilden das Hemipraemanubrium dextrum. *st* 1 Sternebra 1 (Postmanubrium). *st* 2 Sternebra 2.

So mangelhaft ausgeführt diese von Mivart gegebene Figur ist, lässt sie sich doch mit absoluter Sicherheit analysiren; denn es ist klar, dass *st'* wieder das ungespaltene Postmanubrium, *pos'* + *ppst'* + *pst'* + *sto'* das Hemipraemanubrium dextrum ist. Das Manubrium auch dieses *Mycetes sp.*, Fig. 7, wird also in die Formeln (3′), (3″) und (3‴) aufgelöst.

Andererseits sind aus den Hemipraemanubrien des Brustbeinhandgriffes eines *Mycetes ursinus* (?), der in Fig. 8 nach Parker copirt ist, die Parasternalia, als von der beiderseitigen 1. Rippe aus chondrificirt, ausgeschieden, so dass ein von mir als Hemipraemanubriolum bezeichneter jederseitiger Rest vor dem Postmanubrium sich vorfindet. Das Hemipraemanubriolum ist also gleich Hemipraemanubrium minus Parasternale.

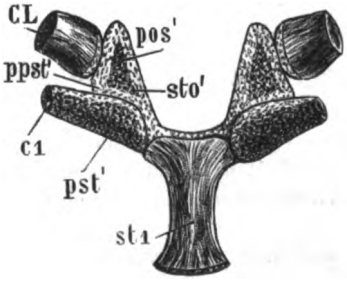


Fig. 8.

Analyse der von W. K. Parker in dessen Monograph on the structure and development of the shoulder-girdle and sternum in the Vertebrata, London 1868. Taf. XXVIII Fig. 20 gegebenen ventralen Ansicht der ventralen Enden des Schlüsselbeines und 1. Rippe, sowie das *Manubrium sterni* eines erwachsenen *Mycetes ursinus* (?) $^1/_1$.

Die Parker'sche Figurenbezeichnung ist durch eine analytische ersetzt worden.

CL rechtes Schlüsselbein. *c* 1 rechte 1. Rippe. *pos'* hemipostomosternaler Abschnitt, *ppst'* praeparasternaler Abschnitt, *sto'* hemizerosternebraler Abschnitt des Hemipraemanubriolum dextrum. *pst'* parasternaler Abschnitt der rechtsseitigen 1. Rippe. *st* 1 Sternebra 1 (Postmanubrium).

Digitized by Google

Betrachten wir die Parasternalia auch in diesem Falle conventionaliter als zum Manubrium gehörig, so rangirt sich auch dieser Fall (Fig. 8) zu dem *Mycetes ursinus* Fig. 4, *Mycetes seniculus* Fig. 6, *Mycetes sp.* Fig. 7, indem alsdann in allen diesen Brüllaffen das *Manubrium sterni* bis auf das Postmanubrium gespalten ist.

Fassen wir alles bisher Erörterte zusammen, so hat

1. der Königsberger *Mycetes sp.* (Fig. 1) ein ungespaltenes Manubrium sterni;
2. der Königsberger *Mycetes ursinus* (Fig. 4), der PARKER'sche *Mycetes seniculus* (Fig. 6), der MIVART'sche *Mycetes sp.* (Fig. 7) und der PARKER'sche *Mycetes ursinus* (?) (Fig. 8) eine *Fissura praemanubrii sterni congenita;*
3. der Königsberger *Mycetes ursinus* (Fig. 2) eine *Fissura manubrii sterni congenita.*

Auf 6 Brüllaffen, die im Vorstehenden untersucht sind, ist also einmal das Praemanubrium + Postmanubrium ungespalten, viermal das Praemanubrium gespalten, das Postmanubrium ungespalten, einmal das Praemanubrium + Postmanubrium gespalten.

Gewiss ein höchst bemerkenswerther Befund!

II. Die Irrthümer bisheriger Autoren in der Deutung des Brustbeinhandgriffes der Brüllaffen.

Es kann wohl kaum einem Zweifel unterliegen, dass unsere im 1. Capitel dieser Arbeit gegebene Deutung der beiden PARKER'schen, sowie der einen MIVART'schen Figur die richtige ist. Es erübrigt also nur noch, die abweichenden Ansichten der genannten Herren anzuführen und in ihrer Irrthümlichkeit zu beleuchten.

PARKER ist zunächst der allgemeinen Ansicht, dass bei den Brüllaffen von der normalen Form des Manubrium abgegangen sei.[1] Der Ausdruck »normal« scheint mir hier nicht gut gewählt zu sein, und wäre besser durch »bei den übrigen Säugethieren gang und gäbe« ersetzt worden.

Was alsdann den *Mycetes seniculus* (PARKER's Fig. 19 Taf. XXVIII, unsere Fig. 6) anbetrifft,[2] so glaubt PARKER, dass die hintere Hälfte

[1] PARKER l. c. p. 223: The normal form of the manubrium is departed from in the Howling Monkeys.

[2] PARKER l. c.: In *Mycetes seniculus* (Brit. Mus. see Plate XXVIII fig. 19) the hinder half of the praesternum is normal; but in front its two large horns have not approached each other; are each ossified separately, the ossifications answering to those in the costal processes of the Rhea (Plate XVII, fig. 7 *pro*): the thoracic part of the manubrium does not carry the first ribs, but these are attached behind the clavicles on the sides of the »horns«.

Digitized by Google

des Praesternum desselben normal sei. Hiergegen ist mit Ausnahme des Ausdruckes Praesternum, der zu Verirrung zu führen nur allzu geeignet ist, nichts einzuwenden. Vor dieser normalen hinteren Hälfte des Praesternum — fährt PARKER fort — hätten sich die beiden Hörner desselben nicht an einander gelegt; jedes dieser Hörner sei für sich ossificirt, und jede dieser jederseitigen Ossificationen entspreche dem jederseitigen Ossificationscentrum in den Rippenfortsätzen von *Rhea* (Taf. XVII Fig. 7 *pro*), der thoracale Abschnitt des Manubrium trage auf diese Weise nicht die beiderseitige 1. Rippe, sondern diese seien hinter der jederseitigen Clavicula an der Seite des jederseitigen »Horns« befestigt.

Nach PARKER ist also das jederseitige Horn der Fig. 6 (unser Hemipraemanubrium), wie schon aus der Bezeichnung *pro* hervorgeht, dasjenige Organ, das er als Proosteon benennt.

Es fragt sich nun zunächst, was versteht PARKER unter diesem Ausdruck? Als Antwort hierauf ergiebt sich, dass PARKER[1] auf S. 193 der genannten Monographie von dem Proosteon aussagt, dass es zum 7. Halswirbel gehöre. Dies soll offenbar zur 7. Halsrippe heissen, und so ist wohl unzweifelhaft der PARKER'sche Gedanke, dass das Proosteon die Sternocosta der 7. Halsrippe ist.

Hier liegt der erste Fehler PARKER's; denn da wir bereits gesehen haben, dass jedes Hemipraemanubrium des *Mycetes seniculus* Fig. 6 aus Hemipostomosternum + Praeparasternale + Parasternale + Hemisternebra o besteht, und lediglich das Parasternale die Sternocosta der Rippe des letzten Halswirbels ist, so hat PARKER im günstigsten Falle den Theil, nämlich die Sternocosta der Rippe des letzten Halswirbels, für das Ganze, das ausser ihr noch aus dem Hemipostomosternum, dem Praeparasternale und der Hemisternebra o besteht, gesetzt.

Aber PARKER legt, wie sich sogleich erweisen wird, den morphologisch verschiedensten Gebilden am Brustbeinhandgriff den Namen des Proosteon, andererseits dem sternocostalen Abschnitte der Rippe des letzten Halswirbels andere Namen als den ihm soeben vindicirten Namen des Proosteon bei.

So bezeichnet PARKER in seinen Figuren Taf. XVIII Fig. 4, 5, 6, 12 und 13, Taf. XIX Fig. 19, Taf. XXII Fig. 19, Taf. XXIV Fig. 8, Taf. XXIX Fig. 18 und 19 als Proosteon das Postomosternum, in Taf. XXII Fig. 1, Taf. XXIV Fig. 6 als Proosteon die Sternebra o, in Taf. XXVIII Fig. 20 (unserer Fig. 8) als Proosteon das Hemipostomosternum + Praeparasternale + Hemisternebra o, in Taf. XXVIII Fig. 19

[1] PARKER l. c. This ossification is an azygous representative of the symmetrical »proosteon« of the Rhea, and it belongs to the seventh cervical vertebra.

Digitized by Google

(unserer Fig. 6) als Proosteon das Hemipostomosternum + Praeparasternale + Parasternale + Hemisternebra 0.

Andererseits bezeichnet PARKER in Taf. XXIV Fig. 9 und 12, Taf. XXVI Fig. 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11 und 12, Taf. XXVII Fig. 22 und 23, Taf. XXVIII Fig. 17 die Sternocosta der letzten Halsrippe, die er doch wie oben angegeben = Proosteon gesetzt hatte, als Epicoracoid, in Taf. XVIII Fig. 12 und 13 als Postepicoracoid.

Da überdies Rhea 14 Halswirbel hat, so würde es wohl noch eines besonderen Nachweises bedürfen, dass, wie PARKER annimmt, pro Taf. XVII Fig. 7 der Sternocosta der Rippe des letzten Halswirbels eines Säugethieres homolog ist.

PARKER hält also, wie gesagt, das jederseitige »Horn« des Mycetesmanubrium Taf. XXVIII Fig. 19 (unserer Fig. 6) für die Sternocosta der siebenten Halsrippe dieses Thieres, und meint, dass in dieser Figur die beiderseitige erste Rippe sich nicht an den thoracalen Theil des Brustbeinhandgriffes, sondern eben an die Sternocosta der siebenten Halsrippe setzt.

Dies ist der zweite Fehler PARKER's. Um ihn klar und deutlich zu übersehen, wiederhole ich, dass das Hemipraemanubrium des *Mycetes seniculus*, Fig. 6, minus Parasternale gleich dem Hemipraemanubriolum des *Mycetes ursinus* (?), Fig. 8, ist. Das Parasternale ist eben in Fig. 6 vom Hemipraemanubriolum, in Fig. 8 von der ersten Rippe aus chondri- resp. ossificirt.

Die Möglichkeit der Chondri- und Ossification des Parasternale von zwei verschiedenen Seiten, entweder vom Hemipraemanubriolum, oder von der ersten Rippe her, hat PARKER nicht vermuthet, und so glaubt er, und das ist sein dritter Fehler, dass die »Hörner« der Fig. 19 Taf. XXVIII (unserer Fig. 6) den »Hörnern« der Fig. 20 Taf. XXVIII (unserer Fig. 8) homolog seien,[1] obgleich doch, wie ich nachgewiesen zu haben glaube, den letzteren das den ersteren zukommende parasternale Element fehlt.

So konnte er glauben, dass in unserer Fig. 8 sich die ersten Rippen an ihren wahren Schlussstein, in Fig. 6 hingegen an das cervicale Element des Manubrium sterni setzen, obgleich doch in beiden Figuren identischer Weise die einmal vom Hemipraemanubriolum, einmal von der 1. Rippe aus chondri- resp. ossificirte Sternocosta der letzteren an die zwischen ihr, der 2. Rippe und den gleichnamigen Organen der entgegengesetzten Körperhälfte befindliche Sternebra 1 stösst.

---

[1] PARKER l. c. p. 223. In *Mycetes ursinus* (?) (Mus. Coll. Surg. No. 4718B see Plate XXVIII Fig. 20) the first ribs are attached to their proper keystone and also to the »horns«, which are greatly cut away for the ribs close behind the clavicles.

Digitized by Google

Im Anschluss an PARKER hat FLOWER[1] darauf hingewiesen, dass bei den Brüllaffen vor dem »Praesternum« zwei breite divergirende Hörner sich befinden, welche getrennt ossificiren und die Claviculae sowie einen Theil oder den ganzen ventralen Abschnitt der 1. Rippe tragen. Nach ihm ist also *st'* der Fig. 6 und 8 das ganze Praesternum, und da FLOWER Praesternum = Manubrium setzt, das ganze Manubrium, ein Irrthum, der nur dadurch zu erklären ist, dass er PARKER's Meinung, der schon die ganzen Verhältnisse irrig aufgefasst hatte, missverständlich wiedergab.

MIVART[2] schliesslich hält die Hemipraemanubrien seines *Mycetes sp.* (MIVART's Fig. 76, unsere Fig. 7) für episternale Knöchelchen, und identificirt sie, die, wie wir gesehen haben, den morphologischen Werth von Hemipostomosternum + Praeparasternale + Parasternale + Hemisternebra o besitzen, mit den episternalen Gebilden der Menschen und Mäuse. Dies ist wohl nicht richtig; denn erstens sind die MIVART-schen Episternalia der Brüllaffen jedes Hemipostomosternum + Praeparasternale + Parasternale + Hemisternebra o, zweitens sind die MIVART-schen Episternalia des Menschen die BRESCHET'schen os sussternaux, die LUSCHKA'schen Ossa suprasternalia, welche wie ich anderweitig nachgewiesen habe[3], den morphologischen Werth von Hemipraeomosternis besitzen, und drittens sind die von MIVART als Episternalia der Mäuse bezeichneten Organe zwischen Clavicula und Manubrium jederseits gelegenen Knorpel, die lediglich ventrale Differencirungsproducte des Clavicularknorpels sind. Alle jene drei von MIVART als homolog erkannten Organe sind also unter einander heterolog.

III. Verwerthung der im Vorstehenden nachgewiesenen *Fissura manubrii sterni congenita* für die Vererbungs- und Anpassungslehre.

Überblicken wir das im 1. Capitel Erörterte noch einmal, so waren unsere Resultate:

1. der Königsberger *Mycetes sp.* (Fig. 1) besitzt ein ungespaltenes *Manubrium sterni;*

---

[1] FLOWER, an introduction to the osteology of the mammalia, 2. Auflage, London, 1876 p. 75. In the howling monkeys (*Mycetes*) the presternum has in front of it two large diverging thorns (proostea, PARKER) which ossify separately and support the clavicles and either the whole or part of the first pair of ribs.

[2] MIVART l. c. p. 65. The »episternal granules« occasionally present in man are replaced in some mammals by considerable horn-like processes as in the howling monkeys (*Mycetes*) and mice.

[3] P. ALBRECHT: Note sur le pelvisternum des édentés (avec des observations morphologiques sur l'appareil sternal des animaux vertébrés) p. 14 etc.

Digitized by Google

2. der Königsberger *Mycetes ursinus* (Fig. 4), der Parker'sche *Mycetes seniculus* (Fig. 6), der Mivart'sche *Mycetes sp.* (Fig. 7) und der Parker'sche *Mycetes ursinus* (?) (Fig. 8)[1] besitzen ein gespaltenes Praemanubrium, ein ungespaltenes Postmanubrium;
3. der Königsberger *Mycetes ursinus* (Fig. 2) besitzt ein total gespaltenes Manubrium.

Da sämmtliche übrige Säugethiere im normalen Zustande ein ungespaltenes Manubrium besitzen,[2] so wird wohl ohne Bedenken angenommen werden dürfen, dass auch die Vorfahren der Brüllaffen normaler Weise einen ungespaltenen Brustbeinhandgriff besassen. Ganz und gar wahrscheinlich wird dieses, wenn wir in Betracht ziehen, dass der Königsberger *Mycetes sp.* (Fig. 1 *M*) uns noch in unserer Aera ein ungespaltenes Manubrium vorführt.

Es giebt ferner kein einziges Säugethier, das im Verhältniss zu seiner Körpergrösse einen solchen colossalen Zungenbeinkörper und einen ebenfalls im Verhältniss zur Körpergrösse so alles Maass überschreitenden Schildknorpel wie die Brüllaffen besitzt.

Da nun alle übrigen Säugethiere diese beiden Organe in relativ verschwindenden Dimensionen aufweisen, so ist wohl ebenfalls kaum anders anzunehmen, als dass auch die Brüllaffen ursprünglich einen Hyo-thyreoidealapparat proportionirter Grösse besassen. Die allmählich zunehmende Vergrösserung des genannten Apparates in der phylogenetischen Entwickelung dieser Thiere kann aber nur darauf zurückzuführen sein, dass es sich, sei es im Kampfe ums Dasein, sei es im Kampfe um die Weibchen, sei es in beiden, als von Nutzen erwies, nicht nur zu brüllen, sondern ganz ausserordentlich stark zu brüllen. Dass nicht nur der Kampf um die Weibchen, sondern auch der Kampf ums Dasein bei der Anexercirung des Brüllapparates in Betracht kam, geht daraus hervor, dass auch die weiblichen Brüllaffen einen im Verhältniss zu dem Hyo-thyreoidealapparat der übrigen Säugethiere ausserordentlich grossen Brüllapparat besitzen; während der Nachweis, dass nicht nur der Kampf ums Dasein, sondern auch der Kampf um die Weibchen zur outrirten Entwickelung des in Rede stehenden Organes führte, darin liegt, dass die männlichen Brüllaffen wiederum einen unverhältnissmässig grösseren Brüllapparat haben als die Weibchen.[3]

---

[1] Zu dem jederseitigen Hemipraemanubriolum des zuletzt genannten Brüllaffen, das bei ihm von der 1. Rippe aus chondrificirte jederseitige Parasternale, wie oben motivirt, hinzugerechnet.

[2] Ich darf hier wohl von der *Fenestra manubrii sterni*, die bei einigen Cetaceen vorkommt, absehen, da bei diesem Thiere die Manubrialhälften vor und hinter dem genannten Fenster stets, sei es knorpelig, sei es knöchern, verschmolzen sind.

[3] Darwin, The descent of man and selection in relation to sex, London 1871,

Digitized by Google

Jede nachfolgende Generation von Brüllaffen — und hier liegt die Angel des Raisonnements — muss nun schon embryonal die Wohlthaten des elterlichen Brüllens insofern genossen haben, als bei ihr bereits embryonal der Hyo-thyreoidealapparat grösser angelegt wurde, als ihre Eltern denselben zu derselben Zeit ihres embryonalen Lebens besassen. Wir sehen das aus denjenigen Formen von Brüllaffen, die normaler Weise mit einer Praemanubrioschisis behaftet sind. Denn der Grund hierfür kann lediglich in einer etwa um die sechste Woche des Embryonallebens[1] bereits vorliegenden allzu grossen Entwickelung ihres Hyo-thyreoidealapparates liegen. Brüllaffen ohne Spaltung des Praemanubriums sind aber ohne Zweifel die Vorfahren von Brüllaffen mit Spaltung desselben. Es war also bei ersteren in der sechsten Woche des Embryonallebens der Hyo-thyreoidealapparat noch nicht von der Grösse, um die Vereinigung der knorpeligen Hemipraemanubrien hindern zu können, während dies bei letzteren der Fall gewesen sein muss. Die Folge hiervon war eine anderen Säugethieren nur teratologisch zukommende normale Praemanubrioschisis.

Aber weiter! die Leistungen der Eltern kommen auch heute noch mehr und mehr den Brüllaffenembryonen zu Gute, denn es werden bereits Brüllaffen geboren, wie der Königsberger *Mycetes ursinus* Fig. 2 zeigt, bei denen Zungenbeinbasis und Schildknorpel in der ungefähr sechsten Woche des Embryonallebens so gross sind, dass sich nicht nur nicht die knorpeligen Hemipraemanubrien, sondern auch die knorpeligen Hemipostmanubrien nicht mehr in der Mittellinie vereinigen können, und eine totale *Manubrioschisis congenita* normaliter die Folge ist.

Da wir aber unter sechs Brüllaffen vier Brüllaffen mit *Fissura praemanubrii sterni congenita,* einen mit intactem Manubrium sterni und einen mit totaler *Fissura manubrii sterni* gefunden haben, so dürfen wir uns dahin aussprechen, dass die *Fissura praemanubrii sterni* heute zu Tage bei den Brüllaffen das gewöhnliche Verhalten bildet. In der Vergangenheit war ihr Brustbeinhandgriff ungespalten, in der Zukunft wird nicht nur ihr Praemanubrium, sondern auch ihr Postmanubrium, und damit ihr ganzes Manubrium sterni gespalten sein.

Der Königsberger *Mycetes sp.* Fig. 1 repräsentirt uns also den Zustand des ungespaltenen *Manubrium sterni* bei den Vorfahren, der Königsberger *Mycetes ursinus* Fig. 2 den Zustand des total gespaltenen Brustbeinhandgriffes bei den Nachkommen der heutigen Brüllaffen.

---

vol. II p. 277: »The vocal organs of the american *Mycetes caraya* are one third larger in the male than in the female.«

[1] Ich setze hypothetisch die ungefähr 6. Woche im Embryonalleben des Brüllaffen gleich der ungefähr $7^1/_2$. Woche im Embryonalleben des Menschen. Um diese Zeit nämlich verschmelzen die knorpeligen Hemimanubrien des Menschen mit einander.

Digitized by Google

Der erstere Zustand ist somit der atavistische, den letzteren will ich den epigonen nennen.

Zwischen beiden steht der actuelle Zustand der *Fissura praemanubrii sterni*, den uns der Königsberger *Mycetes ursinus* Fig. 4, der PARKER'sche *Mycetes seniculus* Fig. 6, der MIVART'sche *Mycetes sp.* Fig. 7, der PARKER'sche *Mycetes ursinus*? Fig. 8 vorführen.

Klar ist also, dass die Brüllaffen mit *Fissura praemanubrii sterni congenita*, und in noch höherem Maasse diejenigen mit *Fissura manubrii sterni congenita* durch Vererbung von Seiten ihrer den Brüllapparat sich anexercirenden Eltern her, bereits in der sechsten Woche ihres Embryonallebens einen Brüllapparat von grösseren Dimensionen besitzen, als ihn ihre Vorfahren mit ungespaltenem Manubrium zu derselben Zeit ihres Embryonallebens besassen; denn, wenn dies nicht der Fall wäre, so würden auch bei ihnen die knorpeligen Hemipraemanubrien resp. Hemimanubrien in der sechsten Woche des Embryonallebens mit einander verschmolzen sein.

Damit aber ist die Vererbung erworbener Zustände für diesen Fall wenigstens unumstösslich erwiesen.

Digitized by Google

Digitized by Google

20. Über die Löslichkeit von Salzgemischen.

Von Fr. Rüdorff
in Charlottenburg.

(Vorgelegt von Hrn. Rammelsberg am 26. März; — gedruckt im Bericht vom 16. April [St. XX]; — ausgegeben am 23. April.)

I. Im 148. Bande S. 456 und 555 der Annalen für Physik und Chemie habe ich die Resultate einer Untersuchung über die Löslichkeit von Salzgemischen in Wasser mitgetheilt. Wenn ich auf denselben Gegenstand jetzt nochmals zurückkomme, so geschieht dieses aus dem Grunde, weil die Fortsetzung der Versuche zu Resultaten geführt hat, welche ein über die Kenntniss der Thatsache hinausreichendes, ein allgemein chemisches Interesse in Anspruch nehmen dürften.

In der oben citirten Abhandlung habe ich die Salzgemische in Bezug auf ihre Löslichkeit in 2 Gruppen getheilt und zwar in

1. Gemische, bei welchen eine chemische Umsetzung nicht eintreten kann, also Salzgemische mit gleichem Metall oder gleicher Säure;
2. Gemische, bei welchen eine chemische Umsetzung eintreten kann, in welchen also Salze zweier Metalle und zweier Säuren vorhanden sind.

Durch Versuche mit Salzgemischen der ersten Art habe ich gezeigt, dass es Gemische giebt, von welchen sich gesättigte und zwar identische Lösungen herstellen lassen, wenn man nur einen Überschuss beider Salze anwendet, gleichgültig, in welchem Mengenverhältniss man im Übrigen beide Salze dem Wasser zum Lösen darbietet. Hierher gehört z. B ein Gemisch von Kaliumnitrat und Bleinitrat, von Chlorammonium und Chlorbarium, von Chlorammonium und Ammoniumnitrat. Bei anderen Salzgemischen ist es in Bezug auf die Zusammensetzung der resultirenden Lösung von Einfluss, in welchem Verhältniss man beide Salze der zu ihrer Lösung unzureichenden Wassermenge darbietet; ein Überschuss des einen Salzes verdrängt eine bestimmte Menge des anderen, so dass man von dem Gemisch dieser Salze keine gesättigte, d. h. keine Lösung herstellen kann, auf welche das eine wie das andere Salz ohne Einfluss ist.

Digitized by Google

Hierher gehören die Gemische von Kalium- und Ammoniumsulfat, von Ammonium- und Kupfersulfat und andere. Man muss also bei den Salzgemischen, bei welchen eine chemische Umsetzung nicht eintreten kann, unterscheiden:

1. Gemische, von denen sich eine gesättigte Lösung herstellen lässt und
2. Gemische, von denen keine gesättigte Lösung zu erhalten ist.

Die für diese beiden Arten von Salzgemischen in der früheren Mittheilung gegebenen Beispiele mögen im Folgenden durch einige neue Salzgemische vermehrt werden. Um aber das Gesammtbild zu vervollständigen, werde ich die Resultate der früheren Versuche hier einflechten.

II. Die Herstellung der Lösungen der Salzgemische wurde in der früher angegebenen Weise bewirkt. Die beiden Salze wurden in grossem Überschuss in gepulvertem Zustande mit einer bestimmten Menge Wasser unter Schütteln erwärmt und dadurch entweder völlig oder zum grösseren Theil gelöst. Dann wurde die Lösung der Abkühlung auf fast Zimmertemperatur überlassen, indem gegen das Ende der Abkühlung ein Stück beider Salze und bei Doppelsalzen auch noch ein Stück desselben in die Lösungen geworfen wurde, um eine Übersättigung zu verhüten. Die Lösung wurde von dem ausgeschiedenen Salz abgegossen und in 15 bis 25^{ccm} derselben wurden je 3 bis 6^{g} des einen und ebenso in 15 bis 25^{ccm} 3 bis 6^{g} des anderen Salzes unter Erwärmen gelöst. Dann wurden die drei Lösungen unter häufigem Umschütteln abgekühlt und nachdem ein Stück der festen Salze in die Lösungen geworfen war, der völligen Abkühlung während 12 bis 15 Stunden überlassen. Nach wiederholtem Schütteln wurden dann die Lösungen von den ausgeschiedenen Salzen durch ein trockenes Filter getrennt und auf ihren Salzgehalt untersucht.

Bei solchen Salzen, welche wie Lithiumsulfat in warmem Wasser weniger leicht löslich sind als in kaltem, wurden die beiden zu lösenden Salze in sehr fein gepulvertem Zustande in grossem Überschuss mit Wasser Tage lang wiederholt geschüttelt. Ein bestimmter Theil dieser Lösung wurde dann mit je 3 bis 6^{g} des einen wie des anderen Salzes ebenso behandelt. Die Temperatur des Raumes, in welchem die Lösungen der völligen Abkühlung überlassen wurden, war nur sehr geringen Schwankungen unterworfen.

Es mag aber noch erwähnt werden, dass es bei einigen Salzen, welche sich in beträchtlicher Menge in Wasser lösen und deren Lösung eine merklich dickflüssige Beschaffenheit zeigt, sehr schwer hält, eine bei einer bestimmten Temperatur gesättigte Lösung zu erhalten. Bei einigen dieser Lösungen scheidet sich der Überschuss des gelösten

Digitized by Google

Salzes selbst bei Berührung mit festem Salz und starkem Schütteln nur sehr langsam, bisweilen selbst bei zwölfstündigem Stehenlassen nicht völlig aus.

III. Die von mir angestellten Versuche beziehen sich zunächst auf das Verhalten solcher Salzgemische, deren Bestandtheile sich zu Doppelsalzen vereinigen. Bei den früher von mir angestellten Versuchen hatte sich herausgestellt, dass jeder der Bestandtheile eines Doppelsalzes den anderen aus der gesättigten Lösung verdrängt. Dasselbe zeigte sich auch bei den folgenden Salzpaaren:

1. Ammonium- und Aluminiumsulfat.

I. Gesättigte Lösung des Ammonium-Aluminiumalaunes.
II. 20^{ccm} der Lösung I und 6^{g} kryst. Aluminiumsulfat.
III. 20^{ccm} der Lösung I und 4^{g} Ammoniumsulfat.

100 Theile der auf 18°5 abgekühlten Lösungen enthielten:

I. 1.42 $(NH_4)_2SO_4$ und 3.69 $Al_2 3SO_4$
II. 0.45 » » 16.00 »
III. 20.81 » » 0.29 »

In 100 Theilen Wasser sind also in I. 5.35 Theile des wasserfreien Doppelsalzes gelöst.

2. Ammonium- und Cadmiumsulfat.

I. Gesättigte Lösung des Doppelsalzes
$$(NH_4)_2SO_4 + CdSO_4 + 6H_2O.$$
II. 20^{ccm} Lösung I und 3^{g} Ammoniumsulfat.
III. 20^{ccm} Lösung I und 4^{g} kryst. Cadmiumsulfat.

Die auf 20°8 abgekühlten Lösungen enthielten in 100 Theilen:

I. 15.58 $(NH_4)_2SO_4$ und 24.57 $CdSO_4$
II. 23.64 » » 15.80 »
III. 12.56 » » 32.52 »

In 100 Theilen Wasser lösen sich also bei 20°8 (Lösung I) 112.3 Theile des kryst. Doppelsalzes.

3. Ammonium- und Nickelsulfat.

I. Gesättigte Lösung des Doppelsalzes
$$(NH_4)_2SO_4 + NiSO_4 + 6H_2O.$$
II. 20^{ccm} Lösung I und 4^{g} Ammoniumsulfat.
III. 20^{ccm} Lösung I und 6^{g} Nickelsulfat.

Digitized by Google

In 100 Theilen der auf 14° abgekühlten Lösungen war enthalten:

I. 3.00 $(NH_4)_2SO_4$ und 3.53 $NiSO_4$
II. 18.16 » » 0.39 »
III. 0.52 » » 13.90 »

In I. waren also in 100 Theilen Wasser 10.2 Theile des kryst. Doppelsalzes gelöst.

Versuche mit den Salzpaaren: Kalium- und Kupfersulfat, Ammonium- und Zinksulfat, Ammonium- und Magnesiumsulfat, Ammonium- und Kupfersulfat, Ammonium- und Kupferchlorid ergaben ein ähnliches Resultat: es findet eine gegenseitige Verdrängung der Bestandtheile statt. Ich habe bereits früher[1] darauf aufmerksam gemacht, dass wenn man in ähnlicher Weise, wie es oben geschehen, auf dieselbe Lösung zu wiederholten Malen den einen Bestandtheil wirken lässt, die Verdrängung des anderen Bestandtheils vollständig oder fast vollständig gelingt.

IV. Bei den in Vorstehendem mitgetheilten Versuchen über die Lösungen der Bestandtheile der Doppelsalze zeigt sich also eine sehr starke Verdrängung des einen Bestandtheils durch den andern, oder wohl besser eine Verdrängung des Doppelsalzes durch jeden der Bestandtheile desselben. Da die obigen Versuche in der Weise angestellt waren, dass in der gesättigten Lösung des Doppelsalzes der eine wie der andere Bestandtheil durch Erwärmen aufgelöst wurde, und beim Abkühlen der eine gelöste Theil den anderen aus der Lösung verdrängt, so entstand die Frage, wie sich wohl der eine oder andere Bestandtheil in festem Zustande gegen die gesättigte Lösung des Doppelsalzes verhalten würde. Es wurde deshalb ein Theil der gesättigten Lösung des Doppelsalzes mit dem einen, ein anderer mit dem anderen Bestandtheile in höchst fein gepulvertem Zustande tüchtig geschüttelt und dann die Lösungen untersucht. Das Resultat war ein ganz ähnliches wie in den obigen Versuchen, die Bestandtheile der Lösung wirkten im festen Zustande ebenso verdrängend auf das Doppelsalz, indem sie selbst in Lösung gingen.

Es lässt sich auf diesem Wege die gegenseitige Verdrängung der Salze aus ihren Lösungen in sehr auffallender Weise als Vorlesungsversuch zeigen. Man fülle zwei mit Glasstöpseln zu verschliessende Cylinder von angemessener Höhe (oder auch zwei Reagensgläser von gleichen Dimensionen) bis zu zwei Dritttheilen mit der gesättigten Lösung des Doppelsalzes Ammonium-Kupfersulfat, füge zu der einen Lösung einige Messerspitzen voll sehr fein gepulvertes Ammoniumsulfat und schüttele einige Minuten tüchtig. Nach einigen Augenblicken der

[1] Poggend. Ann. Bd. 148 S. 557.

Digitized by Google

Ruhe ist die Flüssigkeit fast entfärbt, jedenfalls sehr viel weniger gefärbt, als die zur Probe danebenstehende ursprüngliche Lösung des Doppelsalzes.

V. Bei der Anstellung einiger Versuche über die Löslichkeit von Gemischen isomorpher Salze wurden die mit I. bezeichneten Lösungen dadurch erhalten, dass in 100^{ccm} Wasser unter Erwärmen ein beträchtlicher Überschuss des Gemenges beider Salze gelöst wurde, und je ein Theil dieser bis auf etwa Zimmertemperatur abgekühlten Lösung mit je 4 bis 6^g der einzelnen Salze erwärmt wurde.

Meistens lösten sich die zugesetzten Mengen der Salze nicht völlig auf. Die Lösungen wurden dann unter den oben angegebenen Vorsichtsmaassregeln der völligen Abkühlung überlassen.

4. *Eisenammoniak- und Aluminiumammoniak-Alaun.*

I. 15^g des einen und 15^g des anderen kryst. Doppelsalzes wurden in 100^{ccm} Wasser gelöst. Aus der auf Zimmertemperatur abgekühlten Lösung hatten sich Mischkrystalle beider Alaune ausgeschieden.

II. 25^{ccm} der Lösung I und 3^g Aluminiumalaun.

III. 25^{ccm} der Lösung I und 3^g Eisenalaun.

In den auf 15°7 abgekühlten Lösungen fand ich:

I. 7.81 Eisenalaun und 7.46 Aluminiumalaun.

II. 7.29 » » 9.88 »

III. 13.6 » » 6.71 »

5. *Ammonium-Cadmiumsulfat und Ammonium-Kupfersulfat.*

I. 20^g Cadmiumdoppelsalz und 20^g Kupferdoppelsalz in 60 Wasser gelöst. Aus der Lösung hatten sich beim Abkühlen auf Zimmertemperatur (20°) hellblaue Mischkrystalle ausgeschieden.

II. 20^{ccm} der Lösung I und 5^g Cadmiumdoppelsalz.

III. 20^{ccm} der Lösung I und 5^g Kupferdoppelsalz.

Die auf 16°6 abgekühlten Lösungen enthielten in 100 Theilen:

I. 7.8 $CuSO_4 + (NH_4)_2SO_4$ und 16.9 $CdSO_4 + (NH_4)_2SO_4$

II. 4.7 » » » 26.1 » »

III. 8.3 » » » 15.0 » »

Die isomorphen Salze Zinksulfat und Magnesiumsulfat, Kupfersulfat und Eisensulfat, Bleinitrat und Baryumnitrat, Kaliumnitrat und Ammoniumnitrat zeigen ein ganz ähnliches Verhalten. Es zeigt sich

Digitized by Google

also auch bei den Gemischen isomorpher Salze ein Verdrängen des einen durch das andere Salz aus der Lösung des Gemisches.

VI. Die mit den Gemischen einiger anderer Salze angestellten Versuche ergaben folgende Resultate:

6. *Chlorbarium und Chlornatrium.*

I. 35^g kryst. Chlorbarium und 30^g Chlornatrium wurden mit 50^g Wasser längere Zeit erwärmt.
II. 20^{ccm} Lösung I und 4^g kryst. Chlorbarium.
III. 20^{ccm} Lösung I und 4^g Chlornatrium.

In 100 Theilen der auf 19°4 abgekühlten Lösungen fand ich:

I. 2.9 $BaCl_2$ und 24.9 NaCl.
II. 2.6 » » 25.1 »
III. 2.9 » » 24.8 »

7. *Bleinitrat und Natriumnitrat.*

I. In 50^{ccm} Wasser wurden 25^g Bleinitrat und 45^g Natriumnitrat gelöst.
II. 20^{ccm} Lösung I und 6^g Natriumnitrat.
III. 20^{ccm} Lösung I und 6^g Bleinitrat.

In 100 Theilen der auf 15° abgekühlten Lösungen fand ich:

I. 15.3 PbN_2O_6 und 38.8 $NaNO_3$.
II. 15.3 » » 38.6 »
III. 15.1 » » 39.0 »

8. *Natriumsulfat und Nickelsulfat.*

I. 40^g kryst. Nickelsulfat und 15^g entwässertes Natriumsulfat in 50^{ccm} Wasser gelöst.
II. 20^{ccm} Lösung I und 4^g kryst. Natriumsulfat.
III. 20^{ccm} Lösung I und 4^g kryst. Nickelsulfat.

In 100 Theilen der auf 20° abgekühlten Lösungen wurde gefunden:

I. 14.1 Na_2SO_4 + 22.4 $NiSO_4$.
II. 14.0 » + 22.7 »
III. 14.2 » + 22.1 »

Digitized by Google

9. *Natriumsulfat und Natriumphosphat.*

I. 60^g kryst. Natriumsulfat und. 40^g kryst. Natriumphosphat in 100^{ccm} Wasser gelöst.
II. 25^{ccm} Lösung I und 4^g kryst. Natriumphosphat.
III. 25^{ccm} Lösung I und 4^g kryst. Natriumsulfat.

Bei 14°8 enthielten 100 Theile der Lösungen:

I. 8.81 Na_2SO_4 und 2.15 Na_2HPO_4.
II. 8.96 » » 2.09 »
III. 8.83 » » 2.02 »

Aus der früheren Mittheilung gehören hierher Gemische von:

Chlornatrium und Kupferchlorid,
Natriumsulfat und Kupfersulfat,
Kaliumnitrat und Bleinitrat,
Chlorammonium und Chlorbarium.

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass die drei zusammengehörigen Lösungen identisch sind, dass also bei diesen Salzgemischen eine Verdrängung des einen Salzes durch das andere nicht stattfindet.

Da die meisten Salze im Gemisch mit anderen eine Verminderung ihrer Löslichkeit zeigen, so tritt die Verschiedenheit der oben angegebenen Gruppen in Bezug auf ihre gegenseitige Verdrängung am auffallendsten hervor, wenn man in der gesättigten Lösung des einen Salzes steigende Mengen des andern Salzes unter Erwärmen löst und die auf Zimmertemperatur abgekühlten Lösungen auf den Gehalt des in der gesättigten Lösung enthaltenen Salzes untersucht. Ich wähle als Repräsentanten für die eine Gruppe von Salzen Baryum- und Ammoniumchlorid, und für die andere das Doppelsalz Ammonium-Kupfersulfat und Ammoniumsulfat.

Nach der Einwirkung von

0 10 20 30 35 40 50^g NH_4Cl

auf je 100^{ccm} einer bei Zimmertemperatur gesättigten Lösung von Chlorbaryum fand ich in 100^g der auf 15° abgekühlten Lösungen:

25.6 18.0 11.5 8.16 8.10 8.10 8.20^g $BaCl_2$.

Man sieht wie mit gesteigertem Zusatz von Salmiak der Gehalt an Baryumchlorid sich vermindert, wie das letzte Salz durch das erste aus der Lösung verdrängt wird. Aber diese Verdrängung geht nur bis zu einer bestimmten Grenze, eine über 30^g steigende Menge von Salmiak bewirkt keine weitere Ausscheidung von Baryumchlorid, sondern es scheidet sich die überschüssig zugesetzte Menge Salmiak beim Abkühlen wieder aus.

Digitized by Google

Dagegen waren nach Einwirkung von

0 5 10 20 30 50 70 80 100^g $(NH_4)_2SO_4$

auf je 100^{ccm} einer gesättigten Lösung von Ammonium-Kupfersulfat bei 16°6 in 100^g der Lösungen enthalten:

15.6 9.9 5.8 2.9 1.6 1.04 0.68 0.45 0.35^g Doppelsalz.

Es ist klar, dass hier das eine Salz, wenn es in gesteigerter Menge auf die Lösung des andern einwirkt, dieses Schritt für Schritt fast vollständig aus der Lösung verdrängt.

VII. Wenn man die unter III, V und VI untersuchten Salzgemische mit einander vergleicht, so zeigt sich, dass dieselben auch in anderer Beziehung in drei verschiedene Gruppen zerfallen, die erste Gruppe enthält Salzgemische, deren einzelne Bestandtheile sich mit einander zu wohlgeformten Doppelsalzen verbinden.

Die zweite Gruppe enthält Salzpaare, welche untereinander isomorph sind, und es ist bekannt, dass auch diese, wenn auch nicht in Doppelsalzen, so doch in sogenannten isomorphen Mischungen zusammen krystallisiren.

Von den Salzpaaren der dritten Gruppe sind weder Doppelsalze noch isomorphe Mischungen bekannt; aus der gemischten Lösung dieser Salze krystallisirt jedes derselben neben dem anderen.

Aus den Versuchen mit den oben angeführten Salzgemischen aber geht deutlich hervor, dass diejenigen Salze, welche entweder untereinander Doppelsalze oder Krystalle isomorpher Mischungen bilden, also bei ihrem Ausscheiden aus einer gemeinsamen Lösung eine moleculare Attraction auf einander ausüben, sich gegenseitig aus der Lösung verdrängen, während dieses bei den Salzen, die nicht zusammen krystallisiren, nicht der Fall ist.

Es schien mir von Interesse zu sein, diese Beziehung zwischen der gegenseitigen Verdrängung gewisser Salzpaare und der Eigenschaft derselben zusammen zu krystallisiren an noch einigen anderen Salzpaaren zu erproben. Ich richtete mein Augenmerk besonders auf Salze solcher Metalle, welche von den Metallen, mit welchen sie gewöhnlich in eine Gruppe zusammengestellt werden in ihren chemischen Eigenschaften nicht unerheblich abweichen. Es sind dies die Metalle Lithium, Natrium, Beryllium und Cadmium. In Betreff des Lithiums und Natriums mag hier nur daran erinnert werden, dass während das Kalium, Rubidium und Caesium in ihren Sulfaten und Chloriden mit den entsprechenden Verbindungen vieler Schwermetalle gut krystallisirende Doppelsalze bilden, dieses bei den Salzen des Lithiums gar nicht und bei denen des Natriums in nur wenigen Fällen

Digitized by Google

geschieht. RAMMELSBERG[1] und SCHEIBLER[2] geben an, dass es ihnen nicht gelungen sei, Doppelsalze des Lithiumsulfates mit den Sulfaten des Aluminiums, Zinks, Kupfers und anderer Metalle zu erhalten. Ich erhielt folgende Resultate mit einem Gemisch aus:

10. Lithiumsulfat und Kupfersulfat.

I. Eine gesättigte Lösung von Kupfersulfat wurde mit gepulvertem Kupfersulfat und überschüssigem Lithiumsulfat während mehrerer Tage fleissig geschüttelt.

II. 20^{ccm} der Lösung I mit 3^g gepulvertem Kupfersulfat.

III. 20^{ccm} der Lösung I mit 3^g Lithiumsulfat längere Zeit geschüttelt.

Bei $22°$ enthielten 100 Theile der Lösungen:

I. 8.87 $CuSO_4$ und 21.15 Li_2SO_4

II. 8.70 » » 21.47 »

III. 9.00 » » 21.47 »

Die Lösungen sind demnach identisch, eine gegenseitige Verdrängung der Salze findet nicht statt.

Wenn die Lithiumverbindungen in Beziehung auf die Bildung von Doppelsalzen von der entsprechenden Kalium- und Ammoniumverbindung auch erheblich abweichen, so bilden sie doch mit den Salzen der übrigen Alkalimetalle den isomorphen Mischungen ähnliche Krystalle. So sind z. B. Mischungen von Ammonium-Lithiumsulfat bereits von dem Entdecker des Lithiums ARFVEDSON[3] in schönen Krystallen dargestellt. Die mit den Mischungen dieser beiden Salze angestellten Lösungsversuche hatten folgendes Resultat:

11. Ammoniumsulfat und Lithiumsulfat.

I. 30^g kryst. Lithiumsulfat und 40^g Ammoniumsulfat in 50^{ccm} Wasser.

II. 15^{ccm} der Lösung I und 3^g Ammoniumsulfat.

III. 15^{ccm} der Lösung I und 3^g kryst. Lithiumsulfat.

Die Lösungen wurden dadurch erhalten, dass die obigen Salzmengen in feingepulvertem Zustande mit Wasser mehrere Tage fleissig umgeschüttelt wurden. Bei $16°7$ enthielten 100 Theile der Lösungen:

[1] Berichte der Berliner Akademie 1848. 385.
[2] Journal f. prakt. Chemie 67. 485. (1855).
[3] SCHWEIGGER Jahrb. d. Ch. u. Ph. 34. 217 (1822).

Digitized by Google

I. 25.67 $(NH_4)_2SO_4$ und 12.16 Li_2SO_4
II. 32.85 » » 9.37 »
III. 16.67 » » 18.37 »

Die gegenseitige Verdrängung ist eine ebenso starke, wie sie unter ähnlichen Verhältnissen die eigentlichen Doppelsalze zeigen.

12. *Chlorammonium und Chlorlithium.*

I. 50^g Chlorlithium und 20^g Chlorammonium in 50^{ccm} Wasser gelöst.
II. 15^{ccm} der Lösung I und 3^g Chlorammonium.
III. 15^{ccm} der Lösung I und 3^g Chlorlithium.

Bei 12°6 enthielten 100 Theile der Lösungen:

I. 41.7 LiCl und 5.05 NH_4Cl
II. 41.1 » » 5.64 »
III. 44.3 » » 2.88 »

Auch hier zeigt sich eine, wenn auch geringe Verdrängung.

VIII. Es ist bereits oben unter VI. gezeigt worden, dass die Sulfate des Nickels und Kupfers mit Natriumsulfat sich in den Lösungen nicht verdrängen, während diese Sulfate mit Ammonium- und Kaliumsulfat Doppelsalze bilden und sich in den Lösungen mit diesen verdrängen. Doppelsalze von Natriumsulfat mit Nickel- und Kupfersulfat sind nicht bekannt. Dagegen sind Doppelsalze des Natriumsulfats mit Zink- und Cadmiumsulfat bekannt. Das Salz

$$Na_2SO_4 + ZnSO_4 + 4H_2O$$

ist von F. C. Bucholz[1] und schon von Karsten[2] dargestellt.

Das Salz

$$Na_2SO_4 + CdSO_4 + 2H_2O$$

beschreibt von Hauer.[3]

Versuche über die Löslichkeit der Doppelsalze im Gemisch mit den dieselben zusammensetzenden Einzelsalzen ergaben:

13. *Natrium- und Cadmiumsulfat.*

I. 45^g kryst. Cadmiumsulfat und 15^g entwässertes Natriumsulfat in 50 Wasser gelöst.
II. 20^{ccm} der Lösung I und 5^g kryst. Cadmiumsulfat.
III. 20^{ccm} der Lösung I und 4^g entwässertes Natriumsulfat.

---

[1] Arch. d. Pharm. (2) 127. 66. 1866.
[2] Gmelin Handbuch (6. Aufl.) III. 47.
[3] Journal für prakt. Chemie 64. 477.

Digitized by Google

Bei 15°1 enthielten 100 Theile der Lösung:

I. 33.64 $CdSO_4$ und 11.59 Na_2SO_4.
II. 33.36 » » 10.34 »
III. 30.37 » » 12.48 »

14. *Natrium- und Zinksulfat.*

I. 100^g kryst. Zinksulfat und 30^g kryst. Natriumsulfat in 50 Wasser gelöst.
II. 15^{ccm} Lösung I mit 3^g entwässertem Natriumsulfat.
III. 15^{ccm} Lösung I mit 3^g entwässertem Zinksulfat.

100 Theile der Lösungen enthielten bei 12°5:

I. 28.7 $ZnSO_4$ und 6.58 Na_2SO_4.
II. 26.9 » » 7.36 »
III. 30.2 » » 5.55 »

Die drei zusammengehörigen Lösungen sind nicht identisch, es findet eine gegenseitige Verdrängung der Salze statt. Aber es ist auffallend, dass diese Verdrängung sehr viel geringer ist, als bei den Lösungen der oben angeführten Doppelsalze unter sonst ähnlichen Verhältnissen; es ist aber auch bekannt, dass diese letztgenannten Doppelsalze nur schwierig darzustellen sind und, wie es scheint, nur innerhalb enger Temperaturgrenzen entstehen.

Eine ähnliche geringe Verdrängung zeigen auch einige Salzpaare, welche aus ihrer gemeinsamen Lösung in Mischungen von sehr wechselnder Zusammensetzung krystallisiren, ohne isomorphe Mischungen in der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes zu bilden. Es gehören hierher:

15. *Kalium- und Silbernitrat.*

I. 110^g Silbernitrat und 20^g Kaliumnitrat in 30 Wasser gelöst.
II. 10^{ccm} Lösung I und 3^g Silbernitrat.
III. 10^{ccm} Lösung I und 3^g Kaliumnitrat.

Bei 14°8 enthielten 100 Theile der Lösungen:

I. 65.1 $AgNO_3$ und 8.5 KNO_3.
II. 65.3 » » 8.5 »
III. 60.6 » » 10.6 »

Aus einer gemischten Lösung von Kaliumnitrat und Silbernitrat krystallisiren nach H. ROSE[1] Krystalle von der Form des Kalium-

[1] POGG. Ann. 106, 320.

Digitized by Google

nitrats, welche $3\,KNO_3 + AgNO_3$ sind. Das Salz $KNO_3 + AgNO_3$ wurde von Russel und Maskelyne[1] erhalten.

16. *Natriumnitrat und Silbernitrat.*

I. 50^g Silbernitrat und 30^g Natriumnitrat in 30^{ccm} Wasser.
II. 10^{ccm} Lösung I und 10^g Silbernitrat.
III. 10^{ccm} Lösung I und 5^g Natriumnitrat.

In 100 Theilen der auf 16°0 abgekühlten Lösungen fand ich:

I. 42.5 $AgNO_3$ und 25.2 $NaNO_3$.
II. 43.3 » » 23.5 »
III. 40.4 » » 26.2 »

Nach Angabe von H. Rose[2] scheiden sich aus gemischter Lösung von Natrium- und Silbernitrat, welche letzteres Salz in grossem Überschuss enthält, zuerst Krystalle des letzteren Salzes aus, dann Krystalle von der Form des Natriumnitrats, welche auf 1 Mol. Silbernitrat 2 bis 4.2 Mol. Natriumnitrat enthalten. Nach Rammelsberg, Krystallographische Chemie S. 354, erhält man aus der gemischten Lösung beider Salze Krystalle, welche auf 1 Ag bis 10 Na enthalten. Wir haben es hier also mit Mischungen von sehr wechselnder Zusammensetzung zu thun, so dass die Annahme nahe liegt, dass viele der hier in Frage stehenden Krystalle nur Natronsalpeter seien, welcher wechselnde Mengen von Silbernitrat eingeschlossen enthält. Die obigen Versuche über das Verhalten der Lösungen von Gemischen dieser Salze lassen eine solche Annahme als sehr unwahrscheinlich erscheinen.

17. *Natriumnitrat und Natriumsulfat.*

I. 50^g Natriumnitrat und 20^g entw. Natriumsulfat in 50 Wasser gelöst.
II. 20^{ccm} der Lösung I und 5^g Natriumnitrat.
III. 20^{ccm} der Lösung I und 5^g entw. Natriumsulfat.

Die auf 17°8 abgekühlten Lösungen enthielten in 100 Theilen:

I. 39.5 $NaNO_3$ und 5.41 Na_2SO_4
II. 43.9 » » 2.69 »
III. 34.5 » » 8.5 »

Es findet also eine sehr merkliche gegenseitige Verdrängung dieser beiden Salze statt. Aus der gemischten Lösung dieser Salze erhielt

[1] Proc. R. Soc. of London 26, 357.
[2] Pogg. Ann. 102, 436.

Digitized by Google

Marignac[1] das Salz $2(NaNO_3 + Na_2SO_4) + 3H_2O$ in dünnen zweigliedrigen Tafeln.

18. *Natriumsulfat und Ammoniumsulfat.*

I. 50^g Ammoniumsulfat und 21^g Natriumsulfat in 60^{ccm} Wasser gelöst.
II. 20^{ccm} Lösung I und 3^g Ammoniumsulfat.
III. 20^{ccm} Lösung I und 5^g kryst. Natriumsulfat.

In 100 Theilen der auf 11°5 abgekühlten Lösungen fand ich:

I. 8.9 Na_2SO_4 und 30.5 $(NH_4)_2SO_4$
II. 6.5 » » 36.3 »
III. 12.8 » » 23.8 »

Die Salze verdrängen sich gegenseitig. Aus der gemischten Lösung derselben krystallisirt das Salz $Na_2SO_4 + (NH_4)_2SO_4 + 4H_2O$, wie schon von Link[2] beobachtet wurde.

IX. Aus den oben unter V. mitgetheilten Versuchen geht hervor, dass die Salze, welche in isomorphen Mischungen krystallisiren, sich in gemeinsamer Lösung gegenseitig verdrängen. In Anknüpfung an diese Versuche mögen hier noch einige Versuche Platz finden, welche ich mit den Lösungen einiger Cadmiumsalze im Gemenge mit den Salzen einiger anderer Metalle angestellt habe.

19. *Cadmiumsulfat und Kupfersulfat.*

I. 80^g kryst. Cadmiumsulfat und 20^g kryst. Kupfersulfat in 50 Wasser gelöst.
II. 20^{ccm} der Lösung I mit 3^g kryst. Cadmiumsulfat.
III. 20^{ccm} der Lösung I mit 3^g kryst. Kupfersulfat.

In 100 Theilen der auf 16°8 abgekühlten Lösungen fand ich:

I. 38.20 $CdSO_4$ und 5.42 $CuSO_4$
II. 38.19 » » 5.89 »
III. 38.30 » » 5.34 »

20. *Cadmiumsulfat und Zinksulfat.*

I. 60^g kryst. Cadmiumsulfat. und 60^g kryst. Zinksulfat in 50 Wasser gelöst.

[1] Annales des Mines (5) XII. 44.
[2] Crell, Chem. Annalen 1796. S. 30.

Digitized by Google

II. 20ccm der Lösung I mit 3g kryst. Cadmiumsulfat.
III. 20ccm der Lösung I mit 3g kryst. Zinksulfat.

In 100 Theilen der auf 14°7 abgekühlten Lösungen fand ich:

I. 29.3 $CdSO_4$ und 15.1 $ZnSO_4$
II. 29.2 » » 15.2 »
III. 29.7 » » 15.2 »

Die drei zusammengehörigen Lösungen dieser Salzpaare sind also identisch, eine gegenseitige Verdrängung findet nicht statt. Mischkrystalle von Cadmium- mit Kupfer- oder Zinksulfat sind nicht bekannt.

Von den Sulfaten des zur Magnesiumgruppe gehörenden Berylliums giebt zwar Klatzo[1] an, isomorphe Mischungen mit den Sulfaten des Zinks, Kupfers, Magnesiums u. s. w. erhalten zu haben. Dieser Angabe widersprechen jedoch die Versuche von Marignac,[2] welcher zeigt, dass aus den gemischten Lösungen des Berylliumsulfats mit den Sulfaten der oben genannten Metalle keine Mischkrystalle, sondern die beiden Sulfate neben einander anschiessen. Ich habe Versuche in Bezug auf die Löslichkeit eines Gemisches von

21. *Berylliumsulfat und Kupfersulfat*

angestellt. 8g kryst. Kupfersulfat und 40g kryst. Berylliumsulfat wurden in 40ccm Wasser zerlöst. In der erkalteten Lösung fanden sich Krystalle ausgeschieden, welche schon durch ihre Farbe erkennen liessen, dass beide Salze neben einander auskrystallisirt waren, namentlich waren die Krystalle des Berylliumsulfats völlig farblos und enthielten nicht eine Spur Kupfer.

I. Obige Lösung.
II. 10ccm der Lösung I und 3g kryst. Berylliumsulfat.
III. 10ccm der Lösung I und 3g kryst. Kupfersulfat.

Die auf 17°2 abgekühlten Lösungen enthielten in 100 Theilen:

I. 25.89 $BeSO_4$ und 3.65 $CuSO_4$
II. 25.40 » » 4.38 »
III. 25.80 » » 4.00 »

Die Lösungen sind als identisch zu betrachten, eine Verdrängung des einen Salzes durch das andere findet nicht statt, eine Thatsache, welche für die Ansicht Marignac's spricht.

[1] Journ. f. prakt. Chemie, 106. 241.
[2] Ann. d. Chem. u. Phys. (4) 30. 45.

Digitized by Google

X. Aus den im Vorstehenden mitgetheilten Versuchen geht als Resultat hervor, dass von den angeführten Salzpaaren sich einige aus ihren gemeinsamen Lösungen verdrängen, wenn auf diese ein Überschuss des einen oder des andern Salzes einwirkt, dass aber bei andern Salzpaaren eine solche Verdrängung nicht stattfindet. Es geht ferner aus den Versuchen hervor, dass eine solche Verdrängung nur diejenigen Salzpaare zeigen, welche entweder in Doppelsalzen oder in Mischkrystallen aus der gemeinsamen Lösung sich ausscheiden. Aber es geht aus den Versuchen auch hervor, dass bei diesem Kampfe um das Gelöstsein die Masse der einzelnen Salze eine Rolle spielt.

Ich möchte noch darauf hinweisen, dass diese Verdrängung des einen Salzes durch ein anderes wohl bei folgenden Erscheinungen mitwirkt.

Bekanntlich wachsen gewisse Krystalle in den Lösungen isomorpher Salze weiter, ein Oktaëder von Chromalaun überzieht sich in regelmässiger Weise in einer gesättigten Lösung von gewöhnlichem Alaun mit einer farblosen Schicht des letzteren. Wenn man einen Krystall von Chromalaun in eine gesättigte Lösung von gewöhnlichem Alaun hängt, so dürfte sich wohl zunächst eine, wenn auch noch so dünne Schicht des Krystalles auflösen, dadurch wird aber aus der den Krystall unmittelbar berührenden Schicht der Lösung des gewöhnlichen Alauns eine gewisse Menge desselben verdrängt, also ausgeschieden. Dieser Theil setzt sich an dem festen Chromalaun ab, überzieht denselben sofort mit einer für das Lösungsmittel undurchdringlichen Schicht festen Alauns und es setzt sich nun bei weiterer Abkühlung oder bei Verdunstung des Lösungswassers Schicht auf Schicht des gelösten Alauns ab.

Die bekannten Pseudomorphosen von Rotheisenstein nach Kalkspath verdanken ihre Entstehung wohl einem ähnlichen Vorgange. Die Lösung von Eisencarbonat in Kohlensäure haltigem Wasser kommt mit dem Kalkspath in Berührung. Es löst sich etwas Kalkcarbonat auf, dadurch wird aber aus der unmittelbar berührenden Lösung ein entsprechender Theil des isomorphen Eisencarbonats verdrängt und lagert sich an der Stelle der aufgelösten Kalkverbindung ab. Der Übergang von Eisencarbonat in Eisenoxyd wird dann als secundärer Process durch später hinzutretenden Sauerstoff der Luft bewirkt.

Die oft beobachtete Erscheinung, dass gewisse Doppelsalze aus ihrer Lösung besser krystallisiren, wenn ein Überschuss des einen Bestandtheils vorhanden ist, findet ihre Erklärung in obigen Versuchen: der eine Bestandtheil verdrängt das Doppelsalz, indem er dasselbe schwerer löslich macht.

Digitized by Google

Ähnlich bei den Mischkrystallen isomorpher Salze. Aus der gemeinsamen Lösung derselben scheiden sich Mischkrystalle erst dann aus, wenn, sei es durch Abnahme der Temperatur, sei es durch Verdunstung des Lösungswassers für beide Salze die Lösung eine gesättigte geworden ist. Da aber in einer für ein bestimmtes Paar dieser Salze gesättigten Lösung diese in sehr verschiedenem Verhältniss enthalten sein können, so ist klar, dass auch die sich ausscheidenden Mischkrystalle eine sehr verschiedene Zusammensetzung zeigen werden.

Digitized by Google

21. Die Dissociation wasserhaltiger Salze und daraus abgeleitete Folgerungen über die Constitution der Salzbestandtheile.

Von W. Müller-Erzbach
in Bremen.

(Vorgelegt von Hrn. Rammelsberg am 26. März; — gedruckt im Bericht vom 16. April [St. XX]; — ausgegeben am 23. April.)

Lässt man in verschlossenen und am Boden mit concentrirter Schwefelsäure bedeckten Flaschen von 200 bis 300^{ccm} Inhalt verdünnte Schwefelsäure und reines Wasser aus zwei hineingestellten, an einer Seite offenen Glasröhren von 7^{mm} Durchmesser und 5 bis 7^{cm} Länge verdunsten, so kann trotzdem die in den Flaschen befindliche Luft so trocken gehalten werden, dass die restirende Feuchtigkeit bei mehrtägigem Verschluss der Flaschen nur eine durchschnittliche Spannung von $^1/_2$ oder sogar $^1/_3{}^{mm}$ Quecksilberhöhe behält. Wurden jedoch bei den angestellten Versuchen die Flaschen täglich oder häufiger geöffnet, so stieg die Spannung wegen des aus der äusseren Luft eindringenden Wasserdampfes auf den Durchschnitt von 2^{mm} und mehr, selbst wenn durch Schütteln der Schwefelsäure ein schnelleres Austrocknen versucht war. Innerhalb solcher Flaschen konnte deshalb nach der Verdampfungsgeschwindigkeit in der von mir früher[1] beschriebenen Weise die Dampfspannung der in die Glasröhren gebrachten wasserhaltigen Verbindungen bestimmt werden, und die Bestimmungen erreichten bei Anwendung einer einfachen Correctur wegen des restirenden Wasserdampfes fast die Genauigkeit der barometrischen Methode. Die nach der letzteren von Regnault für die Dampfspannung der 19- bis 62procentigen Schwefelsäure gemachten bekannten Angaben wichen in keinem Falle um $^1/_3{}^{mm}$ von den aus der Verdampfungsgeschwindigkeit gefundenen Zahlen ab. Nur für höhere Procente an Säure wurden die Abweichungen verhältnissmässig beträchtlicher und jedenfalls deshalb, weil jetzt die Unterschiede in den Spannungen der untersuchten und der zum Austrocknen benutzten concentrirten Schwefelsäure zu gering geworden waren. In ziemlich weiten Grenzen

[1] Wiedem. Ann. 23, 607.

Digitized by Google

lässt sich demnach aus dem Gewichtsverluste die Dampfspannung mit ausreichender Zuverlässigkeit feststellen. Unter einander stimmen die Resultate auch bei der Dissociation fester Körper meist so vollständig überein, wie bei der Verdunstung von Flüssigkeiten, und deshalb ist die neue Methode ein geeignetes Hülfsmittel geworden, um aus der Dissociation wasserhaltiger Salze über die Constitution derselben Aufschlüsse zu erhalten, die theilweise früheren Versuchsergebnissen entsprechen, theilweise aber auch bisher unbekannt waren. Da die Beobachtung der Salze in der Barometerröhre wiederholt und namentlich nach den eingehenden Untersuchungen von Hrn. NAUMANN[1] als unzuverlässig für die Ermittelung des Dampfdrucks erkannt ist, so konnte die absolute Grösse der Dissociationsspannung bis jetzt nur nach der relativen Verdampfungsgeschwindigkeit der Salze gegen reines Wasser bestimmt werden. Selbst die Thatsache, dass bei gleichbleibender Temperatur die Dampfspannung der Salze eine unveränderliche ist, war vorher nicht festgestellt worden, ja auf Grund der sorgfältigen und zahlreichen barometrischen Messungen wurde sogar die Möglichkeit einer solchen Feststellung stark bestritten.

Unter der ziemlich grossen Zahl der bis jetzt untersuchten Salze zeigte sich nur in einem Falle bei einer Art von Boraxkrystallen, die aus wässriger Lösung ausgeschieden waren, eine bemerkenswerthe Ausnahme von der Gleichmässigkeit der Spannung. Der unter der Einwirkung von Wasserdampf gebildete Borax zeigte sie überhaupt nicht und seine Spannung blieb ebenfalls andauernd constant. Während der fortschreitenden Zerlegung der Salze hielt sich die Spannung nun entweder unverändert bis alles Wasser verdunstet war oder sie wurde von bestimmten Zusammensetzungen an sprungweise eine schwächere, die dann wieder gleichmässig blieb. Die Versuche führten deshalb unmittelbar und meist recht auffallend an diejenigen Grenzen, an welchen der Übergang von den zurückgebliebenen einfacheren zu den ursprünglichen weniger einfachen Molekülen stattfindet. Bei früheren Zerlegungsversuchen, die namentlich GRAHAM[2] in grosser Zahl und mit vieler Sorgfalt ausgeführt hat, ist häufig erhöhte Temperatur und meist unter Abkürzung der Versuchsdauer das Vacuum zur Zersetzung mitbenutzt, die schwächeren Spannungen der zurückbleibenden Salze sind nicht weiter beachtet und wahrscheinlich als verschwindend klein angesehen.

Nach den bereits publicirten Resultaten[3] betrug für eine Temperatur von 15° mit Abrechnung des Gegendrucks beim phosphor-

[1] Chem. Ber. 1874, S. 1573.
[2] POGG. 38, S. 132.
[3] WIEDEM. Ann. 23, S. 616.

Digitized by Google

sauren Natron $Na_2HPO_4 + 12H_2O$ für die 5 letzten Wassermoleküle die Spannung 8.8^{mm}, für die folgenden 5 Moleküle blieb sie andauernd 5.8^{mm} und fiel dann beim Entweichen des letzten Wassers auf den abermals constanten Werth von 1.6^{mm}. Die direct gefundenen Zahlen für das Verhältniss der Spannung des im Salze gebundenen Wassers zu der des freien Wassers gaben ohne Correctur die Werthe 0.67—0.41 und 0.05 und diese Werthe der relativen Spannung sind schon vollständig ausreichend, um den grossen Unterschied im Verhalten der drei Salze mit 2, 7 und 12 Molekülen Wasser deutlich zu machen. Da die relative Spannung ausserdem auf den Grad der Anziehung des gebundenen Wassers hinweist, so sollen die nachstehenden Angaben nur die unmittelbar gefundenen relativen Spannungen enthalten, und weil diese mit zunehmender Temperatur wachsen, so ist zugleich für möglichst viele Fälle eine Temperatur von 15° festgehalten worden. Für die Beurtheilung der Resultate ist ausserdem zu beachten, dass meine Versuche fast bei allen Salzen, besonders aber bei entstehendem Zweifel wegen der Zuverlässigkeit des Ergebnisses noch einmal mit solchen Salzen wiederholt wurden, die aus wasserfreien oder wasserärmeren Verbindungen und dem Wasserdampf feucht gehaltener Luft zurückgebildet waren. Zunächst wurden an die erwähnten früheren Versuche die über schwefelsaure Salze und über Haloidsalze angeschlossen, und diese Reihenfolge ist auch in der nachstehenden Übersicht festgehalten.

Schwefelsaure Salze mit 7 Molekülen Wasser. 1.499^g gewöhnlicher rhombischer schwefelsauren Magnesia $MgSO_4 + 7H_2O$ zersetzten sich in 16 Tagen unter einer relativen Spannung von 0.34 in das Salz mit 6 Molekülen Wasser, welches bei einer Durchschnittstemperatur von annähernd 18° in den folgenden 13 Tagen nur noch 0.009 von der Spannung des unverbundenen Wassers anzeigte. Die corrigirten Werthe für die absoluten Spannungen betragen 4.9 und 0.4^{mm}, so dass mit der Aufnahme des 7. Wassermoleküls eine mehr als zwölffache Steigerung der Dampfspannung verbunden ist. Auf dasselbe Magnesiumsulfat $MgSO_4 + 6H_2O$ war früher Hr. E. WIEDEMANN[1] aus der Volumveränderung des Salzes bei 93° geführt worden und auch MITSCHERLICH und HAIDINGER hatten es dargestellt. Am schwefelsauren Nickeloxydul $NiSO_4 + 7H_2O$ wurde in zwei Versuchsreihen für das erste Wassermolekül die relative Spannung 0.56 beobachtet, dann fiel sie bei dem Salze der einen Darstellung auf 0.007 und bei einem anderen sogar auf 0.003 und wurde dann in noch zwei Monate fortgesetzter Beobachtung ganz unmerklich. Die Salze mit 7 und

[1] WIEDEM. Ann. 17, 561.

Digitized by Google

6 Molekülen Wasser geben sich demnach hier ebenfalls als wesentlich verschiedene zu erkennen. Schwefelsaures Kobaltoxydul $CoSO_4 + 7H_2O$ verhielt sich fast genau wie das Nickelsalz, die relative Spannung wurde anfangs bei den Temperaturen von 15° bis 17° zwischen 0.53 und 0.57 schwankend beobachtet und war dann nach dem Verluste eines Wassermoleküls eine minimale. Hr. G. Wiedemann[1] fand mit seinen barometrischen Messungen eine ähnliche Übereinstimmung zwischen beiden Salzen, aber die von ihm beobachteten absoluten Spannungen sind überall grösser und wie ich glaube aus Gründen, die ich in der oben erwähnten Mittheilung näher erörtert habe. In den beiden anderen Sulfaten mit 7 Wasser, des Eisens und des Zinks, ist die Constitution eine ganz andere. Der gewöhnliche monoklinische Eisenvitriol zeigte ziemlich grosse Abweichungen in seiner Dissociationsspannung, bei älteren übrigens gut erhaltenen Krystallen wurde in zwei Fällen, in welchen die Proben verschiedenen Quellen entnommen waren, eine relative Spannung von 0.46 bis 0.48 beobachtet, nach dem Umkrystallisiren zeigten die zuerst ausgeschiedenen Krystalle dieselbe Spannung, aber die später ausgeschiedenen und ebenso drei Proben anderer gereinigter Krystalle eine geringere von 0.27 bis 0.35. Bei wieder anderen, aus schwach angesäuerter Lösung erhaltenen Krystallen wurde für 18° 0.41 bis 0.43 gefunden, aber bei dem sehr haltbaren durch Alkohol niedergeschlagenen Eisenvitriol ganz gleichmässig 0.36 und für eine Temperatur von $18^1/_2$° 0.40. Aus Wasserdampf und $FeSO_4 + H_2O$ gebildeter Vitriol hatte ebenfalls eine constante Spannung von 0.30 und 0.31 bei 15° und ich halte deshalb die ihr naheliegende Spannung des durch Alkohol gefällten Eisenvitriols für die normale. Dieser am wenigsten veränderliche Eisenvitriol enthielt übrigens einer älteren Angabe von Persoz entgegen volle 7 Moleküle Wasser. Alle Krystalle von der Spannung 0.36 bis 0.30 gaben genau 3 Moleküle Wasser ab, und dann wurden die Gewichtsverluste im Laufe von 6 und 7 Tagen unmerklich. Man hat demnach nach der Dissociation die Salze mit 7 und mit 4 Molekülen Wasser zu unterscheiden, Regnault hat die letztere Verbindung durch Abdampfen einer Vitriollösung bei 80° erhalten, und sie gab sich ihm also ebenfalls als die festere zu erkennen. Die erwähnten älteren Krystalle entliessen noch ein viertes Molekül Wasser mit der schwächeren Spannung von 0.24, aber dann hörte die Zersetzung ebenfalls auf.

Zinkvitriol verlor bei wenig veränderter Spannung 0.35 für 16°, die sich in einem der ziemlich zahlreichen Versuche bis 0.43 für $19^1/_2$° steigerte, 5 Moleküle Wasser, dann nahm die Spannung schnell bis

[1] Pogg. Jubelb. 1874, S. 474.

Digitized by Google

0.24 und 0.18 ab, und schliesslich betrug der Gewichtsverlust bei einem Rückstande von 0.728^{g} in 7 Tagen nicht $^{1}/_{2}{}^{mg}$, obgleich noch $1^{1}/_{9}$ Moleküle Wasser vorhanden waren. In einem anderen Falle blieben $1^{2}/_{3}$ Moleküle Wasser zurück, und in den folgenden 31 Tagen wurde dann noch nicht 1^{mg} Wasser verdampft. Da der Rest nicht bei der vollen Zahl der durch die Zusammensetzungsformel ausgedrückten Wassermoleküle abschloss, so wurde eine neue Probe neben einem grossen Überschuss an entwässertem Ätzkali in eine zugeschmolzene Glasröhre abgesperrt und die Röhre nach 8 Monaten erst geöffnet, aber auch jetzt fand sich ein Wasserrückstand von $1^{1}/_{7}$ Molekülen, also nahe mit dem des ersten Versuches übereinstimmend. Die von dem siebenfach gewässerten Salz hiernach als fester zu unterscheidende Verbindung mit 2 Molekülen Wasser ist vorher von SCHINDLER beim Zerfallen des Zinkvitriols durch Erwärmen auf 50° beobachtet und ebenso von KÜHN durch Kochen mit absolutem Alkohol. KÜHN erhielt auch durch Erhitzen bis 100° das einfach gewässerte Salz, aber ich darf nicht annehmen, dasselbe ebenfalls abgeschieden zu haben, dazu waren die von mir beobachteten Wasserreste zu gross. Aus entwässertem Zinkvitriol und Wasserdampf gebildetes Salz hatte für die fünf letzten Moleküle Wasser eine etwas grössere Spannung von 0.43 bis 0.44, dann eine abermals constante von 0.33 bis 0.36 und es blieben nur $1^{1}/_{12}$ Moleküle Wasser zurück. Die Salze mit 7 Molekülen Wasser zerfallen also nach ihrer Dissociation in drei von einander verschiedene Gruppen. Ob das dampfförmig durch die entwässerten Sulfate aufgenommene Wasser dem Krystallwasser ganz gleichzustellen ist, muss erst durch Beobachtung des specifischen Gewichts und anderer Eigenschaften entschieden werden.

Schwefelsaure Salze mit 5 Molekülen Wasser. Selbst ganz fein pulverisirter Kupfervitriol gab in den ersten Tagen an die durch Schwefelsäure ausgetrocknete Luft fast gar kein Wasser ab, erst allmählich nahm die Spannung des Wasserdampfs zu und blieb dann bei einer Durchschnittstemperatur von 17° wochenlang constant 0.04 bis 0.05, während etwas über 2 Moleküle Wasser verdunsteten. Nachher nahm die Spannung schnell bis 0.002 ab, dann wurden monatelang zwischen 0.0015 und 0.0027 liegende Werthe beobachtet und schliesslich waren etwas über 2 Moleküle Wasser rückständig, während GRAHAM[1] an dem bei etwas höherer Temperatur von 19 bis 21° im Vacuum gehaltenen Kupfervitriol einen Rest von fast 2 Molekülen bestimmt hat. 10 Monate lang der Einwirkung einer grösseren Menge von entwässertem Kali in einer zugeschmolzenen Glasröhre ausgesetzt,

[1] Phil. Mag. J. 6, S. 419.

Digitized by Google

enthielt der Vitriol noch $^1/_3$ des ursprünglichen, also $1^2/_3$ Moleküle Wasser; er hat demnach bei 15° eine dreifach verschiedene Dissociationsspannung, je nachdem er mit 5, mit 3 oder mit 2 Molekülen Wasser verbunden ist. Abweichend von allen anderen bisher untersuchten Salzen erwies sich die aus entwässertem Kupfervitriol und Wasserdampf gebildete Verbindung von dem gewöhnlichen Salze so sehr verschieden, dass sie genau $^2/_5$ ihres Wassers mit einer relativen Spannung von 0.09, also von mehr als dem doppelten Betrage der früher gefundenen verdampfen liess. Aus dieser Thatsache erklären sich ohne weiteres die besonders grossen Unregelmässigkeiten, welche Hr. NAUMANN aus der barometrischen Messung der Dissociationsspannung von Kupfervitriol mitgetheilt hat. Schwefelsaures Manganoxydul $MnSO_4 + 5H_2O$, welches etwas verwittert war und nicht volle 5 Wassermoleküle enthielt, verlor eine geringe Menge Wasser mit einer Spannung von 0.61, die aber bald auf 0.50 herabging und nun constant blieb bis $1^1/_2$ Moleküle Wasser rückständig waren. Später betrug sie bald nur noch 0.003 und in einem Wasserrest von $1^1/_5$ Molekülen verloren 0.491^g des Rückstandes in 2 Monaten nicht 1^{mg}. In der zugeschmolzenen Glasröhre liess Ätzkali in 8 Monaten bei einem ersten Versuche $1^1/_3$, bei einem zweiten bei etwas höherer Temperatur in 2 Monaten $1^1/_5$ Moleküle Wasser des Mangansulfats zurück, während GRAHAM durch Erhitzen an der Luft bis 114° C. etwas über 1 Molekül und beim Trocknen im Vacuum bis 22° $1^2/_3$ Molekül Wasser im Rückstande gefunden hat.

Haloidsalze. Krystallisirtes Chlorcalcium $CaCl_2 + 6H_2O$ ebenso wie die aus entwässertem Salze und Wasserdampf gebildete Verbindung liess vier verschiedene Abstufungen in der Dampfspannung ganz bestimmt erkennen, für $CaCl_2 + 6H_2O$ 0.12, für $CaCl_2 + 4H_2O$ etwas ungleichmässig 0.08 und 0.09, für $CaCl_2 + 2H_2O$ von 0.013 bis 0.017 und endlich für $CaCl_2 + H_2O$ nach einer Beobachtung von drei Monaten eine minimale oder Null. Von diesen Zerlegungen ist nur die Abscheidung von 4 Wassermolekülen bekannt, welche GRAHAM in der Sommerwärme im Vacuum und MITSCHERLICH durch Erhitzen bis 200° bewirkt haben.

Das Verhalten des Chlorcalciums bei der Dissociation in gewöhnlicher Temperatur könnte demnach durch folgende Zusammensetzungsformel ausgedrückt werden:

$$\underbrace{\underbrace{CaCl_2 + H_2O}_{+\,H_2O}}_{+\,2H_2O} + 2H_2O$$

Kobaltchlorür $CoCl_6 + 6H_2O$ gab mit der Spannung 0.20 zwei Moleküle Wasser ab und erlitt dann in acht Tagen keinen bemerkbaren Gewichtsverlust, so dass neben dem sechsfach gewässerten Salze die sonst noch nicht bekannte Verbindungsstufe des vierfach gewässerten als eine ganz verschiedene durch die Dissociation angezeigt wird. Manganchlorür $MnCl_2 + 4H_2O$ zerlegt sich unter der gleichmässigen Spannung 0.18 bis genau an die Grenze der Verbindung $MnCl_2 + 2H_2O$, welche GRAHAM schon gefunden hat und über welche hinaus 0.325^g des Rückstandes in 14 nicht 1^{mg} verloren. Aus dem Bromnatrium $NaBr + 2H_2O$ verflüchtigt sich alles Wasser ohne wesentliche Änderung der Spannung von 0.27. Dagegen gibt wieder Chlorbarium $BaCl_2 + 2H_2O$ nur die Hälfte des Wassers mit einer allmählich auf 0.035 steigenden Spannung ab, bei der zweiten Hälfte ging dieselbe nicht über 0.007 hinaus.

Neben der grossen Verschiedenheit in der Constitution der Salze, die sich auf diese Weise durch die genauere Beobachtung ihrer Dissociation zu erkennen gibt, erschien mir ein anderer Umstand von ganz besonderer Bedeutung für die Auffassung über die Anordnung der einzelnen Bestandtheile innerhalb der einheitlichen Gruppen, die wir als Moleküle zu bezeichnen pflegen. Im Laufe der Dissociation zeigte sich nämlich ziemlich häufig die merkwürdige Erscheinung, dass beim Übergang von einer wasserreicheren zu einer Verbindung von geringerem Wassergehalt und geringerer Spannung anfangs tagelang fast gar kein Wasser verdampfte und erst allmählich eine grössere und schliesslich constante Gewichtsabnahme wahrgenommen werden konnte. Mehrere Salze von überhaupt schwacher Dissociationsspannung verhielten sich bei der ersten Einwirkung der trockenen Atmosphäre ganz ähnlich und deshalb erkläre ich mir jenen Stillstand bei dem Übergange zu einem schwerer zersetzbaren Complexe dadurch, dass das zuerst abgegebene Wasser diesem Complexe in einem gewissen Grade getrennt gegenübersteht. Anfangs reagirt das loser gebundene Wasser für sich allein auf den äusseren Feuchtigkeitsdruck in dem das Salz umgebenden Raume, ist dieses erste Wasser dann verschwunden, so lockert sich allmählich durch die innere Dampfspannung, die nun keinen Gegendruck mehr findet, in allen Molekülen die Festigkeit der rückständigen Verbindung, und so entsteht schliesslich von neuem ein gleichmässiger Dampfdruck. Man hat also nach dieser Auffassung innerhalb der einzelnen Moleküle von manchen Salzen getrennt wirksame Complexe von Wasser und von wasserhaltigem Salz anzunehmen. Das bezügliche Verhalten fiel unter den von mir untersuchten Verbindungen an folgenden besonders auf: am phosphorsauren Natron, Borax, an dem durch Alkohol ausgeschiedenen Eisen-

Digitized by Google

vitriol, am Zinkvitriol, Kupfervitriol, Chlorcalcium, Chlormagnesium und Chlorbarium. Als eine vereinzelt vorkommende Ausnahme kann man demnach die Erscheinung entschieden nicht ansehen und es verdiente näher geprüft zu werden, ob vielleicht eine Veränderung des Volumens mit jenem Vorgang verbunden ist.

Kennt man die Dissociationsspannung eines Salzes und ausserdem die Dampfspannung seiner gesättigten wässerigen Lösung, so lassen sich leicht die Grenzen bestimmen, innerhalb deren das Salz an der Luft verwittern oder zerfliessen kann. Beispielsweise beträgt für 15° die Dissociationsspannung des Kupfervitriols mit der Correctur wegen des Gegendrucks 0.98^{mm} und die Dampfspannung einer gesättigten Lösung von Kupfervitriol 12^{mm}. Demnach kann bei 15° der Kupfervitriol nur verwittern, wenn der Feuchtigkeitsgehalt der Luft längere Zeit weniger als 8 Procent und nur zerfliessen, wenn er mehr als 95 Procent beträgt. Krystallisirtes Chlorcalcium besitzt ein Dissociationsspannung von 2.0^{mm}, die gesättigte Lösung eine Spannung von ungefähr 5.5^{mm}, also verlangt dieses Salz bei 15° zum Verwittern einen Feuchtigkeitsgehalt der Atmosphäre von weniger als 16 Procent und zum Zerfliessen von mehr als 43 Procent. Über die letztere Zahl geht aber bekanntlich der durchschnittliche Feuchtigkeitsgrad der Luft bedeutend hinaus, und es stehen daher die abgeleiteten Resultate sowohl mit der bekannten geringen Veränderlichkeit des Kupfervitriols, als auch mit der grossen Neigung des Chlorcalciums zum Zerfliessen in völliger Übereinstimmung.

Digitized by Google

22. Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen.

Von L. KRONECKER.

(Vorgetragen am 30. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXII]; — ausgegeben am 7. Mai.)

I.

Sollen je zwei reelle Grössen, die sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden, als einander aequivalent betrachtet werden, so genügt es, die Aequivalenz:

$$a \infty a + 1$$

als für jede reelle Grösse a bestehend anzunehmen. Bei einer solchen Definition des Aequivalenz-Begriffs wird die Aequivalenz:

$$a \infty a'$$

durch jede der beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg} a\pi = \operatorname{tg} a'\pi\,, \quad \mathrm{R}(a) = \mathrm{R}(a')$$

vollkommen ersetzt, und es charakterisirt sich also $\operatorname{tg} a\pi$ als eine »analytische« und $\mathrm{R}(a)$ als eine »arithmetische« Invariante aller unter einander aequivalenten Grössen a.

Mit $\mathrm{R}(a)$ ist hier, wie in meinen früheren Aufsätzen[1], der Rest bezeichnet, welcher verbleibt, wenn man von der Grösse a die ihr zunächst benachbarte ganze Zahl subtrahirt; es ist daher $\mathrm{R}(a)$ die ihrem absoluten Werthe nach kleinste von allen mit a aequivalenten Grössen, und sie soll durch die Ungleichheitsbedingung:

$$-\tfrac{1}{2} \leqq \mathrm{R}(a) < \tfrac{1}{2}$$

bestimmt werden, damit sie auch für den Fall, wo die Grösse a genau in der Mitte zwischen zwei benachbarten ganzen Zahlen liegt, unzweideutig definirt sei.

Die Aequivalenz $a \infty a'$ kann in üblicher Weise an die Betrachtung einer »Form«, nämlich an die der nicht homogenen, linearen Form $x + a$ angeknüpft werden, indem man nur diejenigen durch die Transformation $x = x' + h$ daraus entstehenden Formen als aequivalent bezeichnet, bei denen der Substitutionscoefficient h eine ganze Zahl ist. Die Form $x + \mathrm{R}(a)$ ist alsdann offenbar die »Reducirte« unter den der Form $x + a$ aequivalenten Formen.

[1] Sitzungsberichte 1884. XXIII. S. 520.

Digitized by Google

Nimmt man für a einen rationalen Bruch $\frac{k}{n}$, so ist $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}$ eine analytische, und $\mathrm{R}\left(\frac{k}{n}\right)$ eine arithmetische Invariante aller unter einander *modulo* n congruenten Zahlen k, und die Congruenz $k \equiv k'$ (mod. n) ist durch eine oder die andere der beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n} = \operatorname{tg}\frac{k'\pi}{n}, \quad \mathrm{R}\left(\frac{k}{n}\right) = \mathrm{R}\left(\frac{k'}{n}\right)$$

vollkommen zu ersetzen.[1] Hierauf gründen sich die Anwendungen, welche man in der Theorie der Congruenzen von der analytischen Function $\operatorname{tg} a\pi$ und von der arithmetischen Function $\mathrm{R}(a)$ machen kann.

Da $\pi\,\mathrm{R}(a)$ als der absolut kleinste zu $\operatorname{tg} a\pi$ gehörige Bogen definirt werden kann, so wird hierdurch in gewisser Hinsicht eine analytische Bestimmung für die arithmetische Function $\mathrm{R}(a)$ gegeben; aber das arithmetische Element eben dieser Bestimmung ist darin zu finden, dass jener Bogen als der absolut kleinste unter allen charakterisirt wird, oder dass, wenn der Bogenwerth aus der Integration hervorgehen soll, der Integrationsweg als der directe vorgeschrieben wird. Dass überdies $\mathrm{R}(a)$ — den Fall $\mathrm{R}(a) = -\frac{1}{2}$ ausgenommen — sich durch die unendliche Reihe:

$$(\mathfrak{A}) \qquad -\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m \frac{\sin 2ma\pi}{m\pi} \quad \text{oder} \quad i\sum_{n}(-1)^n \frac{e^{2na\pi i}}{2n\pi} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm\infty)$$

ausdrücken lässt, hat keinerlei Bedeutung für die Natur der Function $\mathrm{R}(a)$, da bekanntlich durch Grenzwerthe zahlentheoretische Functionen in mancherlei Weise dargestellt werden können.

II.

Bedeutet $[a]$, wie bei Gauss, die der Grösse a zunächst liegende kleinere ganze Zahl, so ist $[a + \frac{1}{2}]$ die der Grösse a überhaupt zunächst liegende, kleinere oder grössere, ganze Zahl, und es kann also die Gleichung:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \mathrm{R}(a) = a - [a + \tfrac{1}{2}]$$

zur Definition von $\mathrm{R}(a)$ benutzt werden, wie es an der oben angeführten Stelle in der That geschehen ist.

---

[1] Sie ist auch durch die Aequivalenz der beiden Formen $nx + k$, $nx' + k'$ zu ersetzen, und man erlangt so einen naturgemässen Übergang von dem in der ersten Section der Disqq. Arithm. aufgestellten Congruenzbegriff zu dem in der fünften Section benutzten Aequivalenzbegriff.

Digitized by Google

Da $R(a)$ positiv oder negativ ist, je nachdem a in der ersten oder in der zweiten Hälfte des von zwei benachbarten ganzen Zahlen begrenzten Intervalls liegt, so ist für positive Grössen a:

$$(\mathfrak{C}) \qquad \operatorname{sgn.} R(a) = \operatorname{sgn.} \prod_g \left(\tfrac{1}{2}g - a\right) \qquad (g = 1, 2, 3, \ldots),$$

wenn die Multiplication rechts wenigstens bis zu der Zahl $g = [2a]$ erstreckt wird. Dabei bedeutet sgn. α das Vorzeichen der Grösse α, und die Formel $(\mathfrak{C})$ gilt auch noch für den Fall $R(a) = 0$, wenn sgn. $0 = 0$ genommen wird. Aber der Fall $R(a) = -\frac{1}{2}$ ist auszuschliessen, da alsdann das Product auf der rechten Seite gleich Null werden würde.

Aus der Definition von $R(a)$ folgen unmittelbar deren durch die Gleichungen:

$$(\mathfrak{D}) \qquad R(a) = R(a+1), \quad R(a) + R(-a) = 0$$

ausgedrückte Grundeigenschaften; doch ist auch hier in der zweiten Gleichung der Fall $R(a) = -\frac{1}{2}$ auszuschliessen. Es folgt ferner aus der Definition der Function R, dass für irgend welche Grössen a, b, c, die der Aequivalenz:

$$a + b + c \infty 0$$

genügen, die Gleichung:

$$(\mathfrak{E}) \qquad R(a) + R(b) + R(c) = -1, 0, +1$$

besteht, und zwar so, dass der Werth -1 eintritt, wenn die drei Reste links negativ, der Werth $+1$, wenn sie positiv sind, und der Werth 0, wenn nicht alle drei Reste gleiches Vorzeichen haben. Die Gleichung $(\mathfrak{E})$ kann daher auch in folgender Form dargestellt werden:

$$(\bar{\mathfrak{E}}) \qquad R(a) + R(b) + R(c) = \left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\operatorname{sgn.} R(a) + \tfrac{1}{3}\operatorname{sgn.} R(b) + \tfrac{1}{3}\operatorname{sgn.} R(c)\right],$$

und da vermöge der Bedingung $a + b + c \infty 0$ der Rest von c gleich dem negativen Werthe des Restes von $a + b$ wird, so kann auch die Summe der drei Reste auf der linken Seite von $(\mathfrak{E})$ und $(\bar{\mathfrak{E}})$ durch den Ausdruck:

$$R(a) + R(b) - R(a+b)$$

ersetzt werden. Die Gleichung $(\mathfrak{E})$ ergiebt hiernach eine Bestimmung für den Rest einer Summe zweier Grössen durch die Summe der beiden Reste.

Nimmt man in $(\mathfrak{E})$ $b = \frac{1}{2} - a$, $c = \frac{1}{2}$, so kommt:

$$R(a) + R\left(\tfrac{1}{2} - a\right) + R\left(\tfrac{1}{2}\right) = -1, 0,$$

Digitized by Google

je nachdem $R(a)$ positiv oder negativ ist. Denn $R(\frac{1}{2})$ ist negativ, und die beiden Reste $R(a)$, $R(\frac{1}{2} - a)$ haben stets gleiches Zeichen. Es resultirt also die Gleichung:

$$(\mathfrak{E}^0) \qquad R(a) + R(\tfrac{1}{2} - a) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sgn}. R(a) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sgn}. R(\tfrac{1}{2} - a)$$

als ein Corollar der Gleichung $(\mathfrak{E})$.

Sind v, w irgend zwei positive reelle, zu einander reciproke Grössen, so lassen sich unendlich viele Paare ganzer Zahlen h, k so bestimmen, dass für dieselbe die Reciprocitäts-Beziehung:

$$(\mathfrak{F}^0) \qquad h = [kv + \tfrac{1}{2}], \quad k = [hw + \tfrac{1}{2}]$$

besteht, d. h. dass zugleich h die der Grösse kv nächste ganze Zahl und k die der Grösse hw nächste ganze Zahl wird. Nimmt man nämlich, wenn $v \geqq 1$ ist, für k eine beliebige und alsdann für h die der Grösse kv zunächst liegende ganze Zahl, so ist:

$$kv = h + R(kv)$$

und folglich, wenn auf beiden Seiten mit w multiplicirt und von der Gleichung $vw = 1$ Gebrauch gemacht wird:

$$k = hw + w\,R(kv).$$

Da nun $v \geqq 1$ also $w \leqq 1$ vorausgesetzt worden ist, so muss der absolute Werth von $w\,R(kv)$ kleiner als $\frac{1}{2}$ und also k die der Grösse hw zunächst liegende ganze Zahl sein. Es wird hiernach:

$$R(hw) = -w\,R(kv),$$

und es findet also für jedes Paar positiver reeller Grössen v, w, für welche $vw = 1$ ist, und für ein zugehöriges Paar ganzer Zahlen h, k die Relation:

$$(\mathfrak{F}) \qquad \frac{R(hw)}{|\sqrt{w}|} + \frac{R(kv)}{|\sqrt{v}|} = 0$$

statt. Diese Relation definirt selbst eine gewisse Reciprocitäts-Beziehung zwischen zwei Zahlen h, k, von denen die eine willkürlich angenommen werden kann; sie kann also als eine »Reciprocitäts-Gleichung zwischen den Resten von zwei ganzen Vielfachen zweier reciproken Grössen« charakterisirt werden.

Setzt man $hw = a$, $kv = b$, so stehen a, b, h, k mit einander in der durch die Gleichungen:

$$a - R(a) = k, \quad b - R(b) = h, \quad \big(a - R(a)\big)\big(b - R(b)\big) = ab$$

bezeichneten Verbindung, und die letztere dieser drei Gleichungen kann auch in der Form:

Digitized by Google

$$(\mathfrak{G}) \qquad \frac{a}{\mathrm{R}(a)} + \frac{b}{\mathrm{R}(b)} = 1$$

dargestellt werden. Geht man also von irgend zwei durch diese Gleichung ($\mathfrak{G}$) mit einander verbundenen Grössen a, b aus und bezeichnet mit h, k die beziehungsweise den beiden Grössen b, a zunächst benachbarten ganzen Zahlen, so ergiebt sich die Gleichung ($\mathfrak{F}$) als mit der Gleichung ($\mathfrak{G}$) aequivalent, wenn in ($\mathfrak{F}$) die beiden Grössen v, w beziehungsweise durch $\frac{b}{k}$; $\frac{a}{h}$ ersetzt werden.

III.

Ersetzt man jeden der Reste von a, b, c auf der linken Seite der Gleichung ($\mathfrak{E}$) oder ($\bar{\mathfrak{E}}$) des Art. II durch die Sinus-Reihe ($\mathfrak{A}$) des Art. I, so ergiebt sich, dass die Reihe:

$$(\mathfrak{H}) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^{m(a+b+c+1)}}{m\pi} - \sin ma\pi \sin mb\pi \sin mc\pi ,$$

wenn $a + b + c$ gleich einer ganzen Zahl ist, stets einen der drei Werthe $-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}$ hat, welcher durch:

$$\tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\operatorname{sgn.}\operatorname{tg} a\pi + \tfrac{1}{3}\operatorname{sgn.}\operatorname{tg} b\pi + \tfrac{1}{3}\operatorname{sgn.}\operatorname{tg} c\pi\right]$$

dargestellt werden kann. Nimmt man $b = \frac{1}{2} - a$, $c = \frac{1}{2}$, so resultirt die bekannte Gleichung:

$$(\mathfrak{H}^0) \qquad \sum_{v} \frac{\sin 2va\pi}{v\pi} = \tfrac{1}{4}\operatorname{sgn.}\mathrm{R}(a) = \tfrac{1}{4}\operatorname{sgn.}\operatorname{tg} a\pi \qquad (v = 1, 3, 5 \ldots \infty).$$

Wenn man in der Relation ($\mathfrak{F}^0$) die Sinus-Reihe ($\mathfrak{A}$) einsetzt, so kommt:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left(|\sqrt{v}| \sin 2mhw\pi + |\sqrt{w}| \sin 2mkv\pi\right) = 0 ,$$

wo $vw = 1$ und $h = \left[kv + \frac{1}{2}\right]$, $k = \left[hw + \frac{1}{2}\right]$ ist.

Bedeuten m, n zwei ungrade Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, so folgt aus der Gleichung ($\mathfrak{H}^0$), dass

$$\sum_{h} \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) \qquad \left(h = 1, 2 \ldots \tfrac{1}{2}(m-1)\right)$$

durch die Reihe

$$\sum_{v} \frac{1}{v\pi} \cot \frac{vn\pi}{2m} \qquad (v = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm \infty)$$

Digitized by Google

dargestellt werden kann. Zerlegt man diese Reihe in $\frac{1}{2}(m-1)$ Partialreihen, indem man

$$\nu = m(2r+1) \pm 2h$$

setzt und alsdann r alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, aber h nur die Werthe von 1 bis $\frac{1}{2}(m-1)$ durchlaufen lässt, so erhält man nach Ausführung der Summation in Beziehung auf r die bemerkenswerthe Gleichung:

$$(\mathfrak{H}') \qquad \sum_h \text{sgn.R}\left(\frac{hn}{m}\right) = \frac{1}{m}\sum_h \operatorname{tg}\frac{h\pi}{m}\operatorname{tg}\frac{hn\pi}{m} \qquad \left(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1)\right),$$

welche sich durch die angegebene Herleitung als ein Corollar der Gleichung ($\mathfrak{H}$) erweist

IV.

Für zwei beliebige ungrade Zahlen m, n ohne gemeinsamen Theiler besteht eine Reciprocitäts-Beziehung, welche ebensowohl durch die Formel:

$$(\mathfrak{R}) \qquad \text{sgn.}\prod_h \text{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\prod_k \text{R}\left(\frac{km}{n}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)} \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)\end{pmatrix}$$

als durch die Formel:

$$(\mathfrak{R}') \quad \tfrac{1}{2}\sum_h\left(1-\text{sgn.R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right)+\tfrac{1}{2}\sum_k\left(1-\text{sgn.R}\left(\frac{km}{n}\right)\right)\equiv\tfrac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod 2$$
$$\left(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

dargestellt und auch so ausgedrückt werden kann, dass die Anzahl der negativen Werthe von:

$$\text{sgn.R}\left(\frac{hn}{m}\right),\ \text{sgn.R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad \left(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1);k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

nur im Falle $m \equiv n \equiv -1 \pmod 4$ ungrade, sonst aber stets grade ist. Diese Reciprocitäts-Beziehung soll hier auf drei verschiedene Weisen aus den im Art. III angegebenen Eigenschaften der Reste reeller Grössen hergeleitet werden.

Erstens folgt aus der Gleichung ($\mathfrak{E}$) des Art. II, wenn darin $a = \frac{hn}{m}$ gesetzt und die Multiplication bis $g = n-1$ erstreckt wird:

$$\text{sgn.R}\left(\frac{hn}{m}\right) = \text{sgn.}\prod_g\left(\tfrac{1}{2}g - \frac{hn}{m}\right) \qquad (g=1,2,\ldots n-1).$$

Digitized by Google

Werden nun rechts die graden und die ungraden Werthe von g gesondert und die einen mit $2k$, die anderen mit $n - 2k$ bezeichnet, so kommt:

$$\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) = \operatorname{sgn.} \prod_k \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right).$$

Ebenso wird:

$$\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) = \operatorname{sgn.} \prod_h \left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right)\left(\frac{k}{n} + \frac{h}{m} - \frac{1}{2}\right) \qquad \left(h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1)\right),$$

und mit Hülfe dieser Ausdrücke für $\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$ und $\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$ lässt sich die Formel (ℜ) unmittelbar erschliessen.

Zweitens folgt aus den Gleichungen (𝔇) des Art. II, dass:

$$\sum_g \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{g}{m}\right) \mathrm{R}\left(\frac{g}{n}\right) = 0 \qquad \left(g = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(mn-1)\right)$$

ist. Denn wenn man die Summation auf alle mn Werthe von $g = -\frac{1}{2}(mn-1)$ bis $g = \frac{1}{2}(mn-1)$ erstreckt, so verdoppelt sich der Werth der Summe; da aber dann g die sämmtlichen Werthe eines Restensystems *modulo* mn durchläuft, so kann

$$g = hn + km \qquad \left(h = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \tfrac{1}{2}(m-1);\ k = \pm 1, \pm 2, \pm \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

genommen werden, und jene Summe wird dann gleich dem Product von zwei Summen:

$$\sum_h \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) \sum_k \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$$
$$\left(h = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \tfrac{1}{2}(m-1);\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \tfrac{1}{2}(n-1)\right),$$

deren jede offenbar gleich Null ist.

Ebenso folgt ferner aus den Gleichungen (𝔇) des Art. II, dass:

$$\sum_g \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{g}{m}\right) = \tfrac{1}{2}(m-1) \qquad \left(g = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(mn-1)\right)$$

ist. Denn für die ersten $\frac{1}{2}(m-1)$ Werthe von g ist $\mathrm{R}\left(\frac{g}{m}\right)$ offenbar positiv, während für je zwei von den folgenden, $\frac{1}{2}(m+1) + r$ und $\frac{1}{2}(mn-1) - r$,

$$\mathrm{R}\left(\frac{m+1+2r}{2m}\right) + \mathrm{R}\left(\frac{mn-1-2r}{2m}\right) = \mathrm{R}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1+2r}{2m}\right) + \mathrm{R}\left(-\tfrac{1}{2} - \frac{1+2r}{2m}\right) = 0$$

wird. Ebenso ist natürlich:

Digitized by Google

$$\sum_g \operatorname{sgn.R}\left(\frac{g}{n}\right) = \tfrac{1}{2}(n-1) \qquad \left(g = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(mn-1)\right),$$

und also:

$$\sum_g \left(1 - \operatorname{sgn.R}\left(\frac{g}{m}\right)\right)\left(1 - \operatorname{sgn.R}\left(\frac{g}{n}\right)\right) = \tfrac{1}{2}(mn-1) - \tfrac{1}{2}(m-1) - \tfrac{1}{2}(n-1) = \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)$$

$$\left(g = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(mn-1)\right).$$

Jedes derjenigen Glieder der Summe auf der linken Seite, für welches g nicht durch m oder n theilbar ist, hat entweder den Werth *Vier* oder den Werth *Null*. Lässt man alle diese Glieder weg, so bleiben nur diejenigen übrig, für welche:

$$g = hn \text{ oder } g = km \qquad \left(h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

ist, und es resultirt daher die mit der Formel ($\mathfrak{R}'$) gleichbedeutende Congruenz:

$$\sum_h \left(1 - \operatorname{sgn.R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right) + \sum_k \left(1 - \operatorname{sgn.R}\left(\frac{km}{n}\right)\right) \equiv \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1) \pmod 4.$$

Drittens lässt sich mit Hülfe der Gleichungen ($\mathfrak{E}$) und ($\mathfrak{F}$) des Art. II darthun, dass die Anzahl der negativen Werthe von:

$$\operatorname{sgn.R}\left(\frac{hn}{m}\right),\ \operatorname{sgn.R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad \left(h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

nur für $m \equiv n \equiv -1 \pmod 4$ ungrade, sonst aber stets grade ist.

Wird nämlich, unter der von nun an zu machenden Voraussetzung: $m < n$, in der Gleichung ($\mathfrak{E}$):

$$a = \frac{km}{n},\ b = \frac{k'm}{n},\ c = \tfrac{1}{2} - \frac{\varepsilon m}{2n} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

gesetzt, und wird hierbei für k irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)$, wofür:

$$\operatorname{R}\left(\frac{km}{n}\right) < \frac{(\varepsilon - 1)m}{4n}$$

ist, und alsdann für k' die durch die Gleichung:

$$k + k' = \tfrac{1}{2}(n + \varepsilon)$$

mit k verbundene Zahl genommen, so kommt:

($\mathfrak{E}'$) $$\operatorname{R}\left(\frac{km}{n}\right) + \operatorname{R}\left(\frac{k'm}{n}\right) - \frac{\varepsilon m}{2n} + \tfrac{1}{2} = 0.$$

Wird ferner in der allgemeinen Reciprocitäts-Gleichung ($\mathfrak{F}$) $v = \dfrac{m}{n}$, $w = \dfrac{n}{m}$ gesetzt, so resultirt die speciellere:

Digitized by Google

$$(\mathfrak{F}') \qquad m\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) + n\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) = 0,$$

durch welche mit jeder Zahl $h = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1)$ je eine bestimmte von den Zahlen $k = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1)$ verbunden wird. Aus dieser Reciprocitäts-Gleichung erhellt, dass für je zwei mit einander verbundene Zahlen h, k die Reste: $\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$, $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, und dass die Reste $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$, welche Resten $\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$ entsprechen, alle diejenigen unter den Resten von $\frac{m}{n}, \frac{2m}{n}, \frac{3m}{n}, \ldots \frac{(n-1)m}{2n}$ sind, deren absoluter Werth kleiner als $\frac{m}{2n}$ ist. Jedem solchen positiven Reste $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$ entspricht aber, wie die Gleichung $(\mathfrak{E}')$ für $\varepsilon = +1$ zeigt, je einer der negativen Reste $\mathrm{R}\left(\frac{k'm}{n}\right)$, die kleiner als $-\frac{1}{2} + \frac{m}{2n}$ sind, während alle anderen negativen Reste, die also zwischen 0 und $-\frac{1}{2} + \frac{m}{2n}$ liegen, gemäss eben derselben Gleichung $(\mathfrak{E}')$ für $\varepsilon = +1$ einander paarweise durch die Relation: $k + k' = \frac{1}{2}(n+1)$ zugeordnet werden können. Dabei werden nur in dem Falle, wo k den Werth $\frac{1}{4}(n+1)$ haben kann, zwei einander entsprechende Zahlen k, k' mit einander identisch; und dies tritt nur ein, wenn $\frac{1}{4}(n+1)$ ganz und dabei $\mathrm{R}\left(\frac{m(n+1)}{4n}\right)$ negativ, also auch $m \equiv -1 \pmod 4$ ist. Es zeigt sich also mit Hülfe der Reciprocitäts-Gleichung $(\mathfrak{F}')$ und der Gleichung $(\mathfrak{E}')$ für $\varepsilon = +1$, dass sich je zwei von allen negativen Resten:

$$\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right), \ \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad \left(h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

einander zuordnen lassen, dass dabei nur in dem Falle $m \equiv n \equiv -1 \pmod 4$ der eine negative Rest $\mathrm{R}\left(\frac{m(n+1)}{4n}\right)$ übrig bleibt, und dass also in der That nur in diesem Falle die Anzahl jener negativen Reste ungrade ist.

Eben dasselbe Resultat lässt sich aber auch aus der Reciprocitäts-Gleichung $(\mathfrak{F}')$ in Verbindung mit der Gleichung $(\mathfrak{E}')$ für $\varepsilon = -1$ erschliessen. Denn gemäss der Reciprocitäts-Gleichung $(\mathfrak{F}')$ beträgt die Anzahl aller negativen Reste $\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$ und derjenigen negativen Reste

Digitized by Google

$\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$, deren absoluter Werth kleiner als $\frac{m}{2n}$ ist, zusammen genau $\frac{1}{2}(m-1)$, während je zwei der übrigen negativen Reste $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$ gemäss der Gleichung ($\mathfrak{E}'$) für $\varepsilon = -1$ einander paarweise mittels der Relation: $k + k' = \frac{1}{2}(n-1)$ zugeordnet werden können. Dabei werden nur in dem Falle, wo k den Werth $\frac{1}{4}(n-1)$ haben kann, zwei einander entsprechende Zahlen k, k' mit einander identisch; und dies tritt nur ein, wenn $\frac{1}{4}(n-1)$ ganz und dabei $\mathrm{R}\left(\frac{m(n-1)}{4n}\right)$ negativ, also $m \equiv -1 \pmod 4$ ist. Die Gesammtanzahl der negativen Reste:

$$\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right),\ \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad \left(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

übersteigt also die Zahl $\frac{1}{2}(m-1)$ nur in dem Falle: $m \equiv -n \equiv -1 \pmod 4$ um eine ungrade Zahl, und sie selbst ist daher nur dann ungrade, wenn $m \equiv n \equiv -1 \pmod 4$ ist.

V.

Sind m und n Primzahlen, so ist gemäss dem Gauss'schen Lemma:

$$\operatorname{sgn.}\prod_h \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right),\ \operatorname{sgn.}\prod_k \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right) \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)\end{pmatrix},$$

wo $\left(\frac{n}{m}\right), \left(\frac{m}{n}\right)$ die Legendre'schen Zeichen sind. Die drei Herleitungsweisen der zwischen den Zeichen:

$$\operatorname{sgn.}\prod_h \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right),\ \operatorname{sgn.}\prod_k \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)\end{pmatrix}$$

bestehenden Reciprocitäts-Beziehung, welche im Art. IV auseinandergesetzt worden sind, können darnach als drei verschiedene Beweismethoden des Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste angesehen werden. Doch gehören diese drei Beweismethoden einer und derselben, durch die Anwendung des Gauss'schen Lemma charakterisirten Kategorie von Reciprocitätsgesetz-Beweisen an. Ihre Unterschiede treten in den Entwickelungen des Art. IV deutlich darin hervor, dass in jeder der drei Methoden von anderen Fundamental-Eigenschaften der Reste reeller Grössen Gebrauch gemacht wird.

Die erste, in formaler Hinsicht einfachste, stützt sich nur auf die Gleichung ($\mathfrak{E}$) des Art. II; sie findet sich, wenn auch etwas modi-

Digitized by Google

ficirt, schon in meiner Mittheilung vom 7. Februar v. J.[1] und sie ist als eine Vereinfachung des dritten GAUSS'schen Beweises zu betrachten.[2]

Die zweite ist die sachlich einfachste Beweismethode, weil dabei nur die nächstliegenden, unmittelbar evidenten Eigenschaften der Reste reeller Grössen, nämlich:

$$(\mathfrak{D}) \qquad R(a) = R(a+1),\ R(a) = -R(-a)$$

benutzt werden; sie ist nichts Anderes als der fünfte GAUSS'sche Beweis in einer mit Hülfe des Zeichens R vereinfachten Darstellung.

Die dritte der im Art. IV gegebenen Beweismethoden unterscheidet sich principiell von den beiden ersten dadurch, dass dabei eine zwischen zwei Resten $R\left(\frac{hn}{m}\right)$, $R\left(\frac{km}{n}\right)$ selbst bestehende Reciprocitäts-Gleichung, die Gleichung ($\mathfrak{F}$) des Art. II zu Grunde gelegt wird. Es kommt zwar ausserdem noch die Gleichung ($\mathfrak{E}$) zur Anwendung; aber diese ist von analoger Beschaffenheit wie die bei der zweiten Beweismethode benutzten Gleichungen ($\mathfrak{D}$).

Diese dritte Beweismethode ist nun nichts Anderes als jene ZELLER'sche, welche ich im December 1872 der Akademie mitgetheilt und im betreffenden Monatsbericht veröffentlicht habe; aber sie ist hier im Art. IV unter Anwendung des Zeichens R entwickelt, und es zeigt sich dabei ihr eigentliches Fundament eben darin, dass, wenn $m < n$ angenommen wird, zuvörderst von allen Resten $R\left(\frac{km}{n}\right)$ diejenigen herausgehoben werden, welche mit den verschiedenen Resten $R\left(\frac{hn}{m}\right)$ durch die Reciprocitäts-Gleichung:

$$(\mathfrak{F}') \qquad mR\left(\frac{hn}{m}\right) + nR\left(\frac{km}{n}\right) = 0$$

verbunden sind. Erst dann werden die übrigen Reste $R\left(\frac{km}{n}\right)$ unter einander paarweise verbunden, und es wird deren Grösse und Vorzeichen mit Hülfe der Gleichung ($\mathfrak{E}$) bestimmt.

Auf eben demselben Fundament wie der ZELLER'sche ruht auch der 1879 von Hrn. PETERSEN im zweiten Bande des American Journal of Mathematics S. 285 veröffentlichte Beweis des Reciprocitätsgesetzes, und die wesentliche Übereinstimmung beider Beweise tritt unmittelbar hervor, wenn man in den a. a. O. mit (1), (2) bezeichneten PETERSEN-

[1] Sitzungsberichte 1884. XXIII. S. 522.
[2] Vgl. Sitzungsberichte 1884. XXIX. S. 645.

Digitized by Google

schen Gleichungen die Zahlen a, b beziehungsweise durch p, q und ferner:

	m,	n,	r,
in (1) durch:	$-h+\frac{1}{2}(p+\text{sgn.}r)$,	$-k+\frac{1}{2}(q-1)$,	$2r-q\,\text{sgn.}r$
in (2) durch:	h,	$k-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{sgn.}r$,	$-2r+p\,\text{sgn.}r$

ersetzt. Alsdann werden nämlich die beiden Petersen'schen Gleichungen mit der Gleichung: $hq-kp=r$, von welcher die Zeller'sche Entwickelung ausgeht, identisch, und die einzige Modification der von Hrn. Petersen daran geknüpften weiteren Deduction[1] lässt sich dadurch bezeichnen, dass diese zu der oben in der dritten Beweismethode für $\varepsilon=+1$ dargelegten Restgruppirung, die Zeller'sche aber zu derjenigen Gruppirung führt, die dem Werthe $\varepsilon=-1$ entspricht.

Die Zurückführung auf die verschiedenen Fundamental-Eigenschaften der Reste reeller Grössen gewährt also eine neue und vollständige Einsicht in die gegenseitigen Beziehungen der verschiedenen, auf dem Gauss'schen Lemma fussenden Reciprocitätsgesetz-Beweise; und eine solche Aufklärung zu erlangen, war der eigentliche Zweck meiner hier mitgetheilten Untersuchungen.

VI.

Eine Function $\vartheta(m,n)$ zweier positiver oder negativer ungrader Zahlen m, n, die keinen gemeinsamen Theiler haben, wird durch die Bedingungen:

$$(\Omega)\qquad \begin{aligned} &\vartheta(m,n)=\vartheta(m+2n,n)\\ &\vartheta(m,n)=\vartheta(-n,m)\,(-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n+1)-\frac{1}{4}(\text{sgn.}m-1)(\text{sgn.}n+1)}, \end{aligned}$$

abgesehen von einem constanten Factor, vollständig bestimmt. Denn, wenn man, wie im Art. VI meines oben citirten, im Sitzungsbericht vom 1. Mai 1884 abgedruckten Aufsatzes, von zwei (positiven oder negativen) ungraden Zahlen n_0, n_1 ausgehend, eine Reihe von Zahlen $n_0, n_1, n_2, \ldots n_t$ derart bildet, dass zwischen ihnen die Gleichungen:

$$n_0-2r_1n_1+n_2=0,\ n_1-2r_2n_2+n_3=0\ldots\ldots n_{t-2}-2r_{t-1}n_{t-1}+n_t=0$$

bestehen, in denen $r_1, r_2, \ldots r_{t-1}$ positive oder negative ganze Zahlen sind, so ist:

---

[1] Diese weitere Deduction kann übrigens durch die wesentlich einfachere, welche ich in den letzten Zeilen von S. 336 des Monatsberichts von 1876 gegeben habe, ersetzt werden, da die Erklärung des Legendre'schen Zeichens, von welcher Hr. Petersen ausgeht, genau mit der a. a. O. von mir benutzten übereinstimmt.

Digitized by Google

$$\vartheta(-n_{k+1}, n_k) = \vartheta(n_{k-1}, n_k) = (-1)^{\frac{1}{4}\sigma_k}\vartheta(-n_k, n_{k-1}),$$

wenn σ_k die Zahl:

$$(n_{k-1} - 1)(n_k + 1) - (\text{sgn. } n_{k-1} - 1)(\text{sgn. } n_k + 1)$$

bedeutet, und es wird daher $\vartheta(-n_1, n_0)$ gleich $\vartheta(-n_t, n_{t-1})$, multiplicirt mit einer durch die Zahlen n genau bestimmten Potenz von -1. Da ferner, wenn n_0, n_1 als relative Primzahlen vorausgesetzt werden, $n_t = \pm 1$ angenommen werden kann, so folgt aus den Gleichungen (Ω), dass:

$$\vartheta(-n_t, n_{t-1}) = \pm\vartheta(1, 1)$$

wird. Der Quotient:

$$\frac{\vartheta(m, n)}{\vartheta(1, 1)}$$

ist daher durch die Gleichungen (Ω) vollständig bestimmt.

Das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste kann also — und es erscheint mir dies von besonderem Interesse — in der Weise bewiesen werden, dass die Übereinstimmung jenes Quotienten mit dem JACOBI-LEGENDRE'schen Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$ dargethan wird. Hierzu bedarf es einzig und allein des Nachweises, dass für die durch die Gleichungen (Ω) definirte Function $\vartheta(m, n)$ der Multiplicationssatz:

(M) $$\vartheta(l, n)\vartheta(m, n) = \vartheta(lm, n)\vartheta(1, 1)$$

besteht; denn wie mit Benutzung dieses Satzes und der Gleichungen (Ω) gefolgert werden kann, dass in der That:

$$\vartheta(m, n) = \left(\frac{m}{n}\right)\vartheta(1, 1)$$

sein muss, habe ich bereits im §. 3 meines im Monatsbericht vom Juni 1876 abgedruckten Aufsatzes ausführlich entwickelt. Es ist mir aber bis jetzt noch nicht gelungen, den Multiplicationssatz (M) unmittelbar aus den Definitions-Gleichungen (Ω) abzuleiten. Mittelbar ergiebt sich derselbe durch den im Art. IV auf drei verschiedene Arten geführten Nachweis, dass die durch die Gleichung:

$$\vartheta(m, n) = \vartheta(1, 1) \cdot \text{sgn.} \prod_k \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

bestimmte Function ϑ der zweiten der Definitions-Gleichungen (Ω) genügt. Es ist nämlich an sich klar, dass sie auch der ersten genügt, und der Multiplicationssatz folgt dann aus der Relation:

$$\mathrm{R}\left(\frac{lk}{n}\right) \cdot \text{sgn. } \mathrm{R}\left(\frac{mk'}{n}\right) = \mathrm{R}\left(\frac{lmk'}{n}\right) \qquad \left(k, k' = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right),$$

Digitized by Google

welche offenbar besteht, wenn die Zahlen k, k' mit einander durch die Congruenz:

$$mk' \equiv \pm k \pmod{n}$$

verbunden sind.

An Stelle der Gleichungen (Ω) kann man auch diejenigen zu Grunde legen, welche $\log \vartheta(m, n)$ definiren. Man wird alsdann auf die Bestimmung:

$$\log \vartheta(m, n) = \log \vartheta(1, 1) + \tfrac{1}{2}\pi i \sum_{k}^{(k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1))} \left(1 - \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)\right)$$

geführt, da offenbar einer der Werthe von:

$$\log \operatorname{sgn.} \prod_{k} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \text{ oder } \log\left(\frac{m}{n}\right) \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

durch:

$$\tfrac{1}{2}\pi i \sum_{k}^{(k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1))} \left(1 - \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)\right) \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

dargestellt wird, und es mag dabei schliesslich noch die bemerkenswerthe Relation:

$$\frac{2n}{\pi i} \log\left(\frac{m}{n}\right) = \tfrac{1}{2} n(n-1) - \sum_{k}^{(k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1))} \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n} \operatorname{tg}\frac{km\pi}{n}$$

für den Logarithmus des LEGENDRE'schen Zeichens hervorgehoben werden, welche sich aus der Gleichung (Ω′) des Art. III ergiebt.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

Digitized by Google

INHALTSVERZEICHNISS.

Seite

17. Braun: Über die Thermoelektricität geschmolzener Metalle 143
18. Schwendener: Einige Beobachtungen an Milchsaftgefässen (hierzu Taf. I). 153
19. Albrecht: Über die im Laufe der phylogenetischen Entwickelung entstandene, angeborene Spalte des Brustbeinhandgriffes der Brüllaffen 167
20. Rüdorff: Über die Löslichkeit von Salzgemischen 185
21. Müller-Erzbach: Die Dissociation wasserhaltiger Salze und daraus abgeleitete Folgerungen über die Constitution der Salzbestandtheile. 201
22. Kronecker: Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen 209

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE
aus den Jahren 1882, 1883 und 1884.

(In Commission in Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.)

Schrader: Gedächtnissrede auf Justus Olshausen . . . . . M. 1.00
Virchow: Alttrojanische Gräber und Schädel . . . . . " 12.20
Braun: Fragmente einer Monographie der Characeen. Nach den hinterlassenen Manuscripten herausgegeben von Dr. Otto Nordstedt . . . . . " 11.50
Diels: Zur Textgeschichte der Aristotelischen Physik . . . . . " 2.00
Schwendener: Die Schutzscheiden und ihre Verstärkungen. . . . . " 6.00
Zeller: Über Begriff und Begründung der sittlichen Gesetze . . . . . " 1.50
Bernays: Über die unter Philon's Werken stehende Schrift über die Unzerstörbarkeit des Weltalls " 4.00
Bernays: Über die Unzerstörbarkeit des Weltalls. II. . . . . " 4.00
Hagen: Geschwindigkeit des strömenden Wassers in verschiedenen Tiefen, untersucht nach den von Brünnikos ausgeführten Messungen . . . . . " 4.00
Tobler: Die altvenezianische Übersetzung der Sprüche des Dionysius Cato . . . . . " 3.50
Eichler: Beiträge zur Morphologie der Marantaceen . . . . . " 6.30
Kronecker: Über bilineare Formen von vier Variabeln . . . . . " 2.50
Schrader: Zur Frage nach dem Ursprunge der babylonischen Cultur . . . . . " 3.00
Tobler: Über das Buch des Uguçon da Laodho . . . . . " 5.00
Dillmann: Über die Regierung, insbesondere die Kirchenordnung des Königs Zar'a-Jacob . . " 5.00
Imhoof-Blumer: Die Münzen der Dynastie von Pergamon . . . . . " 5.00
Roth: Beiträge zur Petrographie plutonischer Gesteine. IV. . . . . " 7.50
Virchow: Über alte Schädel von Assos und Cypern . . . . . " 5.00
Wiedemann: Über die Bestimmung des Ohm . . . . . " 4.50

Noether: Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Curven . . . . . M. 6.00
Studer: Übersicht über die Ophiuriden, welche während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—1876 gesammelt wurden . . . . . " 3.50
Studer: Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle an der Westküste von Africa, auf Ascension und am Cap der guten Hoffnung gesammelten Crustaceen . . . . . " 2.50
Studer: Über die von S. M. S. Gazelle auf der Reise um die Erde 1874—1876 gesammelten Isopoden . . . . . " 2.50
Marshall: Agilardiella radiata . . . . . " 1.50
Krabbe: Über das Wachsthum des Verdickungsringes und der jungen Holzzellen in seiner Abhängigkeit von Druckwirkungen . . . . . " 4.50
Studer: Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—1876 gesammelten Asteriden und Euryaliden . . . . . " 4.50

Register für die Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie zu Berlin vom Jahre 1874 bis 1881 M. 3.00

Digitized by Google

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im Auszuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden Theil des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus diesen Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der reinen Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschaften in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder ihr fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch demselben Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, Reden und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in Monatsheften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird in der Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften und Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen »Sitzungsberichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zuschicken zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu geben.

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämlich:

die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,

" " " Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,

" " " October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Fertigstellung des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1884 nicht zugekommen sein sollten, werden ersucht, hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamationen nur in Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1885 angebracht werden.

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchhändlerischen Bezuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann) in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungsberichte« oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften von Seiten der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in einzelnen Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten, zuzusenden. Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der genannten Buchhandlung in Verbindung setzen.

Digitized by Google

13.892

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT V.

MAI 1885.

MIT TAFEL II UND III.

BERLIN 1885.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN.

Digitized by Google

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges **beschränkt werden.** Der Satz einer Mittheilung wird erst **begonnen**, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden **Holzschnitte** fertig sind und von besonders beizugebenden **Tafeln** die volle erforderliche Auflage eingeliefert **ist.**

§ 7.

Eine für die **Sitzungsberichte** bestimmte wissenschaftliche Mittheilung **darf in keinem Falle** vor der Ausgabe des betreffenden **Stückes** anderweitig, sei es auch nur auszugsweise **oder auch in weiterer** Ausführung, in deutscher Sprache **veröffentlicht** sein oder werden. Wenn der Verfasser **einer aufgenommenen** wissenschaftlichen Mittheilung **diese anderweit früher** zu veröffentlichen beabsichtigt, **als ihm dies gesetzlich** zusteht, bedarf er dazu der **Einwilligung der Gesammtakademie** oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. **Auswärts werden Correcturen** nur auf besonderes Verlangen **verschickt. Die Verfasser** verzichten damit auf Erscheinen **ihrer Mittheilungen** nach acht Tagen.

§ 9.

1. **Neben der vollständigen** Ausgabe der Sitzungsberichte können **bestimmte Kategorien** wissenschaftlicher Mittheilungen **auch abgesondert** in der Weise publicirt werden, dass **dieselben mit Sondertitel** und fortlaufender Paginirung **versehen und mit** besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel **gebracht** werden.

§ 11.

1. **Jeder Verfasser einer** unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« **abgedruckten** Arbeit erhält unentgeltlich **fünfzig Sonderabdrücke** mit einem Umschlag, auf welchem **der Titel der Arbeit** wiederholt wird.

2. **Dem Verfasser steht frei**, auf seine Kosten weitere gleiche **Separatabdrücke bis zur Zahl** von noch zweihundert zu **unentgeltlicher eigener Vertheilung** abziehen zu lassen, **sofern er hiervon rechtzeitig** dem redigirenden **Secretar Anzeige gemacht hat.**

§ 5.

Den **Bericht über jede** einzelne Sitzung stellt der Secretar **zusammen, welcher** darin den Vorsitz hatte. Derselbe **Secretar führt die Oberaufsicht** über die Redaction und **den Druck der in dem** gleichen Stück erscheinenden **wissenschaftlichen Arbeiten**; in dieser Eigenschaft heisst er **der redigirende Secretar.**

§ 29.

1. **Der redigirende Secretar** ist für den Inhalt des geschäftlichen **Theils der Sitzungsberichte** verantwortlich. **Für alle übrigen Theile** derselben sind nach jeder **Richtung nur die Verfasser** verantwortlich.

Digitized by Google

23. Über eine neue hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function durch die FOURIER'sche Reihe.

Von Dr. O. HÖLDER
in Göttingen.

(Vorgelegt von Hrn. WEIERSTRASS am 23. April: — gedruckt im Bericht vom 7. Mai [St. XXIV]: — ausgegeben am 14. Mai.)

Einer gütigen Mittheilung des Hrn. P. DU BOIS-REYMOND verdanke ich die Kenntniss des nachstehenden, vor Kurzem von Hrn. WEIERSTRASS aufgestellten, aber noch nicht veröffentlichten Satzes, den ich in dieser Abhandlung zu beweisen und zugleich zu erweitern beabsichtige.[1]

»Es sei x eine reelle Veränderliche und $f(x)$ eine in dem Intervalle

$$a \leqq x \leqq b$$

eindeutig definirte und stetige Function derselben. Man denke sich auf der diese Function in der gebräuchlichen Weise darstellenden Curve irgend eine Reihe von Punkten

$$A_1, A_2, \ldots, A_{r+1},$$

deren Abscissen beziehlich mit

$$a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}$$

bezeichnet werden mögen, so angenommen, dass die Differenzen

$$\Delta_1 = a_2 - a_1, \Delta_2 = a_3 - a_2, \ldots, \Delta_r = a_{r+1} - a_r$$

sämmtlich positive Grössen sind. Versteht man dann unter s_p (für $p = 1, 2, \ldots r$) den absoluten Inhalt des Flächensegments, welches von dem zwischen den Punkten A_p, A_{p+1} liegenden Theile der Curve und der zugehörigen Sehne begrenzt wird — wobei zu bemerken ist,

[1] Die Überlegungen, welche mich zu dem in Rede stehenden Satze geführt haben, waren zu der Zeit, wo ich ihn Hrn. P. DU BOIS-REYMOND mittheilte, von mir noch nicht in die Form eines strengen Beweises gebracht worden. Die vorliegende Abhandlung des Hrn. HÖLDER, die einen solchen Beweis und zugleich eine Verallgemeinerung des Satzes enthält, ist bereits vor zwei Jahren geschrieben, und haben nur zufällige Umstände ihre Veröffentlichung bis jetzt verzögert. Sie ist, wie ich ausdrücklich bemerke, eine durchaus selbständige Arbeit. WEIERSTRASS.

Digitized by Google

dass dieses Segment aus einem oder auch aus mehreren, möglicherweise sogar aus unendlich vielen Stücken bestehen kann, von denen aber ein jedes, auf welcher Seite der Sehne A_pA_{p+1} es auch liegen möge, bei der Bestimmung von s_p als positive Grösse in Rechnung gebracht werden muss — so ist s_p das Product aus Δ_p und einer Grösse, die gleichzeitig mit Δ_p unendlich klein wird; es kann aber die Function $f(x)$ so beschaffen sein, dass auch die Summe

$$\sum_{p=1}^{p=r} \frac{s_p}{\Delta_p}$$

sich der Grenze Null nähert, wenn man, die Endpunkte A_1, A_{r+1} festhaltend, die Grössen Δ_p sämmtlich unendlich klein werden lässt. Ist dies der Fall, so wird $f(x)$ für jeden zwischen a und b liegenden Werth von x durch die Fourier'sche Reihe

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x')\,dx' + \frac{2}{b-a}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\int_a^b f(x')\cos\frac{2\nu\pi}{b-a}(x-x')\,dx'$$

dargestellt.«

Bei diesem Satze, der hier so wiedergegeben ist, wie ihn Hr. Weierstrass ausgesprochen hat, ist die Voraussetzung, dass $f(x)$ eine stetige Function sei, eine wesentliche Bedingung. Der analytische Ausdruck der Summe $\sum_p \frac{s_p}{\Delta_p}$ hat aber für jede Punktfolge $A_1, A_2, \ldots$ eine bestimmte Bedeutung, wenn nur die Function $f(x)$ integrirbar vorausgesetzt wird, indem nach der obigen Definition

$$s_p = \int_{a_p}^{a_{p+1}} \mathrm{mod}\left\{ f(x) - f(a_p) - \frac{x-a_p}{a_{p+1}-a_p}\left(f(a_{p+1}) - f(a_p)\right)\right\} dx$$

ist. Ich habe daher untersucht, mit welchen Modificationen sich der in Rede stehende Satz auf nicht durchweg stetige, aber im Riemann-schen Sinne integrirbare Functionen ausdehnen lasse, und bin dabei zu folgenden Resultaten gelangt.

Wenn für eine Function $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit die Grösse $\sum_p \frac{s_p}{\Delta_p}$ unter der Bedingung, dass der ersten und der letzten der Grössen $a_1, a_2, \ldots$ feste Werthe (a', b') beigelegt werden, stets unter einer angebbaren Grenze bleibt, so besitzt sie eine endliche Unbestimmtheitsgrenze für unendlich kleine Δ_p; wird diese beim Zusammenziehen des Intervalls $a' \ldots b'$ auf einen bestimmten, in ihm enthaltenen Punkt x_0 unendlich klein, so convergirt die Reihe

Digitized by Google

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x')\,dx' + \frac{2}{b-a}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\int_a^b f(x')\cos\frac{2\nu\pi}{b-a}(x-x')\,dx'$$

für $x = x_0$, ihre Summe ist gleich $f(x_0)$ und x_0 ist ein Stetigkeitspunkt der Function. Umgekehrt gilt auch, dass die genannte Unbestimmtheitsgrenze verschwindet beim Zusammenziehen des Intervalls $a' \ldots b'$ auf einen Stetigkeitspunkt der Function.

Wenn nun ferner vorausgesetzt wird, dass die Grösse $\sum_p \frac{\delta_p}{\Delta_p}$ stets unter einer angebbaren Grenze bleibe, wie auch die Punkte $a_1, a_2, \ldots$ in dem Intervall $a \ldots b$ angenommen werden, so gelten folgende Sätze:

1. Die Summe der n ersten Glieder der vorstehenden Reihe schwankt für jeden einzelnen Werth von x zwischen endlichen Grenzen, und es existirt jedesmal nur eine endliche Anzahl m_δ von Punkten, für welche die Unbestimmtheitsgrenzen der Reihe von einander und von $f(x)$ um mehr als eine beliebig vorgeschriebene Grösse δ verschieden sind.
2. Die Reihe convergirt für jeden einzelnen Werth von x; für den der $\lim_{\alpha=0} \frac{1}{2}\big(f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\big)$ einen bestimmten, endlichen Werth hat, und ihre Summe ist gleich diesem Grenzwerthe.

Zusatz: Da die Function $f(x)$ integrirbar ist, giebt es in jedem, noch so kleinen Theile der Strecke $a \ldots b$ Stellen, in denen $f(x)$ stetig ist, und es muss in diesen Stellen nach dem zweiten Satz die Reihe gegen den Werth $f(x)$ convergiren.

§. 1.

Es bedeute $\phi(x)$ eine für

$$0 \leqq x \leqq r$$

eindeutig gegebene und im RIEMANN'schen Sinne integrirbare Function, die also auch durchweg unter einer festen Grenze bleibt. Die Grösse

$$\int_a^b \operatorname{mod}\left\{\phi(x) - \phi(a) + \frac{x-a}{b-a}\big(\phi(a)-\phi(b)\big)\right\} dx$$

werde mit $H(a, b)$ bezeichnet. Nun wähle man eine Folge von Werthen $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ der Zahl wie der Lage nach in willkürlicher Weise, nur so dass

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < r$$

ist, und bilde

Digitized by Google

$$\frac{1}{a_1} H(0, a_1) + \frac{1}{a_2 - a_1} H(a_1, a_2) + \ldots + \frac{1}{r - a_{n-1}} H(a_{n-1}, r) = T.$$

Die Gesammtheit derjenigen Grössen T, für welche das grösste Intervall der Theilung, aus welcher sie hervorgingen, nicht grösser als δ ist, werde mit G_δ bezeichnet. Alsdann ist $G_{\delta'}$ in G_δ enthalten, wenn $\delta' < \delta$ ist. Wenn die in G_δ enthaltenen Werthe sämmtlich unter einer endlichen Grenze liegen, so gilt dies von selbst auch von $G_{\delta'}$, wenn $\delta' < \delta$; man überzeugt sich aber auch leicht davon, dass in diesem Fall überhaupt alle T unter einer endlichen Grenze liegen. Diese letztere Voraussetzung möge nunmehr über das Verhalten von $\phi(x)$ auf der Strecke $0 \ldots r$ gemacht werden. Bedeutet nun J_δ die obere Grenze der in G_δ enthaltenen Grössen, so ist $J_{\delta'} \leq J_\delta$, wenn $\delta' < \delta$. Die Grösse $\lim_{\delta=\infty} J_\delta$ ist also vollkommen bestimmt; dies ist die obere Unbestimmtheitsgrenze der T für Theilungen in unendlich kleine Intervalle. Was hier von der Strecke $0 \ldots r$ gesagt wurde, in der $\phi(x)$ als gegeben vorausgesetzt wird, gilt auch von jeder kleineren $0 \ldots v$. Setzt man nun für diese Strecke $0 \ldots v$

$$\lim_{\delta=0} J_\delta = E(v),$$

so ist $E(v)$ eine nie negative, für $0 < v \leq r$ eindeutig bestimmte Function, die mit abnehmendem v nicht zunehmen kann; indem nämlich die Theilungen beliebig gemacht werden dürfen, kann jede Theilung von $0 \ldots v'$ zu einer Theilung von $0 \ldots v$ $(v > v')$ ergänzt werden, wodurch zu T einige nicht negative Glieder hinzutreten. Die Grösse

$$\lim_{v=0} E(v) = \sigma$$

ist also bestimmt, und diese ist es nun, auf welche es im Folgenden ankommt.

Im Vorhergehenden wurde die Strecke allemal als fest betrachtet, während man die Intervalle der Theilung unendlich klein werden liess. Indem aber die Theilungen beliebig gemacht werden dürfen, hält es nicht schwer, sich von der Richtigkeit der folgenden Bemerkung zu überzeugen, die uns nachher nützlich sein wird. Wenn b und d zwei positive Grössen bedeuten, wobei $b \geq d$ vorausgesetzt wird, und n die kleinste ganze Zahl ist, wofür $nd \geq b$, so wird

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{1}{d} H\big(\nu d, (\nu + 1) d\big) < \bar{\sigma}$$

sein, nachdem $\bar{\sigma} > \sigma$ gewählt und dazu eine passende obere Grenze für b bestimmt worden ist.

Digitized by Google

§. 2.

Zwischen der Grösse σ und dem Sprung, den ϕ möglicherweise im Nullpunkt besitzt, besteht nun ein Zusammenhang. Versteht man unter $U(v)$ die untere, unter $O(v)$ die obere Grenze von $\phi(x)$ für

$$0 \leqq x \leqq v,$$

und setzt man

$$\lim_{v=0} U(v) = U_0, \quad \lim_{v=0} O(v) = O_0,$$

so gilt

$$O_0 - U_0 \leqq 4\sigma.$$

Beweis: Man wähle eine Grösse $\bar{\sigma} > \sigma$, so nahe bei σ als man will. Alsdann fixire man r so, dass $E(r) < \bar{\sigma}$ ist. Indem nun $E(r)$ die obere Unbestimmtheitsgrenze der zur Strecke $0 \ldots v$ gehörigen T ist, muss es möglich sein, ρ so zu bestimmen, dass $T < \bar{\sigma}$ für alle Theilungen von $0 \ldots r$, deren Intervalle sämmtlich $\leqq \rho$ sind. Also ist auch

$$\frac{1}{w} H(u, u+w) < \bar{\sigma},$$

wenn

$$0 \leqq u < u + w \leqq v$$

und zugleich $w \leqq \rho$ ist. Es ist desshalb auch

$$\frac{1}{\rho - \xi} \operatorname{mod} \int_{\xi}^{\rho} \left\{ \phi(x) - \phi(\xi) + \frac{x-\xi}{\rho-\xi} \big(\phi(\xi) - \phi(\rho)\big) \right\} dx < \bar{\sigma},$$

für $0 \leqq \xi < \rho$; d. h. es ist

$$\int_{\xi}^{\rho} \left\{ \phi(x) - \phi(\xi) + \frac{x-\xi}{\rho-\xi} \big(\phi(\xi) - \phi(\rho)\big) \right\} dx = (\rho - \xi)\, \Theta(\rho, \xi),$$

wo

$$\operatorname{mod} \Theta(\rho, \xi) < \bar{\sigma}.$$

Hieraus folgt, dass

$$\int_{0}^{\rho} \left\{ \phi(x) - \phi(\xi) + \frac{x}{\rho} \big(\phi(\xi) - \phi(\rho)\big) \right\} dx = \rho \Theta(\rho, \xi) + \varepsilon,$$

wofern ε eine Grösse bedeutet, die bei festgehaltenem ρ mit ξ unendlich klein wird. In der letzten Gleichung denke man sich nun η statt ξ gesetzt und subtrahire die so neu erhaltene Gleichung von der ursprünglichen, so kommt

$$\int_{0}^{\rho} \{\phi(\eta) - \phi(\xi)\} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right) dx = \rho \{\Theta(\rho, \xi) - \Theta(\rho, \eta)\} + \varepsilon,$$

d. h.

$$\phi(\eta) - \phi(\xi) = 2\{\Theta(\rho, \xi) - \Theta(\rho, \eta)\} + \varepsilon,$$

Digitized by Google

wo ε bei festgehaltenem ρ verschwindet, wenn ξ und η beide verschwinden. Also ist

$$O_0 - U_0 \leqq 4\bar{\sigma},$$

und da $\bar{\sigma}$ so nahe, als man wollte, bei σ angenommen werden konnte:

$$O_0 - U_0 \leqq 4\sigma.$$

Kennt man also σ, so kennt man auch eine Grenze für $O_0 - U_0$. Es gilt aber auch das Umgekehrte; es ist nämlich

$$\sigma \leqq \tfrac{3}{2}(O_0 - U_0).$$

Beweis: Zunächst ist leicht zu sehen, dass $\frac{2}{3}\frac{H(a,b)}{b-a}$ nicht grösser ist als die Differenz zwischen der oberen und unteren Grenze von $\phi(x)$ für $a \leqq x \leqq b$. Wählt man also $w > O_0 - U_0$, so kann für a_1 eine obere Grenze so bestimmt werden, dass $\frac{1}{a_1} H(o, a_1) < \frac{3}{2} w$ ist. $E(r)$ ist die obere Unbestimmtheitsgrenze der für die Strecke $o \ldots r$ berechneten Grössen T für unendlich kleine Intervalle. Hieraus folgt zweierlei:

Erstens: Wählt man $l > E(r)$, so kann man ρ so bestimmen, dass $T < l$ ist für alle diejenigen Theilungen von $o \ldots r$, deren sämmtliche Intervalle $\leqq \rho$ sind.

Zweitens: Wählt man $l' < E(r)$, so giebt es auch Theilungen mit beliebig kleinen Intervallen, für welche $T > l'$ ist.

Nun sei $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ eine bestimmte Punktfolge, bei der alle Intervalle $\leqq \rho$ sind, und für welche

$$[1] \quad l' < T = \frac{1}{a_1} H(o, a_1) + \frac{1}{a_2 - a_1} H(a_1 - a_2) + \ldots + \frac{1}{r - a_{n-1}} H(a_{n-1}, r),$$

und

$$[2] \quad \frac{1}{a_1} H(o, a_1) < \tfrac{3}{2} w$$

ist. Nun folgt aus [1] und [2]:

$$[3] \quad \frac{1}{a_2 - a_1} H(a_1, a_2) + \frac{1}{a_3 - a_2} H(a_2, a_3) + \ldots + \frac{1}{r - a_{n-1}} H(a_{n-1}, r) > l' - \tfrac{3}{2} w.$$

Theilt man nun noch das Intervall $o \ldots a_1$ in eine beliebige Zahl p von Theilen durch die Punktfolge $b_1, b_2, \ldots b_{p-1}$, so ist

$$[4] \quad \left(\frac{1}{b_1} H(o, b_1) + \frac{1}{b_2 - b_1} H(b_1, b_2) + \ldots + \frac{1}{a_1 - b_{p-1}} H(b_{p-1}, a_1)\right) + \left(\frac{1}{a_2 - a_1} H(a_1, a_2) + \frac{1}{a_3 - a_2} H(a_2, a_3) + \ldots + \frac{1}{r - a_{n-1}} H(a_{n-1}, r)\right) < l.$$

Digitized by Google

Aus [3] und [4] folgt

$$\frac{1}{b_1} H(0, b_1) + \frac{1}{b_2 - b_1} H(b_1, b_2) + \ldots + \frac{1}{a_1 - b_{p-1}} H(b_{p-1}, a_1) < l - l' + \tfrac{3}{2} w,$$

also, da die Punktfolge $b_1, b_2, \ldots b_{p-1}$ willkürlich war,

$$E(a_1) \leqq l - l' + \tfrac{3}{2} w.$$

Nun konnte man aber die positiven Differenzen

$$l - E(r), \quad E(r) - l', \quad w - (O_0 - U_0)$$

anfänglich so klein wählen, als man wollte; d. h. durch passende Wahl von a_1 kann $\frac{2}{3} E(a_1)$ kleiner gemacht werden als irgend eine vorgeschriebene Grösse $> O_0 - U_0$. Mit abnehmendem r nimmt $E(r)$ nie zu, also ist

$$\sigma = \lim_{r = 0} E(r) \leqq \tfrac{3}{2} (O_0 - U_0).$$

§. 3.

Es handelt sich nun darum, was aus dem Integral

$$\int_0^a \phi(\alpha) \frac{\sin(h\alpha)}{\alpha} d\alpha$$

wird, wenn die positive Grösse h ohne Ende wächst. a bedeutet einen unveränderlichen positiven Werth. Man wähle zunächst zwei positive Grössen b und h so, dass $\frac{2\pi}{h} < b < a$; b und $\frac{1}{h}$ denke man sich sehr klein und zwar $\frac{1}{h}$ klein gegen b. Es sei ferner n die kleinste ganze Zahl, wofür $\frac{2\pi n}{h} \geqq b$ ist, und man setze $a_\nu = \frac{2\pi\nu}{h}$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots n$. Versteht man nun unter y die Function $\phi(\alpha)$ und unter z diejenige von 0 bis a_n stetige Function von α, die zwischen a_ν und $a_{\nu+1}$ dargestellt ist durch

$$\phi(a_\nu) + \frac{\alpha - a_\nu}{a_{\nu+1} - a_\nu} \left(\phi(a_{\nu+1}) - \phi(a_\nu)\right),$$

so wird

$$\int_0^a \phi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha} d\alpha = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} z \frac{\sin h\alpha}{\alpha} d\alpha + \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} (y - z) \frac{\sin h\alpha}{\alpha} d\alpha + \int_{a_n}^{a} \phi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Von dem letzten Integral rechts gilt, dass es bei festgehaltenem b mit unendlich grossem h unendlich klein wird. Weil nun ferner

Digitized by Google

mod $\frac{\sin h\alpha}{\alpha} \leqq h$ ist, so gilt die Ungleichung

$$\text{mod} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} (y-z)\frac{\sin ha}{\alpha}\, d\alpha \leqq h \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \text{mod}\,(y-z)\, d\alpha = H(a_\nu, a_{\nu+1}).$$

Also kann man setzen:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} (y-z)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\, d\alpha = 2\pi\Theta \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{1}{\frac{2\pi}{h}} H\left(\frac{2\pi\nu}{h}, \frac{2\pi(\nu+1)}{h}\right),$$

wobei mod $\Theta \leqq 1$ ist.

§. 4.

Es bleibt noch $\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} z \frac{\sin h\alpha}{\alpha}\, d\alpha$ zu untersuchen übrig. Für $a_\nu \leqq \alpha \leqq a_{\nu+1}$ ist

$$z = \phi(a_\nu) + \frac{\alpha - a_\nu}{a_{\nu+1} - a_\nu}\left(\phi(a_{\nu+1}) - \phi(a_\nu)\right),$$

d. h.

$$z = \frac{a_{\nu+1}\phi(a_\nu) - a_\nu \phi(a_{\nu+1})}{a_{\nu+1} - a_\nu} + \frac{\alpha}{a_{\nu+1} - a_\nu}\left(\phi(a_{\nu+1}) - \phi(a_\nu)\right);$$

somit

$$\int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} z \frac{\sin h\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{a_{\nu+1}\phi(a_\nu) - a_\nu\phi(a_{\nu+1})}{a_{\nu+1} - a_\nu} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \frac{\sin h\alpha}{\alpha}\, d\alpha + \frac{\phi(a_{\nu+1}) - \phi(a_\nu)}{a_{\nu+1} - a_\nu} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \sin h\alpha\, d\alpha.$$

Der zweite Theil ist null, weil $a_\nu = \frac{2\pi\nu}{h}$; man erhält desshalb

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} z \frac{\sin h\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{a_{\nu+1}\phi(a_\nu) - a_\nu\phi(a_{\nu+1})}{a_{\nu+1} - a_\nu} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \frac{\sin h\alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

Die Grösse

$$\int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \frac{\sin h\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \int_{2\pi\nu}^{2\pi(\nu+1)} \frac{\sin\beta}{\beta}\, d\beta$$

ist von h unabhängig; sie möge mit R_ν bezeichnet werden. Die R_ν sind alle positiv, und zwar ist in der Reihe der Grössen

$$1R_0, 2R_1, 3R_2, 4R_3, \ldots$$

Digitized by Google

jede folgende kleiner als die vorhergehende. Zum Beweis hierfür setze man

$$P_\nu = \int_{2\nu\pi}^{(2\nu+1)\pi} \frac{\sin\beta}{\beta} d\beta \quad , \quad Q_\nu = -\int_{(2\nu+1)\pi}^{2\pi(\nu+1)} \frac{\sin\beta}{\beta} d\beta ,$$

so dass

$$R_\nu = P_\nu - Q_\nu \text{ und } P_\nu > Q_\nu ,$$

und die P_ν und Q_ν aus lauter positiven Elementen bestehen. Die Vergleichung der beiden Integrale

$$P_\nu = \int_{2\nu\pi}^{(2\nu+1)\pi} \frac{\sin\beta}{\beta} d\beta \text{ und } P_{\nu+1} = \int_{2\pi(\nu+1)}^{(2\nu+3)\pi} \frac{\sin\beta}{\beta} d\beta$$

giebt als Verhältniss der entsprechenden Elemente

$$\frac{2\pi(\nu+1)+\gamma}{2\pi\nu+\gamma}, \text{ wobei } 0 \leqq \gamma \leqq \pi.$$

Somit ist

$$P_\nu < \frac{\nu+1}{\nu} P_{\nu+1} \text{ für } \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

und

$$P_\nu > \frac{2\nu+3}{2\nu+1} P_{\nu+1} \text{ für } \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ebenso findet man

$$\begin{aligned} Q_\nu &< \frac{2\nu+3}{2\nu+1} Q_{\nu+1} , \\ Q_\nu &> \frac{\nu+2}{\nu+1} Q_{\nu+1} . \end{aligned} \qquad \text{für } \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Aus der zweiten und dritten dieser vier Relationen erhält man

$$P_\nu - Q_\nu > \frac{2\nu+3}{2\nu+1}(P_{\nu+1} - Q_{\nu+1}),$$

und hieraus

$$(\nu+1) R_\nu > \frac{(\nu+1)(2\nu+3)}{(\nu+2)(2\nu+1)}(\nu+2) R_{\nu+1} > (\nu+2) R_{\nu+1} \text{ für } \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Nun ist gefunden worden

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} z \frac{\sin h\alpha}{\alpha} d\alpha = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{a_{\nu+1}\phi(a_\nu) - a_\nu \phi(a_{\nu+1})}{a_{\nu+1} - a_\nu} R_\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \left\{ \phi(a_\nu) - a_\nu \frac{\phi(a_{\nu+1}) - \phi(a_\nu)}{a_{\nu+1} - a_\nu} \right\} R_\nu .$$

Digitized by Google

Weil aber $a_{\nu+1} - a_\nu = \frac{2\pi}{h} = \frac{a_\nu}{\nu}$ ist, so wird dies zu

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \phi(a_\nu) R_\nu + \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \big(\phi(a_{\nu+1}) - \phi(a_\nu)\big) R_\nu - \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (\nu+1) R_\nu \{\phi(a_{\nu+1}) - \phi(a_\nu)\}.$$

Die R_ν sind alle positiv; man erhält also

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \phi(a_\nu) R_\nu = [\phi] \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} R_\nu = [\phi] \int_0^{2\pi n} \frac{\sin\beta}{\beta} d\beta,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \big(\phi(a_{\nu+1}) - \phi(a_\nu)\big) R_\nu = \Theta' \cdot S \int_0^{2\pi n} \frac{\sin\beta}{\beta} d\beta,$$

wobei

$$\mod \Theta' \leqq 1;$$

$[\phi]$ bedeutet einen Mittelwerth von

$$\phi(0),\ \phi\left(\frac{2\pi}{h}\right),\ \phi\left(\frac{4\pi}{h}\right),\ \phi\left(\frac{6\pi}{h}\right),\ \ldots\ \phi\left(\frac{2\pi n}{h}\right),$$

und S den absoluten Betrag der grössten Differenz zweier Werthe der letzteren Reihe. Die dritte Summe $\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (\nu+1) R_\nu \{\phi(a_{\nu+1}) - \phi(a_\nu)\}$ in dem obigen dreigliedrigen Ausdruck wird durch partielle Summation zu

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-2} \{\phi(a_{\nu+1}) - \phi(a_0)\} \{(\nu+1) R_\nu - (\nu+2) R_{\nu+1}\} + n R_{n-1} \big(\phi(a_n) - \phi(a_0)\big).$$

Die Grössen

$$1R_0 - 2R_1,\ 2R_1 - 3R_2,\ \ldots\ldots\ldots (n-1) R_{n-2} - n R_{n-1},\ n R_{n-1}$$

sind alle positiv; ihre Summe ist R_0. Ferner ist

$$\mod \{\phi(a_{\nu+1}) - \phi(a_0)\} \leqq S \text{ für } \nu = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Also kann man setzen

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (\nu+1) R_\nu \{\phi(a_{\nu+1}) - \phi(a_\nu)\} = -\Theta'' \cdot S \cdot R_0 = -\Theta'' \cdot S \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin\beta}{\beta} d\beta,$$

wobei

$$\mod \Theta'' \leqq 1.$$

Im Ganzen erhält man also:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} z \frac{\sin h\alpha}{\alpha} d\alpha = \{[\phi] + \Theta' S\} \int_0^{2\pi n} \frac{\sin\beta}{\beta} d\beta + \Theta'' \cdot S \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin\beta}{\beta} d\beta.$$

Digitized by Google

§. 5.

Die Resultate der beiden vorigen Paragraphen sind zusammengefasst in der Formel:

$$\int_0^a \phi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,d\alpha = [\phi] + \Theta'\cdot S\Big\{\int_0^{2\pi n}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta + \Theta'' S\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta + 2\pi\Theta\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{1}{\frac{2\pi}{h}}H\left(\frac{2\pi\nu}{h},\frac{2\pi(\nu+1)}{h}\right) + \int_{\frac{2\pi n}{h}}^{a}\phi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Wir denken uns zwei Grössen b und h gewählt, b und $\frac{1}{h}$ sehr klein, und $\frac{1}{h}$ sehr klein gegenüber von b. n ist die kleinste ganze Zahl, wofür $\frac{2\pi n}{h} \geqq b$.

Die Grösse $[\phi]$ ist ein mittlerer Werth von

$$\phi(0), \phi\left(\frac{2\pi}{h}\right), \phi\left(\frac{4\pi}{h}\right), \ldots \phi\left(\frac{2n\pi}{h}\right),$$

und S die absolut grösste Differenz zwischen zwei Grössen dieser Reihe. $\Theta, \Theta', \Theta''$ sind so beschaffen, dass ihr absoluter Betrag nicht grösser ist als 1.

Macht man nun über ϕ die im §. 1 ausgesprochene Voraussetzung, dass nämlich die dort mit T bezeichneten Grössen für eine bestimmte kleine Strecke $0 \ldots \varepsilon$ sämmtlich endlich bleiben, so ist die dort eingeführte Grösse σ vollkommen bestimmt. Wählt man nun eine positive Grösse $\bar{\sigma}$, die grösser ist als σ, sonst beliebig, so ist es möglich b so klein zu fixiren, dass für jedes h, wofür $\frac{2\pi}{h} < b$,

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{1}{\frac{2\pi}{h}}H\left(\frac{2\pi\nu}{h},\frac{2\pi(\nu+1)}{h}\right) < \bar{\sigma} \text{ (vergl. §. 1)}$$

und zugleich

$S < 4\bar{\sigma}$ und also auch mod $\big([\phi] - \phi(0)\big) < 4\bar{\sigma}$ (vergl. §. 2).

Indem man nun b festhält, kann man für h eine untere Grenze so festsetzen, dass für alle h, die darüber sind, die Grössen

$$\int_0^{2\pi n}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta - \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \int_{\frac{2\pi n}{h}}^{a}\phi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

Digitized by Google

von beliebig verlangter Kleinheit sind. Auf diese Weise erkennt man aus der Gleichung

$$\int_0^a \phi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \{[\phi] + \Theta'\cdot S\}\int_0^{2\pi n}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta + \Theta''\cdot S\int_0^{2\pi}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta$$
$$+ 2\pi\Theta\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{1}{\frac{2\pi}{h}}\,H\left(\frac{2\pi\nu}{h},\ \frac{2\pi(\nu+1)}{h}\right) + \int_{\frac{2\pi n}{h}}^{a}\phi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

dass das Integral

$$\int_0^a \phi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

für unendlich grosse h endlich bleibt, also für ein unendlich grosses h zwei bestimmte Unbestimmtheitsgrenzen O und U ($U \leqq O$) hat, und dass

$$\frac{\pi}{2}\phi(o) - 8\pi\sigma \leqq U \leqq O \leqq \frac{\pi}{2}\phi(o) + 8\pi\sigma$$

eine giltige algebraische Ungleichung ist. Ist also $\sigma = o$, so hat man

$$\frac{2}{\pi}\lim_{h=\infty}\int_0^a \phi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \phi(o).$$

§. 6.

Vermöge einer aus der Theorie der trigonometrischen Reihen bekannten Umformung ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos\nu(\alpha-x)\cdot d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi-x} f(x+\beta)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}\,d\beta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi+x} f(x-\beta)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}\,d\beta$$

für $-\pi < x < +\pi$. Dies ist bekanntlich unendlich wenig verschieden von

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \tfrac{1}{2}\left(f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\right)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

wenn n unendlich gross ist.

Digitized by Google

Bedeutet also $f(x)$ eine in jedem Punkt gegebene, im RIEMANN-schen Sinne integrirbare Function, welche die Periode 2π hat, so gilt:

Für jeden einzelnen Punkt x, wofür

$$f(x+\alpha)+f(x-\alpha)=\phi(\alpha)$$

als Function von α der Bedingung $\sigma=0$ genügt, ist

$$f(x)=\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\cos\nu(\alpha-x)\,d\alpha\right\}.$$

Die Bedingung $\sigma=0$ bringt mit sich, dass

$$f(x)=\tfrac{1}{2}\lim_{\alpha=0}\{f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\}.$$

Dieses Resultat kann noch in der bekannten Weise verallgemeinert werden, indem man $f(x)$ nicht durchweg endlich annimmt, sondern eine endliche Anzahl von Punkten ausschliesst, wo $f(x)$ unendlich gross wird, doch so, dass $\int \mathrm{mod} f(x)\cdot dx$ endlich bleibt.

Um ein Beispiel für die neue Bedingung zu haben, möge eine Function folgendermassen von $-\pi$ bis $+\pi$ definirt werden:

Man setze

$$u_\nu=e^{-\nu} \text{ für } \nu=1,2,3,\ldots\ldots$$

und bestimme $f(x)$ durch die Gleichungen:

$$f(x)=0 \text{ für } u_1\leqq x\leqq+\pi,$$
$$f(x)=f(u_\nu) \text{ für } u_{\nu+1}<x\leqq u_\nu,$$

wobei

$$f(u_{\nu+1})-f(u_\nu)=\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\log u_\nu)^2}=\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2},\quad \nu=1,2,3,\ldots,$$

ferner

$$f(0)=\frac{\pi^2}{12},$$
$$f(x)=f(-x).$$

Im Punkt 0 ist die in Rede stehende Bedingung erfüllt, wovon man sich leicht überzeugt. Dabei nimmt die Function in Intervall $0\ldots\varepsilon$ sowohl zu als auch ab; die Grösse $\big(f(\varepsilon)-f(0)\big)(\log\varepsilon)^2$ ist für ein unendlich kleines ε bald positiv, bald negativ, zwar endlich aber ohne bestimmte Grenze.

Hr. P. DU BOIS-REYMOND hat eine allgemeine Bedingung aufgestellt[1] dafür, dass $\int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\,\Phi(\alpha, h)$ für ein unendlich grosses h

[1] Comptes rendus, 11. und 18. April 1881.

Digitized by Google

von beliebig verlangter Kleinheit sind. Auf diese Weise erkennt man aus der Gleichung

$$\int_0^a \phi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \{[\phi] + \Theta'\cdot S\}\int_0^{2\pi n}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta + \Theta''\cdot S\int_0^{2\pi}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta$$
$$+ 2\pi\Theta\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{1}{\frac{2\pi}{h}}\,H\left(\frac{2\pi\nu}{h},\ \frac{2\pi(\nu+1)}{h}\right) + \int_{\frac{2\pi n}{h}}^{a}\phi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

dass das Integral

$$\int_0^a \phi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

für unendlich grosse h endlich bleibt, also für ein unendlich grosses h zwei bestimmte Unbestimmtheitsgrenzen O und U ($U \leqq O$) hat, und dass

$$\frac{\pi}{2}\phi(0) - 8\pi\sigma \leqq U \leqq O \leqq \frac{\pi}{2}\phi(0) + 8\pi\sigma$$

eine giltige algebraische Ungleichung ist. Ist also $\sigma = 0$, so hat man

$$\frac{2}{\pi}\lim_{h=\infty}\int_0^a \phi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \phi(0).$$

§. 6.

Vermöge einer aus der Theorie der trigonometrischen Reihen bekannten Umformung ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos\nu(\alpha-x)\cdot d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi-x} f(x+\beta)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}\,d\beta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi+x} f(x-\beta)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}\,d\beta$$

für $-\pi < x < +\pi$. Dies ist bekanntlich unendlich wenig verschieden von

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \tfrac{1}{2}\big(f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\big)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

wenn n unendlich gross ist.

Digitized by Google

Bedeutet als
schen Sinne integr

Für jede

als Fu

$$f(x) = \lim$$

Die Bedingung

Dieses Resulta
werden, inde
eine endliche
gross wird, d

Um ein B
Function folge

Man setze

und bestimme f

$$f =$$
$$f =$$

wobei

$$f(u_{\nu+1}) - f(u_\nu) =$$

ferner

Im Punkt o is
man sich leicht ü
o . . . ε sowohl zu a
ein unendlich klein
ohne bestimmte Gr

Hr. P. du B

gestellt[1] dafür, da

Digitized by Google

gegen $f(0) \cdot \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, \Phi(\alpha, h)$ convergirt. Diese hinreichende Bedingung für die im Nullpunkt stetig vorausgesetzte Function f besteht in der Endlichkeit von

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} d\alpha \bmod \left\{ \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha d\beta\, f(\beta) \right\}$$

für ein unendlich kleines ε. Man findet, dass die hier aufgestellte Function dieser Bedingung genügt, dass also die Gültigkeit der Fourier-schen Formel im Nullpunkt daraus hätte geschlossen werden können.

Dass übrigens die Weierstrass'sche Streckenbedingung, sowie die Verallgemeinerung derselben, die Bedingung $\sigma = 0$, nicht nothwendige Bedingungen sind, lehrt das folgende Beispiel:

Man setze:

$$v_\nu = \frac{1}{\nu},$$

$$\varepsilon_\nu = \frac{v_\nu - v_{\nu+1}}{4} = \frac{1}{4\nu(\nu+1)},$$

und definire $f(x)$ durch die Relationen:

$f(x) = 0$ für $v_1 - \varepsilon_1 \leqq x \leqq +\pi$,
$f(x) = w_\nu$ für $v_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+1} \leqq x \leqq v_\nu - \varepsilon_\nu$, also $w_1 = 0$,

$$f(x) = w_{\nu+1} + \frac{x - v_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+1}}{2\varepsilon_{\nu+1}} (w_\nu - w_{\nu+1}) \text{ für } v_{\nu+1} - \varepsilon_{\nu+1} \leqq x \leqq v_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+1},$$

$$w_{\nu+1} - w_\nu = (-1)^{\nu-1} v_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu},$$

$f(0) = \log nat\, 2$,
$f(x) = f(-x)$,
$f(x + 2\pi) = f(x)$.

ν geht immer von 1, 2, 3, ... bis ins Unendliche. Diese Function ist für die ganze reelle Linie eindeutig bestimmt, endlich und stetig, hat die Periode 2π und wird durch die zugehörige Fourier'sche Reihe in jedem Punkt dargestellt. Das letztere erkennt man bei den Punkten $2\pi n$, n ganz, daran, dass $\frac{f(2\pi n + \varepsilon) - f(2\pi n)}{\varepsilon}$ endlich bleibt für ein unendlich kleines ε, während es bei den übrigen Punkten ohne Weiteres durch die gewöhnlichen Mittel erkannt wird. Setzt man aber

$$f(2\pi n + \alpha) + f(2\pi n - \alpha) = \phi(\alpha),$$

so ergiebt sich, dass die Bedingung $\sigma = 0$ nicht erfüllt ist; die in §. 1 mit $E(v)$ bezeichnete Unbestimmtheitsgrenze existirt nicht, sie ist $+\infty$, wie klein man auch v wählen mag.

Digitized by Google

§. 7.

Wir wenden jetzt die Betrachtungsweise des §. 1 auf die Function $f(x)$ selbst an statt auf die Function $f(x+\alpha)+f(x-\alpha)$ von α. Es werde mit $E(a,b)$ diejenige Grösse bezeichnet, welche in Beziehung auf die Function f und die Strecke $a \ldots b$ genau dieselbe Bedeutung hat wie in §. 1 die Grösse $E(v)$ in Beziehung auf die Function ϕ und die Strecke $o \ldots v$. Damit $E(a,b)$ überhaupt existire, werde vorausgesetzt, dass für eine bestimmte Strecke $r \ldots s$ die Grössen $\sum \frac{s_p}{\Delta_p}$ sämmtlich unter einer endlichen Grenze liegen. Dabei ist s_p durch die Formel

$$\int_{a_p}^{a_{p+1}} \mathrm{mod}\left\{f(x)-f(a_p)+\frac{x-a_p}{a_{p+1}-a_p}\left(f(a_p)-f(a_{p+1})\right)\right\}dx$$

definirt (s. o.). In dieser Strecke $r \ldots s$ mögen alle anderen Strecken, die im Folgenden vorkommen, enthalten sein. Nun sieht man, dass

I. $E(a,b) \geqq E(a',b')$, wenn $a \leqq a' < b' \leqq b$,

ferner

II. $E(a,b) \geqq E(a,a_1)+E(a_1,a_2)+\ldots+E(a_{n-1},b)$,

wenn

$$a < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < b.$$

Die Relation II. gilt mit dem Gleichheitszeichen, wenn $f(x)$ an den Stellen $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ stetig ist; im andern Fall kann auch das Zeichen $>$ auftreten.

Aus I. folgt, dass

$$\lim_{\varepsilon=0\ \tau=0} E(x-\varepsilon, x+\tau) = \chi(x)$$

für ein bestimmtes x zwischen r und s vollkommen bestimmt ist. Die Relation II. giebt zu erkennen, dass in der Strecke $r \ldots s$ nicht mehr als n Punkte vorhanden sein können, in welchen

$$\chi(x) \geqq \frac{E(r,s)}{n}$$

ist. Wenn also eine positive Grösse δ gegeben ist, so findet man nur eine endliche Zahl von Punkten x, in welchen $\chi(x) > \delta$ ist. Für einen Punkt x, wo $\chi(x) = o$ ist, gilt

$$f(x) = f(x+o) = f(x-o),$$

d. h. f ist stetig, und umgekehrt (vergl. §. 2). Man sieht leicht, dass die Function $\phi(\alpha) = f(x+\alpha)+f(x-\alpha)$, wo x fest gedacht ist, auch die Eigenschaft besitzt, dass $\sum \frac{s_p}{\Delta_p}$ endlich ist. Für ϕ ist also im Nullpunkt die Grösse σ definirt (s. §. 1), und es ergiebt sich, dass $\sigma \leqq \chi(x)$ ist. Nach dem Resultat von §. 5 sind aber in einem be-

Digitized by Google

stimmten Punkt x die Differenzen zwischen dem Werth der Function $f(x)$ und den Unbestimmtheitsgrenzen der FOURIER'schen Reihe kleiner als ein bekanntes Vielfaches von σ; es folgt also der in der Einleitung unter 1. gegebene Satz. Ist ferner in einem bestimmten Punkt x der Grenzwerth $\lim_{\alpha=0} \{f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\}$ endlich und bestimmt, so setze man

$$\bar{\phi}(\alpha) = \phi(\alpha) = f(x+\alpha)+f(x-\alpha) \text{ für } \alpha > 0,$$

und

$$\bar{\phi}(0) = \lim_{\alpha=0} \{f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\}.$$

Berechnet man nun für $\bar{\phi}$ die Grösse

$$\frac{1}{a_1}\overline{H}(0, a_1) + \frac{1}{a_2-a_1}\overline{H}(a_1, a_2) + \ldots + \frac{1}{r-a_{n-1}}\overline{H}(a_{n-1}, r),$$

so kann diese sich von der entsprechenden Grösse für ϕ nur im ersten Glied unterscheiden, und dies macht jedenfalls einen Unterschied aus, der kleiner ist, als eine gewisse endliche Grösse; denn wir denken uns die Functionen $f, \phi, \bar{\phi}$ zwischen endlichen Grenzen, sie erfüllen die RIEMANN'sche Integrabilitätsbedingung. Für $\bar{\phi}$ ist also $\sum \frac{s_p}{\Delta_p}$ endlich, d. h. σ ist endlich und bestimmt; da aber $\bar{\phi}$ im Nullpunkt stetig ist, so ist nach §. 2 auch $\sigma = 0$, und somit ist

$$\bar{\phi}(0) = \frac{2}{\pi}\lim_{h=\infty}\int_0^a \bar{\phi}(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha} = \frac{2}{\pi}\lim_{h=\infty}\int_0^a \phi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}.$$

Man hat so den in der Einleitung mit 2. bezeichneten Satz.

Unter die Bedingungen dieses letzten Satzes fallen z. B. diejenigen Functionen, welche Hr. C. JORDAN (Comptes rendus, t. XCII, p. 228) »fonctions à oscillation limitée« genannt und auf die Form einer Differenz zweier nicht abnehmenden Functionen gebracht hat. Bedenkt man nämlich, dass $\frac{2}{3}\frac{1}{b-a}H(a, b)$ nicht grösser ist als die Differenz der oberen und unteren Grenze der Function für $a \leq x \leq b$, so ersieht man sofort, dass für die Functionen mit endlich begrenzter Oscillation $\sum \frac{s_p}{\Delta_p}$ endlich bleibt. Für diese Functionen ist aber auch immer $\lim_{\alpha=0} \{f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\} = f(x+0)+f(x-0)$ endlich und bestimmt. Dieser Fall also, in dem die Convergenz der FOURIER'schen Reihe schon aus dem DIRICHLET'schen Satz folgt, ist in unserem Kriterium mit inbegriffen.

Digitized by Google

24. Über Crustaceen aus dem Tertiär Aegyptens.

Von Fritz Nötling
in Königsberg i. Pr.

(Vorgelegt von Hrn. Beyrich am 21. Mai; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXVI]; ausgegeben am 4. Juni.)

Hierzu Taf. III.

Die reichen Sammlungen, welche dem mineralogischen Museum der Berliner Universität durch Hrn. Prof. Dr. Schweinfurth aus den Kreide- und Tertiär-Ablagerungen Aegyptens zugegangen sind, enthalten auch aus verschiedenen Horizonten der letzteren eine interessante Crustaceen-Fauna, deren Untersuchung die Beziehungen festzustellen gestattet, welche zwischen ihr und den gleichaltrigen Faunen des europäischen Eocän und Oligocän bestehen. Namentlich kommt hier in Betracht die von Bittner monographisch dargestellte Brachyuren-Fauna des vicentinischen Tertiärs,[1] sowie diejenigen der nördlichen Alpen, Englands und des Samlandes, welch' letztere zugleich mit der Beschreibung der sie begleitenden Thierreste demnächst an anderem Orte veröffentlicht werden wird.

Die der citirten Abhandlung von Bittner beigegebene Übersicht über die verschiedenen Brachyuren-Faunen ergiebt, dass aus Aegypten bisher eine Art von *Ranina*, eine von *Neptunus* (beide specifisch nicht festgestellt), ferner der durch seine Grösse, seine reiche Sculptur und seine Häufigkeit ausgezeichnete *Lobocarcinus Paulino-Würtembergicus* H. von Meyer und *Palaeocarpilius macrocheilus* Desm. bekannt geworden sind. Dazu kommen einige von Fraas[2] angeführte *Callianassa*-Arten, von denen eine, am Todtenberg von Siūt sehr häufige, unter der Bezeichnung *Callianassa nilotica* als neu eingeführt ist, während zwei andere Arten mit *Callianassa macrodactyla* Milne Edw. und *Callianassa prisca* Milne Edw. identificirt wurden. Auch beschreibt derselbe Autor eine zweite Art von *Lobocarcinus* als *L. Cairensis* vom Bihr el Fachmeh (l. c. p. 155 t. 2 f. 1—3).

[1] A. Bittner. Die Brachyuren des vicentinischen Tertiärgebirges. Denkschr. d. math. naturw. Classe der K. Akad. d. Wiss. Bd. 34. Wien 1875. und: Neue Beiträge zur Kenntniss der Brachyuren-Fauna des Alttertiärs von Vicenza und Versua. Ebenda Bd. 46. Wien 1883.

[2] O. Fraas. Aus dem Orient. I. Stuttgart 1867. S. 114 und 156.

Digitized by Google

Die Lagerstätten der im folgenden aufgezählten Crustaceen sind genauer angezeigt in der Abhandlung von SCHWEINFURTH: Über die geologische Schichtengliederung des Mokattam bei Kairo[1], auf welche hier zu verweisen ist.

1. *Ranina cf. Marestiana* KÖNIG.

Das Fragment eines Fusses zeigt eine Sculptur, welche sehr gut mit derjenigen der *R. Marestiana* übereinstimmt.

Vorkommen: Schicht AAA γ, Loc. XXIX (Ecke Nr. 5 am Südabhang des Mokattam).

Bemerkungen: BITTNER führt in seiner Tabelle unter den Brachyuren Aegyptens eine *Ranina* sp. auf, die vielleicht mit unserem Exemplar ident ist.

2. *Hepatiscus Schweinfurthi* sp. n. Taf. IV, Fig. 1 und 1a.

Der herzförmig gestaltete Cephalothorax besitzt durchschnittlich geringe Grösse; die Länge des am besten erhaltenen Exemplares beträgt 11.5^{mm}, seine grösste Breite zwischen dem dritten, grösseren Dorn des Anterolateralrandes nur wenig mehr, nämlich 12^{mm}. Die anderen Exemplare sind theils etwas grösser ($14.5 : 15^{mm}$), theils etwas kleiner ($9 : 9.5^{mm}$). Die breitlappige Stirn ist vorn schwach gebuchtet, horizontal vorspringend und leicht vertieft. Die kreisrunden Augenhöhlen haben scharfe, leicht aufgeworfene Ränder; am Aussenwinkel befinden sich zwei kleine spitzige Dornen. Der Vorderseitenrand ist flach gekrümmt, rückwärts gewendet und mit sieben spitzen Dörnchen besetzt; von diesen sind die beiden vordersten so klein, dass sie leicht übersehen werden können. Die fünf hinteren, welche in gleichen Abständen aufeinander folgen, nehmen von vorn nach hinten an Grösse ab; der letzte bezeichnet die Grenze zwischen Vorder- und Hinterseitenrand. Der Hinterseitenrand ist gerade, glatt und biegt sich so stark nach Innen, dass der Cephalothorax nach hinten rasch an Breite abnimmt und am Hinterrande nur noch 3.5^{mm} breit ist. Letzterer selbst ist gerade. Die Ecken, in welchen er mit dem Hinterseitenrand zusammenstösst, sind durch zwei stumpfe Dörnchen bezeichnet. Auf der Oberfläche ist nur die vereinigte Gastrocardiacalregion etwas schärfer umschrieben und durch die beiden Branchiocardiacalfurchen gegen die Branchialregion abgesetzt, aber alle Regionen sind mit scharfen, spitzen Tuberkeln, deren man im Ganzen acht

[1] Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft. Bd. 35. 1883. S. 709 ff.

Digitized by Google

zählt, versehen. Die gastrische Region ist flach gewölbt und trägt drei Höcker, von welchen die beiden vorderen, in einer Querlinie stehenden die Protogastralloben bezeichnen, der dritte unpaare steht hinter denselben in der Mitte auf dem mesogastrischen Lobus. Die Cardiacalregion, welche durch eine breite tiefe Einsenkung geschieden ist, trägt nur einen und zwar den grössten Höcker. Die Hepaticalregion ist leicht vertieft, die Branchialloben sind schwach gewölbt und tragen zwei hintereinander liegende Höcker, von welchen der vordere in gleicher Höhe mit dem mesogastrischen, der hintere in gleicher Höhe mit dem cardialen Höcker steht. Sonst ist die Oberfläche, abgesehen von vereinzelten Körnchen, die namentlich am Hinterseitenrand auftreten, glatt.

Vorkommen: In der Schicht AAA_1, Loc. XVIII und in der Schicht AAA γ, Loc. XXIX (Ecke Nr. 5 am Südabhang des Mokattam).

Bemerkungen: Die Gattung *Hepatiscus*, welche bisher nur aus dem oberitalienischen Tertiär bekannt war, hat nun auch einen aegyptischen Vertreter geliefert, der zudem nicht sehr selten ist, da vier Exemplare vorliegen. *Hepatiscus Schweinfurthi* ist dem *Hepatiscus pulchellus* BITTNER sowohl hinsichtlich der äusseren Form als in der Entwickelung der scharfen Tuberkeln auf den Regionen ausserordentlich ähnlich; er unterscheidet sich jedoch durch den mit Dörnchen besetzten Anterolateralrand, der bei *Hepatiscus pulchellus* vollkommen glatt ist.

Palaeocarpilius macrocheilus DESM. sp. Taf. IV, Fig. 2 und 2a.

(Synonyma siehe bei BITTNER. Die Brachyuren des vicentinischen Tertiärgebirges a. a. O. S. 23.)

Der Cephalothorax des einzigen, von SCHWEINFURTH gesammelten, jungen Individuums besitzt bei einer Länge von 21^{mm} eine Breite von 28^{mm}. Das Verhältniss von Länge zu Breite ist also wie 3 : 4. Die Wölbung ist in der Längsrichtung sehr stark, beinahe einen Halbkreis bildend, jedoch ist der Abfall nach vorn, da die Stirn senkrecht nach unten gebogen ist, steiler als nach hinten, wo die Cardiacalregion weniger abschüssig ist als die Stirn; der Punkt der höchsten Wölbung liegt ziemlich genau in der Mitte. In der Querrichtung ist die Wölbung flacher, daher die Krümmungscurve elliptisch. Die Stirn stellt einen breiten (11.5^{mm}), aber kurzen, nach vorn zugespitzten und senkrecht nach unten gebogenen Lappen dar, dessen leicht ausgeschweifte Vorderränder mit einem glatten rundlichen Saume versehen sind. Die Augenhöhlen sind klein, kreisförmig und besitzen einen schwach aufgeworfenen Rand, der die Fortsetzung des Stirnsaumes bis zum äusseren

Digitized by Google

Winkel hin einfasst. Der stark gekrümmte Vorderseitenrand entspricht einem Bogen von etwa 90° und ist durch acht stumpfe Dornen wellig ausgezackt. Die Dornen sind unter sich von gleicher Grösse und stehen in ziemlich gleichen Abständen zwischen dem äusseren Orbitalwinkel, wo sich der erste Dorn findet, bis zur Ecke zwischen Vorder- und Hinterseitenrand, welche durch den letzten Dorn bezeichnet wird. Von diesem aus läuft ein glatter, fast unmerklich nach rückwärts geneigter Kiel in querer Richtung bis etwa zu dem Punkte, wo er eine vom inneren Orbitalwinkel nach der Ecke des Hinterrandes gezogene Linie berühren würde. Der Hinterseitenrand ist glatt, concav und so schräg nach Innen gerichtet, dass der Cephalothorax am geraden, gleichfalls glatten Hinterrande knapp 10^{mm} Breite besitzt. Eine Abgrenzung der einzelnen Regionen fehlt vollkommen, dagegen ist die ganze Oberfläche mit feinen eingestochenen Punkten bedeckt, welche vorn etwas dichter stehen als hinten.

Vorkommen: Sehr selten in der Schicht AAA γ, Loc. XXIX bei Kairo.

Bemerkungen: In allen seinen wesentlichen Charakteren entspricht das hier beschriebene Exemplar vollkommen dem *P. macrocheilus*; es unterscheidet sich aber von den zum Vergleich herangezogenen Stücken, sowie von sämmtlichen mir bekannten Abbildungen durch die bedeutend geringere Grösse. In dieser Hinsicht wäre unser Exemplar etwa mit *P. anodon* Bittner zu vergleichen, der sich jedoch durch den glatten Vorderseitenrand, sowie durch den Mangel eines Querkieles auf der Branchialregion schon auf den ersten Blick unterscheidet. Da verschiedene Grösse bei sonstiger Übereinstimmung der Charaktere nicht als specifisches Unterscheidungsmerkmal gelten kann, so wird das beschriebene Exemplar trotz seiner Kleinheit mit *P. macrocheilus* als jugendliches zu vereinigen sein.

Das Vorkommen dieser Art in Aegypten war schon von Schlotheim bekannt, welcher ein wohlerhaltenes Exemplar seiner Sammlung unter dem Namen *Brachyurites antiquus* »aus Aegypten, in den Bausteinen der Pyramiden gefunden« beschrieben und abgebildet hat.[1] Reuss hat nach Ansicht des Original-Exemplars Zweifel an der Richtigkeit der Fundorts-Angabe ausgesprochen, da die Art daselbst nicht wieder vorgekommen sei.[2] Allein schon Milne Edwards und Fraas[3] haben die Schlotheim'sche Angabe bestätigt. Auch Bittner[4] erwähnt ein

[1] Nachträge zur Petrefactenkunde. Gotha 1822. S. 26 t. 1 f. 1.

[2] Zur Kenntniss fossiler Krabben. Denkschr. der math.-naturw. Classe der Kais. Akademie Wien. Bd. XVII. 1859. S. 35.

[3] Aus dem Orient. I. S. 156.

[4] Neue Beiträge zur Kenntniss der Brachyuren-Fauna des Alttertiärs von Vicenza und Verona. 1883. S. 15.

Digitized by Google

aegyptisches Exemplar, welches in der K. K. geologischen Reichsanstalt zu Wien aufbewahrt wird. Könnten trotzdem noch Zweifel an dem Vorkommen der Art in Aegypten obwalten, so würden diese durch das hier beschriebene Exemplar gehoben sein, dessen Fundort von SCHWEINFURTH genau angegeben ist.

Callianassa nilotica FRAAS Taf. IV, Fig. 3.

1867. *Callianassa nilotica* FRAAS. Aus dem Orient. I. S. 115 t. 2 f. 11.

Die Hand besitzt quadratische Form, da Länge und Höhe fast genau gleich sind. Bei dem abgebildeten Exemplar beträgt die Länge 21, die Höhe ebenfalls 21^{mm}. Vielfach ist namentlich bei kleineren Exemplaren die Länge geringer als die Höhe, und dann besitzt die Hand hochrechteckigen Umriss. Ober- und Unterrand sind gerade und einander parallel. Der Oberrand ist stumpf gerundet, mit einigen undeutlichen Höckerchen besetzt; der Unterrand ist seiner ganzen Länge nach scharf und fein gesägt. Senkrecht zu beiden und mit ihnen abgerundete Ecken bildend läuft der Hinterrand, dessen kurze, aber hohe Gelenkfläche beiderseits durch eine tiefe Furche abgeschnürt ist. Die Aussenfläche ist leicht gewölbt und trägt einige wenige vereinzelte kleine Höcker; die Innenfläche ist gleichfalls, aber weit geringer als erstere, gewölbt und zeigt ebenfalls vereinzelte Körnchen. Die Scheere habe ich bei keinem Exemplare beobachten können, es geht aber aus der Bruchfläche des unbeweglichen Fingers hervor, dass derselbe im Verhältniss zum beweglichen Finger sehr schmal, von aussen nach innen comprimirt und ziemlich stark nach unten gekrümmt war. Das Gelenk für den Daumen ist auf beiden Seiten durch eine tiefe und breite Furche abgeschnürt. Rechte und linke Hand sind nahezu gleich gross.

Vorkommen: Sehr häufig am Todtenberge zu Siūt.

Bemerkungen: *Callianassa nilotica* ist *C. Fraasi* (s. u.) ähnlich; sie unterscheidet sich aber von dieser einmal durch die quadratische oder hochrechteckige Form der Hand, durch die geringe Zahl vereinzelter Höcker, sowie durch die tiefe Furche, welche das Gelenk für den beweglichen Finger abschnürt.

Am Todtenberge zu Siūt scheint *Callianassa nilotica* die herrschende Form zu sein, während die anderen hier beschriebenen Callianassen, wenn sie nicht völlig fehlen, jedenfalls sehr selten sind, da sich unter dem Material vom Todtenberge nur ein Exemplar gefunden hat, das sich vielleicht auf *C. Mokattamensis* beziehen lässt. Im Gegensatz hierzu fehlt den anderen Localitäten *Callianassa nilotica* gänzlich.

Digitized by Google

Callianassa Fraasi sp. n. Taf. IV, Fig. 4—6.

Die Hand besitzt, abgesehen von den Fingern, eine langrechteckige Gestalt, da die Länge die Höhe stets um einige Millimeter übertrifft. Es betragen z. B. die Maasse an einigen Exemplaren von der Loc. XXIX Länge 15, Höhe 12^{mm} (linke Scheere) und Länge 15.5, Höhe 13.5^{mm} (rechte Scheere). Ober- und Unterrand sind gerade und einander parallel. Der Oberrand ist gerundet und in seiner hinteren Hälfte mit einem glatten scharfen Kiele versehen, welcher, vom oberen Einschnitt der Gelenkfläche ausgehend, in einem stumpfen, nach vorn gerichteten Dorn endigt. Weiter nach vorn bis zum Gelenk des Daumens finden sich noch 2 bis 4 (die Zahl wechselt bei den einzelnen Individuen) eben solcher Dornen. Der Unterrand ist zugeschärft und seiner ganzen Länge nach mit einem verhältnissmässig breiten Kiele versehen, der, vom unteren Einschnitt der Gelenkfläche beginnend, bis etwas über die Basis des unbeweglichen Fingers reicht. Auf der Aussenseite ist der Rand des Kieles glatt, und in der ihm parallel laufenden schwachen Furche stehen bis zur Basis des unbeweglichen Fingers etwa zehn Poren. Auf der Innenseite ist der Rand des Kieles dicht mit feinen Körnchen besetzt, welche vom Hinterrand bis etwas über die Basis des unbeweglichen Fingers reichen, wodurch er gesägt erscheint. Zwischen je zwei Körnchen befindet sich eine Pore zur Insertion eines Borstenhaares. Der Hinterrand ist gerade und senkrecht zu Ober- und Unterrand gerichtet; mit letzterem bildet er eine abgerundete, mit ersterem eine scharfe, in einen kleinen Zipfel ausgezogene Ecke. Die Gelenkfläche ist hoch, aber ziemlich kurz und beiderseits durch eine tiefe, breite, gebogene Furche abgeschnürt. Die Aussenfläche ist gewölbt, auf ihrem grösseren oberen Theile glatt, auf einem dreieckigen Felde jedoch, das man sich durch den Unterrand und eine von der Schneide des Daumens zur unteren Ecke des Hinterrandes gezogene Linie begrenzt denken kann, mit regelmässigen runden Körnchen bedeckt, welche ziemlich dicht stehen und von hinten nach vorn an Grösse zunehmen. An der Basis des Index zeichnen sich drei oder vier Körnchen durch etwas bedeutendere Grösse aus; dieselben stehen in einer Linie am hinteren Ende des Kieles, welcher sich auf dem unbeweglichen Finger hin erstreckt. Die Innenfläche ist fast vollkommen eben, die Wölbung sehr unbedeutend. Auch hier finden sich Granulationen; dieselben sind aber etwas kleiner, stehen nicht so dicht gedrängt wie auf der Aussenseite und bedecken daher einen grösseren Raum (ca. $^2/_3$ der Fläche), so dass nur das obere Drittel davon frei ist und glatt bleibt. Die Gelenköffnung für den Daumen ist gross, oval, der Rand ist nicht abgeschnürt, aussen glatt, innen

Digitized by Google

mit Knötchen besetzt. Der Index, welcher beträchtlich schmaler ist, als der Daumen, ist mit der Spitze schwach nach Innen gebogen; seine Aussenfläche ist gewölbt und mit einem stumpfen undeutlichen Kiele versehen. Die Innenseite ist flach. Der Unterrand trägt bis zur Spitze Poren für die Borstenhaare, die Schneide besitzt im hinteren Theile drei bis vier kleine, runde Zähnchen; vorn ist sie bis zur Spitze scharf gekielt. Ausserdem finden sich zerstreut einzelne Poren für Borstenhaare sowohl auf der Aussen- als auf der Innenseite. Den Daumen habe ich nicht untersuchen können, da sich derselbe bei keinem Exemplare in Verbindung mit der Hand vorfindet. Es kommen wohl vereinzelte Finger vor, die aber hinsichtlich ihrer Grösse im Vergleich zu derjenigen der Gelenköffnung kaum als Daumen dieser Art zu deuten sind.

Vorkommen: Sehr häufig in der Schicht AAA γ, bei den Pyramiden (Loc. H. Kuppe südlich von den Clypeasterbänken), ebenfalls sehr häufig in der gleichen Schicht bei Loc. XXIX (Ecke Nr. 5 am Südabhang des Mokattam). Selten in der Schicht AAA 1, Loc. XVIII (Gastropodenbreccie und Carolya-Schicht bei der Mosesquelle), ziemlich häufig in der Schicht AAA β, Loc. VIII.

Bemerkungen: Bei oberflächlicher Betrachtung könnte man die Art mit *Callianassa nilotica* verwechseln, allein sie unterscheidet sich von dieser durch die langrechteckige Gestalt der Hand, die stärkere Wölbung der Aussenfläche, besonders aber durch deren Sculptur, die in der grösseren Zahl dicht gedrängter, auf einen bestimmten Raum beschränkter Granulationen besteht, während dieselben bei *C. nilotica* spärlicher, aber grösser und unregelmässig über die ganze Fläche zerstreut sind. Ausserdem fehlt der *C. Fraasi* die Abschnürung des Gelenkrandes des Daumens, welche *C. nilotica* auszeichnet.

Callianassa Mokattamensis sp. n. Taf. IV, Fig. 7—10.

Callianassa prisca FRAAS a. a. O. I. S. 115 (non MILNE EDWARDS).

Die Hand besitzt lang-rechteckige Form. Das grösste Exemplar besitzt eine Länge von mindestens 20^{mm} und eine Höhe von 17^{mm}, die Durchschnittsgrösse ist 14^{mm}, resp. 11.5^{mm}; doch kommen auch kleinere Stücke vor, die dann etwas schmaler sind. Ober- und Unterrand sind gerade und im Allgemeinen parallel, jedoch convergiren sie, wenn auch nur schwach, bei einzelnen Exemplaren, die sich alsdann nach vorn zuspitzen. Der Oberrand ist spitz gerundet und trägt auf beinahe seiner ganzen Länge einen glatten, scharfen Kiel, an dem auf der Innenfläche zahlreiche Poren zur Insertion von Borstenhaaren

Digitized by Google

stehen. Der scharfe Unterrand ist auf seiner ganzen Länge mit einem Kiele versehen, der auf der Aussenfläche von einer feinen Furche, in der 6 bis 8 Poren liegen, begleitet wird; auf der Innenfläche ist der Kiel mit zahlreichen feinen Knötchen, welche durch Poren getrennt sind, besetzt, und dadurch erscheint er wie gesägt. Der Hinterrand ist gerade und bildet mit Ober- resp. Unterrand scharfe, aber etwas lappig ausgezogene Ecken. Die Gelenkfläche ist sehr hoch, aber kurz, und sowohl innen wie aussen durch eine gebogene tiefe Furche abgegrenzt. Die Aussenfläche ist gleichmässig schwach gewölbt, vollständig glatt, mit Ausnahme des Einschnittes zwischen dem beweglichen und dem unbeweglichen Finger, wo einige spärliche Körnchen stehen. Die Innenfläche ist im oberen Theile sehr leicht gewölbt, im unteren Drittel liegt eine seichte Depression; sie ist auch vollkommen glatt, mit einziger Ausnahme von ein paar Granulationen an der analogen Stelle, wie auf der Aussenfläche. Der Einschnitt zwischen dem beweglichen Finger und dem Index ist schmal und tief. Die Gelenköffnung für den Daumen ist breit oval, der Rand nicht abgeschnürt. Der Index ist schmal, bei keinem der Exemplare aber völlig erhalten. Die rechte und die linke Hand zeigen keine erheblichen Unterschiede.

Vorkommen: Sehr häufig in der Schicht AAA γ, Loc. XXIX (Ecke Nr. 5 am Südabhang des Mokattam); seltener in der gleichen Schicht der Loc. H. bei den Pyramiden (Kuppe südlich von den Clypeasterbänken). Von den übrigen Localitäten ist das Vorkommen zweifelhaft.

Bemerkungen: Im allgemeinen Habitus steht diese Art zwischen der *C. Fraasi* und der *C. Heberti* M. E. Sie unterscheidet sich von ersterer dadurch, dass die Granulationen der Innen- und Aussenfläche nur auf eine ganz kleine Stelle zwischen Index und Daumen beschränkt sind, während dieselben bei der *C. Fraasi* eine bedeutend grössere Fläche einnehmen. Von *C. Heberti* unterscheidet sich *C. Mokattamensis* ebenso durch das Vorhandensein der erwähnten Granulationen, die jener fehlen.

Wahrscheinlich entspricht diejenige Form, welche Fraas[1] als *C. prisca* M. E. gedeutet hat, unserer Art.

Callianassa longa sp. n. Taf. IV, Fig. 11—12.

Callianassa macrodactyta Fraas a. a. O. S. 115 (von Milne Edwards).

Diese Form besitzt die relativ längste und zugleich niedrigste Hand aller aegyptischen Callianassen; es beträgt die Länge des grössten

[1] Aus dem Orient. I. S. 115.

Digitized by Google

Exemplares 16^{mm}, seine Höhe aber nur 10^{mm}; ein anderes misst bei 15.5^{mm} Länge 10^{mm} grösste Höhe; Länge und Höhe verhalten sich also ungefähr wie 3 : 2. Da sich die Höhe nach vorn aber sehr wesentlich verringert (das letztgenannte Exemplar ist am vorderen Ende nur 8^{mm} hoch; bei einem dritten Exemplar beträgt die Höhe hinten 8^{mm} vorn 6.5^{mm}), so besitzt die Hand eine vorn conische Gestalt. Ober- und Unterrand sind gerade, convergiren aber nicht unbeträchtlich nach vorn, beide sind gleichmässig stumpf zugeschärft; der Oberrand ist auf seine ganze Länge hin mit einem glatten Kiele besetzt, während der Kiel des Unterrandes schwach gekerbt erscheint, und sowohl auf der Aussen- als Innenseite von einer Reihe von Poren begleitet wird, deren Anzahl innen gewöhnlich grösser ist als aussen. Durchschnittlich sind 12 bis 18 Poren vorhanden; die Zahl ist nicht genau zu fixiren, da sie von der jeweiligen Grösse abhängig ist. Der gerade Hinterrand stösst mit Ober- resp. Unterrand in rechtwinkelig gerundeter Ecke zusammen; die kurze hohe Gelenkfläche ist durch eine fast halbkreisförmig gebogene Furche abgesetzt. Die Aussenfläche ist stark, die Innenfläche schwach gewölbt, beide aber vollkommen glatt. Daumen und Index sind nur durch eine ganz flache Einsenkung getrennt. Die Gelenköffnung für den Daumen zeigt gerundet-rechteckigen Umriss, der Rand ist nicht abgeschnürt, scharf und trägt zuweilen einige kleine Granulationen. Der Index, welcher stark nach unten gebogen ist, besitzt an seiner Basis auf beiden Seiten längs der Schneide einige wenige Körnchen. Beide Scheeren waren wohl gleich gross.

Vorkommen: Sehr häufig in der Schicht AAA γ, Loc. H. bei den Pyramiden (Kuppe südlich von den Clypeasterbänken); seltener in der gleichen Schicht Loc. XXIX (Ecke Nr. 5 am Südabhang des Mokattam); sehr selten in der Schicht AAA β, Loc. VIII.

Bemerkungen: Diese Art ist ausserordentlich scharf durch die charakteristische tonnenförmige Gestalt der Hand und die ganz glatte Oberfläche von allen übrigen unterschieden. Selbst in Bruchstücken hält es nicht schwer, sie an der starken Verschmälerung nach vorn und den somit convergirenden Rändern von Bruchstücken der *C. Mokattamensis* zu unterscheiden. Hierher gehört wohl auch diejenige Form, welche FRAAS[1] unter dem Namen *Callianassa macrodactyla* M. E. aufführt.

[1] Aus dem Orient. I. S. 115.

Digitized by Google

Callianassa transversoplicata sp. n. Taf. IV, Fig. 13—14.

Die Hand besitzt lang-rechteckige Form, ist aber im Allgemeinen klein. Bei dem abgebildeten Exemplar, einem der grössten, beträgt die Länge 9^{mm}, die Höhe 7^{mm}. Die Mehrzahl der Individuen aber bleibt in ihrer Grösse etwas unter diesen Zahlen. Die Höhe bleibt sich durchschnittlich gleich; bei einigen Exemplaren nimmt sie jedoch nach vorn zu ab, so dass dieselben etwas zugespitzt erscheinen. Ober- und Unterrand sind gerade und einander parallel. Der Oberrand ist breit abgerundet und trägt auf drei Viertel seiner Länge einen glatten scharfen Kiel, welcher vom Hinterrande ausgeht; längs dieses Kieles stehen auf der Aussenfläche bis zu 6 Poren zur Insertion von Borstenhaaren. Der Unterrand ist ebenfalls scharf gekielt, aber der Kiel erstreckt sich hier vom Hinterrande bis auf den unbeweglichen Finger. Auf der Aussenseite läuft dicht neben ihm eine feine, scharf eingerissene Furche, in welcher sich etwa 9 Poren befinden. Auf der Innenseite sind dagegen die Poren zahlreicher (etwa 12 bis 14) und demnach auch dichter gedrängt, so dass der Rand dadurch zuweilen leicht gesägt erscheint. Der Hinterrand ist im Allgemeinen gerade, die Gelenkfläche springt ziemlich stark hervor, ist aber nur seitlich durch eine Furche abgeschnürt, welche in der Mitte verwischt ist. Die untere Ecke des Hinterrandes ist in einen kurzen gerundeten Lappen ausgezogen, die obere einfach rechtwinklig gerundet. Die Aussenfläche ist gewölbt und zwar nach oben etwas steiler. Sehr charakteristisch ist die Sculptur, welche in einer Anzahl unregelmässiger Querrunzeln besteht, die nur auf einen kleinen Theil der Oberfläche beschränkt sind; sie beginnen am Hinterrande, durchqueren aber nicht die ganze Fläche, sondern ober- und unterhalb von ihnen bleibt ein freier, glatter Raum, und ebenso vor ihnen, da sie sich nur auf etwa drei Viertel der Länge erstrecken. Die Innenfläche ist vollkommen glatt, im oberen Theile ziemlich stark gewölbt, im unteren mit einer breiten, ziemlich tiefen Längsdepression versehen, welche vom Hinterrande bis zum unbeweglichen Finger reicht. Den beweglichen Finger habe ich nicht beobachtet; er war wohl ziemlich breit gerundet. Die Gelenköffnung ist durch einen tiefen schmalen Einschnitt gegen den unbeweglichen Finger abgesetzt. Der unbewegliche Finger ist leicht nach oben gekrümmt, auf der Aussenseite leicht gewölbt, auf der Innenseite abgeplattet und mit einem schwachen Längskiel versehen. Die Schneide trägt in der Mitte einen stumpfen Zahn, unterhalb desselben eine Reihe kleiner runder, körnchenartiger Zähne, über ihm ist sie glatt. Ausserdem finden sich auf der Aussen- und Innenseite

Digitized by Google

parallel zur Schneide laufend einige Poren zur Insertion von Borsten. Rechte und linke Hand sind wohl gleich gross gewesen.

Vorkommen: Sehr häufig in der Schicht AAA γ (Ecke Nr. 5 am Südabhang des Mokattam); seltener in der gleichen Schicht Loc. H. (südlich von den Clypeasterbänken bei den Pyramiden); selten in der Schicht AAA 1, Loc. XVIII (Gastropodenbreccie und Carolya-Schicht bei der Mosesquelle); ebenfalls selten in der Schicht AAA β, Loc. VIII.

Bemerkungen: Durch die charakteristische Sculptur der Aussenfläche ist diese Art sehr leicht, selbst in kleinen Fragmenten kenntlich und unterscheidet sich hierdurch von allen übrigen bis jetzt bekannten Arten. Bemerkenswerth ist übrigens die Differenz dieser Sculptur bei Formen verschiedener Schichten. Während die Exemplare der Schichten AAA 1 und AAA γ nicht von einander zu unterscheiden sind, verringert sich bei den Formen aus der Schicht AAA β nicht nur die Zahl der Runzeln, sondern dieselben werden gleichzeitig grösser und gröber. Auch scheinen die Formen der Schicht AAA β durchschnittlich grösser zu sein als die der beiden andern Schichten.

Pagurus (Clibanaria?) dubius sp. n. Taf. IV, Fig. 15.

Ein spitz-conisches Fussglied von 18^{mm} Länge und 10^{mm} grösster Breite wird zur Gattung *Pagurus* zu stellen sein. Die Sculptur (breite, stumpfe, rückwärts gerichtete Dornen, welche in verschiedener Grösse über die Oberfläche zerstreut sind) entspricht ziemlich gut derjenigen von *Clibanaria*, wovon ich mich durch die Untersuchung eines recenten Exemplars überzeugen konnte.

Vorkommen: Sehr selten in der Schicht AAA 1, Loc. XVIII (Gastropodenbreccie und Carolya-Schicht an der Mosesquelle).

Dass mit den oben beschriebenen Resten die Crustaceenfauna des aegyptischen Tertiärs noch keineswegs erschöpft ist, beweisen einige Fragmente, welche zu ungünstig erhalten sind, um eine genauere Untersuchung zu gestatten. Nur so viel hat sich durch den Vergleich mit lebenden Typen, der mir durch Hrn. Dr. HILGENDORF's Freundlichkeit ermöglicht wurde, ergeben, dass alle diese Reste zu der Familie der Cancriden und zwar zu vier verschiedenen Gattungen gehören. Zwei von ihnen fand SCHWEINFURTH an der Loc. XXIX (Ecke Nr. 5 am Südabhang des Mokattam) in der Schicht AAA γ. Die eine ist durch zwei linke, grob-tuberkulirte Scheeren, die andere durch zwei Fragmente eines Brachialgliedes oder einer Hand vertreten,

Digitized by Google

welche eine glatte Oberfläche und am distalen Ende einen scharf abgesetzten, schräg gerichteten Dorn besitzen. — Aus derselben Schicht AAA γ, aber von einer anderen Localität, nämlich von der Kuppe südlich von den Clypeasterbänken (Pyramiden Loc. H) liegt als Vertreter einer dritten Gattung das Fragment einer linken Scheere vor, deren Oberfläche zum Theil mit dicht gedrängten, polygonalen, an ihrer Spitze mit einem kleinen Grübchen versehenen Höckerchen besetzt ist. Eine vierte Gattung endlich ist angedeutet durch das Fragment einer linken Scheere, deren Aussenseite mit mehreren knotigen Kielen versehen ist. Sie wurde zusammen mit der vorletzten Gattung aufgefunden.

Mit Einrechnung dieser vier Cancriden-Gattungen hat das aegyptische Tertiär nunmehr sechzehn Arten geliefert, welche sich auf drei verschiedene Horizonte vertheilen.

Nach den übereinstimmenden Angaben von Fraas[1] und Zittel[2] sind die Schichten des Todtenberges bei Siūt die ältesten im Eocän Aegyptens. In ihnen ist *Callianassa nilotica* sehr häufig und somit charakteristisch. Sie geht, soweit sich bisher feststellen lässt, über dieses Niveau nicht heraus.

Einen etwas jüngeren Horizont nehmen die beiden Arten von *Lobocarcinus* in der von Schweinfurth mit A 1 a bezeichneten Schicht ein, wo sie als einzige Vertreter einer Crustaceen-Fauna auftreten.

In den oberen Mokattam-Schichten AAA 1, AAA β, AAA γ liegt eine durchweg von anderen Arten zusammengesetzte Fauna, zugleich die reichste des untersuchten Gebietes. Sie ist vor Allem ausgezeichnet durch die zahlreichen Individuen von vier *Callianassa*-Arten, sowie durch mehrere noch unbestimmte Cancriden-Gattungen. Neben diesen kommen seltener je eine Art von *Hepatiscus*, *Ranina* und *Pagurus* vor, sowie endlich *Palaeocorpilius macrocheilus* Desm. als die einzige, auch in nicht-aegyptischen Tertiärbildungen aufgefundene und deshalb zum Vergleich mit solchen wichtigste Art.

Nach der Angabe Bittner's[3] und nach Exemplaren, welche in der Berliner Sammlung aufbewahrt werden, kommt diese Art sicher nur im Schichtencomplex von Priabona, also im Ober-Eocän vor, und ein gleiches oder annähernd gleiches Alter wird man daher auch den *Palaeocarpilius*- führenden Schichten des Mokattam zuschreiben dürfen,

---

[1] Fraas. Aus dem Orient. I. S. 114.
[2] Palaeontographica. Bd. 30. I. Abth. S. 110.
[3] Neue Beiträge etc. S. 15.

Digitized by Google

so lange sich nicht durch die bisher noch nicht veröffentlichte Untersuchung der Mollusken-Faunen der oberen Mokattam-Schichten ein widersprechendes Ergebniss herausstellen sollte.

In nachstehender Tabelle ist das Vorkommen in den einzelnen Horizonten zusammengestellt.

	Obere libysche Stufe	Mokattam-Stufe			
		untere	obere		
		A_1a	AAA_1	$AAA\beta$	$AAA\gamma$
Lobocarcinus Paulino-Würtembergicus v. MEYER	—	+	—	—	—
" *Cairensis* FRAAS	—	+	—	—	—
Palaeocarpilius macrocheilus DESM.	—	—	—	—	+
Hepatiscus Schweinfurthi n. sp.	—	—	+	—	+
Ranina cfr. *Marestiana* KÖNIG	—	—	—	—	+
Callianassa Fraasi n. sp.	—	—	+	+	+
" *Mokattamensis* n. sp.	—	—	—	—	+
" *longa* n. sp.	—	—	—	+	+
" *transversoplicata* n. sp.	—	—	+	+	+
" *nilotica* FRAAS	+	—	—	—	—
Pagurus dubius n. sp.	—	—	+	—	—
Cancridarum genus 1	—	—	—	—	+
" " 2	—	—	—	—	+
" " 3	—	—	—	—	+
" " 4	—	—	—	—	+
Neptunus sp.[1]					

[1] Der Horizont, in welchem diese von BITTNER angeführte Art gefunden ist, ist nicht bekannt.

Tafelerklärung.

Fig. 1. *Hepatiscus Schweinfurthi* NÖTLING. Natürliche Grösse.
Fig. 1a. " " " vergrössert, die Stirn nach einem anderen Exemplar ergänzt.
Fig. 2. *Palaeocarpilius machrocheilus* DESM. sp. nat. Gr.
Fig. 2a. " " " Seitenansicht.
Fig. 3. *Callianassa nilotica* FRAAS. Rechte Scheere, Aussenfläche.
Fig. 3a. " " " " " Innenfläche.
Fig. 3b. " " " " " Oberrand.
Fig. 3c. " " " " " Unterrand.

Digitized by Google

Fig. 4. *Callianassa Fraasi* Nötling. Linke Scheere, Aussenfläche.
Fig. 4a. » » » » » Innenfläche.
Fig. 4b. » » » » » Oberrand.
Fig. 5. » » » Rechte Scheere, Aussenfläche.
Fig. 5a. » » » » » Unterrand.
Fig. 6. » » » Linke Scheere ergänzt und stark vergrössert, Aussenfläche.
Fig. 6a. » » » Linke Scheere ergänzt und stark vergrössert. Innenfläche.
Fig. 7. *Callianassa Mokattamensis* Nötling. Rechte Scheere, Aussenfläche.
Fig. 7a. » » » » » Innenfläche.
Fig. 8. » » » » » Oberrand.
Fig. 9. » » » Linke Scheere, Unterrand.
Fig. 10. » » » Rechte Scheere, Aussenfläche ergänzt und stark vergrössert.
Fig. 10a. » » » Rechte Scheere, Innenseite ergänzt und stark vergrössert.
Fig. 11. *Callianassa longa* Nötling. Linke Scheere, Aussenfläche.
Fig. 11a. » » » » » Innenfläche.
Fig. 11b. » » » » » Oberrand.
Fig. 11c. » » » » » Unterrand.
Fig. 12. » » » » » Aussenfläche ergänzt und stark vergrössert.
Fig. 12a. » » » » » Innenfläche ergänzt und stark vergrössert.
Fig. 13. *Callianassa transversoplicata* Nötling. Rechte Scheere, Aussenfläche.
Fig. 13a. » » » » » Innenfläche.
Fig. 13b. » » » » » Oberrand.
Fig. 13c. » » » » » Unterrand.
Fig. 14. » » » » » Aussenfläche vergrössert und ergänzt.
Fig. 14a. » » » Rechte Scheere, Innenfläche vergrössert und ergänzt.
Fig. 15. *Pagurus (Clibanaria?) dubius* Nötling.

Digitized by Google

25. Die Lehre von den Zwangsbewegungen des Frosches.

Von Dr. Is. Steiner
in Heidelberg.

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond am 21. Mai; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXVI]; — ausgegeben am 4. Juni.)

Mit dem Einflusse des Gehirns auf die normalen Bewegungen des Frosches beschäftigt, stiess ich bei den dort auszuführenden Operationen so häufig auf die bekannten Zwangsbewegungen, dass es nothwendig wurde, diesem Gebiete experimentell etwas näher zu treten. Hierbei stellte sich heraus, dass eine ausserordentlich grosse Unsicherheit in den thatsächlichen Angaben herrscht, sowohl über die Localität im Gehirn, deren Verletzung die eine oder die andere Form der Zwangsbewegung erzeugt, als auch über die Richtung, nach welcher die Bewegung stattfindet. So lange diese Punkte aber nicht sichergestellt waren, konnte man niemals zu einer Theorie dieser Bewegungen, welche auch bisher vollkommen fehlt, seine Ansprüche erheben. Das Alles konnte nur durch neue Versuche geleistet werden, in denen besonders darauf Bedacht genommen werden musste, auch die Ursachen der abweichenden Angaben der Autoren aufzudecken.

Bekanntlich kann man drei Formen von Zwangsbewegungen unterscheiden, welche in der That alle bisher beobachteten Zwangsbewegungen umfassen. Diese Formen sind:

1. Die Uhrzeigerbewegung, bei welcher der Frosch sich wie der Zeiger einer Uhr auf dem horizontal liegenden Zifferblatte um eine etwa durch das hintere Ende des Steissbeines gehende verticale Axe bewegt; der Radius des entstehenden Kreises ist gleich der Länge des Froschkörpers.
2. Die Reitbahnbewegung: der Frosch bewegt sich auf der Peripherie eines Kreises, dessen Radius immer grösser ist als die Länge des Froschkörpers.
3. Die Rollbewegung, bei welcher der Frosch um seine Längsaxe rotirt.

Da die Zwangsbewegungen nach asymmetrischer Verletzung des Gehirns auftreten, so habe ich zunächst, um für die ersten Versuche eine feste Basis zu gewinnen, einseitig solche Hirntheile vollständig

Digitized by Google

abgetragen, welche in bestimmte anatomische Linien eingeschlossen waren, also z. B. eine Grosshirnhemisphäre, einen Sehhügel u. s. w. Um endlich an Genauigkeit zu gewinnen, werden alle Operationen durch Abbildungen gekennzeichnet und in allen Fällen ist hinterher der Thatbestand der Operation durch die Section nach Erhärtung des Kopfes in Alkohol verificirt worden.

Die Operationen werden so ausgeführt, dass nach Abtragung des Schädeldaches mit einer passenden Knochenzange die Oberfläche des Gehirns mit einem zarten, in verdünnte Kochsalzlösung getauchten Schwämmchen gesäubert wird. Wenn dies geschehen ist, kann man in völlig klarem Operationsfeld diejenige Stelle genau treffen, welche man zu verwunden resp. abzutragen beabsichtigt.

§. 1. Einseitige Abtragung des Grosshirns.

Diese Operation ist niemals von Zwangsbewegungen begleitet in allgemeiner Übereinstimmung mit den bisherigen Angaben.

§. 2. Einseitige Abtragung der Sehhügel.

Die Fig. 1 zeigt ein Froschhirn von oben, in welchem der abgetragene Hirntheil durch gestrichelte Grenzlinien angegeben ist. Setzt man einen so operirten Frosch auf den Tisch, so beobachtet man zunächst eine grosse Prostration: er sitzt unbeweglich da; oder aber er macht sogleich in vollendetster Weise Uhrzeigerbewegungen, die nach der gesunden Seite gerichtet sind. Welche von den beiden Erscheinungen eintritt, lässt sich in keinem Falle vorhersagen. Wenn der Frosch eine Anzahl solcher Uhrzeigerbewegungen ausgeführt hat, so tritt Ruhe ein: die Uhrzeigerbewegung ist verschwunden. Wenn man ihn kurz darnach mechanisch reizt, so macht er keine Uhrzeigerbewegung, sondern er bewegt sich nach vorwärts, aber mit der Tendenz von der geradlinigen Bewegung abzuweichen und in einem sehr grossen Kreise herumzugehen in der Richtung nach der gesunden Seite hin. Seltener beobachtet man einen dritten Fall, dass nämlich der Frosch unmittelbar nach der Operation sogleich zu der Kreisbewegung übergeht. Überlässt man ihn nun der Ruhe und untersucht ihn nach einigen Stunden, so ist alle abnorme Bewegung verschwunden, er bewegt sich vollkommen geradlinig, höchstens ist eine kleine Abweichung in der Kopfhaltung vorhanden, die nach einiger Zeit auch völlig zurückgeht.

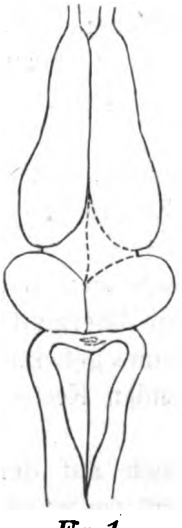


Fig. 1.

Digitized by Google

§. 3. Einseitige Abtragung der Decke der Zweihügel.

Die das Mittelhirn bildenden Zweihügel bestehen aus zwei Theilen, die man als Basis und als Decke unterscheiden kann und die seitlich in einander übergehen. Trägt man allein die Decke ab, ohne die Basis zu schädigen, so treten niemals Zwangsbewegungen ein.

§. 4. Einseitige Abtragung der Basis der Zweihügel.

Die Fig. 2 zeigt die ausgeführte Operation; der abgetragene Hirntheil ist in gestrichelter Linie ausgeführt (man sehe vorläufig von dem mit *a* bezeichneten Hügel ab). Sobald man den so operirten Frosch auf den Tisch gesetzt hat, beginnt er mit grosser Heftigkeit die Reitbahnbewegung und zwar in der Richtung nach der gesunden Seite. Nach einiger Zeit hört die Bewegung offenbar in Folge der Ermüdung auf und nun beobachtet man, dass der Frosch auch eine Zwangsstellung aufweist, die sich wesentlich auf den Kopf bezieht, der nach der gesunden Seite hin etwas gesenkt und zugleich gedreht ist. Wenn man den Frosch nach 24 Stunden aufsucht, während welcher Zeit man ihn durch Isolirung vor jedem äusseren Reize schützt, so findet man ihn vollkommen ruhig und in völlig normaler Haltung. Reizt man ihn aber mechanisch, so beginnt sogleich die Reitbahnbewegung und nach Aufhören derselben findet man auch die Zwangsstellung wieder. Nach weiteren 24 Stunden erscheint Alles wieder normal u. s. w. Auf diese Weise bestehen diese Erscheinungen viele Wochen und Monate bis zum Tode des Thieres.

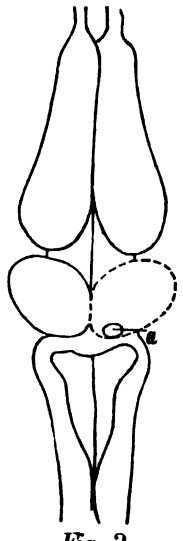


Fig. 2.

Der Reitbahnkreis ist gegenüber jenem nach Abtragung eines Sehhügels klein, aber innerhalb seiner Grösse wieder von sehr verschiedenem Radius, ohne dass sich dafür vorläufig ein plausibler Grund angeben liesse.

Im Wasser macht der Frosch dieselbe Reitbahnbewegung, aber es ist dabei besonders bemerkenswerth, dass er vollkommen coordinirt schwimmt, d. h. genau wie ein normaler Frosch, nur dass er eben von der geraden Linie abweicht.

Die eben beschriebenen Erscheinungen als Folgen der einseitigen Abtragung des Mittelhirns sind völlig constant und ohne Ausnahme — vorausgesetzt allerdings, dass alle Bedingungen eingehalten worden sind, namentlich dass wirklich die eine Seite völlig abgetragen worden ist, was nicht immer so gelingt, wie man es wünscht und, noch viel schlimmer, wie man glaubt es gethan zu haben. Damit hat es folgende Bewandtniss: Unter den in der angegebenen Weise operirten Fröschen

Digitized by Google

findet man nicht selten solche, welche nicht Reitbahnbewegung nach der unverletzten Seite machen, sondern mehr Neigung zur Bewegung nach der verletzten Seite zeigen und hierbei häufig in Rollbewegungen nach der verletzten Seite übergehen. In der folgenden Zwangsstellung findet man auch den Kopf nach der verletzten Seite gesenkt. Das Alles, obgleich man fest überzeugt ist, den Schnitt bis auf den Schädelgrund geführt und den ganzen Lobus der einen Seite abgetragen zu haben. Wenn man nun nach Alkoholerhärtung die Section dieses Kopfes macht, so findet man jedesmal, dass ein kleines Stückchen Gehirn an der Basis stehen geblieben ist. Die Fig. 2 giebt bei *a* schematisch dieses Verhältniss an. Es kann nicht anders sein, als dass das schärfste operirende Messer, statt durchzuschneiden, über die Stelle hinweggleitet.

Man gelangt deshalb zu vollkommen constanten Resultaten nur dann, wenn man eine scharfe Controle über die gesetzte Verletzung führt.

§. 5. Einseitige Abtragung des Kleinhirns.

Wenn man dafür sorgt, dass eben nur das halbe Kleinhirn abgetragen wird ohne Läsion der sehr empfindlichen Nachbarschaft, so folgen darauf keinerlei Bewegungsstörungen.

§. 6. Einseitige Schnitte in das verlängerte Mark.[1]

Um in dieser Gegend genaue Schnitte machen zu können, muss man vor Allem den auf der Rautengrube liegenden Gefässplexus entfernen und danach mit einem feinen Schwämmchen das Operationsfeld vollkommen säubern. Legt man nun einen Schnitt durch das Nackenmark, wie ihn die Linie *m* in Fig. 3 angiebt, also niemals vor den hinteren Rand des Kleinhirns, sondern hinter dasselbe, und setzt danach den Frosch auf den Tisch, so springt er sogleich mit grosser Kraft auffallend senkrecht in die Höhe und überschlägt sich beim Herunterkommen auf die verwundete Seite, so dass er in derselben Richtung um seine Axe rollt. Kommt er durch Ermüdung zur Ruhe, so bleibt eine Zwangsstellung zurück, die ebenfalls wieder den Kopf betrifft, welcher nach der verwundeten Seite so stark gesenkt sein kann, dass das Auge der gesunden Seite fast senkrecht in die Höhe sieht. Bringt man ihn in's Wasser, so beginnt er zunächst eine Reitbahn-

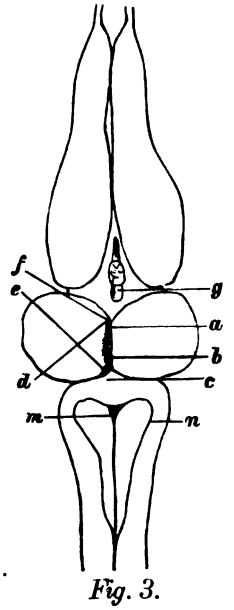


Fig. 3.

[1] Ich werde, um einen kurzen Namen zu haben, das verlängerte Mark in Zukunft »Nackenmark« nennen.

Digitized by Google

bewegung um die gesunde Seite, bis er plötzlich nach der verwundeten Seite umschlägt und um seine Axe rollt, oder aber er beginnt sogleich um seine Axe zu rollen und zwar ebenfalls in der Richtung nach der verwundeten Seite. Die Form der Bewegung im Wasser kann sehr verschieden sein, aber ausnahmslos tritt das Moment der Rollbewegung hervor. Auch hierbei beobachtet man Stösse mit coordinirten Schwimmbewegungen.

Überlässt man diesen Frosch völliger Ruhe und sucht ihn nach 24 Stunden wieder auf, so findet man ihn in fast völlig normaler Haltung bis auf eine geringfügige Neigung des Kopfes nach der verletzten Seite, die flüchtiger Betrachtung leicht entgehen kann; im Übrigen aber ist er vollkommen unbeweglich. Reizt man ihn mechanisch oder bringt ihn in's Wasser, so wiederholt sich in genau derselben Weise die oben beschriebene Scene mit ihren Nachwirkungen. Sämmtliche Erscheinungen persistiren unbeschränkte Zeit.

§. 7. Einige Schlüsse aus den bisherigen Versuchen.

Wegen der Wichtigkeit der Schlüsse, welche sich aus den bisherigen Versuchen ableiten, mögen dieselben gleich hier eingefügt werden. Dieselben sind folgende:

1. Zwangsbewegungen entstehen beim Frosche nach asymmetrischer Verletzung ausschliesslich der Sehhügel, der Basis der Zweihügel und der vorderen Hälfte des Nackenmarkes.

2. Die Uhrzeigerbewegung ist eine Reizungserscheinung, weil sie vorübergehend ist.

3. Die Reitbahn- und die Rollbewegung sind Ausfallserscheinungen, weil sie dauernd bestehen.

4. Da die Frösche mit allen Formen der Zwangsbewegungen coordinirt zu schwimmen vermögen, wobei, soweit zu ersehen, sämmtliche Skeletmuskeln in Thätigkeit gerathen, so folgt daraus, dass nirgends eine periphere Lähmung vorhanden sein kann, sondern dass die Zwangsbewegungen, mögen sie als Reizungs- oder Ausfallserscheinungen auftreten, durch centrale Störung der Innervation hervorgerufen sein müssen; ein Schluss von wesentlicher Bedeutung, weil er nothwendigerweise alle Erklärungsversuche von der Hand weisen muss, die auf peripherer Lähmung beruhen.

5. Die Zwangsbewegungen als Ausfallserscheinungen treten nur auf äussere Reize ein.

Digitized by Google

§. 8. Fortsetzung der Experimente.

Die bisher beschriebenen Versuche erfreuen sich, so lange die angegebenen Bedingungen genau eingehalten werden, der grössten Constanz. Nichtsdestoweniger stehen sie nicht überall in Einklang mit den Angaben der Autoren. So z. B. giebt FLOURENS an, Uhrzeigerbewegung nach der verwundeten Seite gesehen zu haben, wenn er die Sehhügel zerstört hatte; ähnliche Angaben macht RENZI. Der Letztere giebt sogar an, nach einseitiger Verletzung des Zweihügels Reitbahnbewegung nach der Seite der Verwundung gesehen zu haben (diese Angabe ist zum Theil schon in §. 6 erklärt); endlich hat BANDELOT nach Verletzung des Nackenmarkes nicht allein Rollbewegung, sondern auch Reitbahnbewegung nach der unverwundeten Seite gesehen.

Es unterliegt naturgemäss keinem Zweifel, dass die Autoren auch das gesehen haben, was sie beschreiben; wenn meine Angaben von den ihrigen abweichen, so kann das nicht anders sein, als dass die Bedingungen nicht die gleichen waren. Nach allen meinen Erfahrungen, deren Zahl sehr gross ist, wird der Ort der Verletzung dort ein anderer gewesen sein als hier, und es erwächst daher für mich die Aufgabe, die Localitäten aufzusuchen, durch deren Verwundung constant die von jenen Autoren beschriebenen Effecte erzielt werden können. Diese Aufgabe konnte dadurch gelöst werden, dass einzelne genau controlirte Schnitte in die Hirnsubstanz systematisch durchgeführt worden sind.

A. Einseitige Schnitte im Bereiche der Sehhügel.

Ein Schnitt in der Trennungslinie von Sehhügel und Zweihügel, wie in Fig. 3 bei *f*, giebt das nämliche Resultat, wie die totale Abtragung des Sehhügels. Legt man aber den Schnitt mitten durch den Sehhügel senkrecht zur Längsaxe, entsprechend der Linie *g*, so erfolgen alle beschriebenen Bewegungen in der Richtung nach der verwundeten Seite d. h. entsprechend den Angaben von FLOURENS und RENZI.

B. Einseitige Schnitte im Bereiche der Zweihügel.

Ein Schnitt in der Linie *a* (Fig. 3) macht etwa dieselben Erscheinungen, wie jener, der auf der Grenze von Seh- und Zweihügel angelegt worden ist, d. h. mit Bezug auf die dort beobachtete Kreisbewegung. Ein Schnitt in *b* giebt Reitbahnbewegung nach der unverletzten Seite; ein Schnitt in *c*, bezw. ein solcher auf der Grenze von

Digitized by Google

Zweihügel und Nackenmark giebt dasselbe Resultat. In diesen Linien ist also die Renzi'sche Angabe der Reitbahnbewegung nach der verwundeten Seite nicht zu finden.

Legt man aber einen Schnitt in die eine Diagonale, also in die Linie *d*, so macht der Frosch, wenn die Reizungserscheinungen nach einigen Stunden vorüber sind, Reitbahnbewegungen nach der verwundeten Seite, wobei häufig die Tendenz zum Umschlagen auf den Rücken bemerkbar wird. Setzt man den Frosch in's Wasser, so schwimmt er in Reitbahnbewegung nach der verwundeten Seite; andere Exemplare schlagen häufig in Rollbewegung um, nehmen dann wieder die Kreisbewegung auf u. s. w. Oder aber sie beginnen mit Rollbewegung und gehen dann in Reitbahnbewegung über. Wie aber immer die Folge der Bewegungen sein mag, so halten sie beide stets die Richtung nach der verwundeten Seite ein. Darauf kommt Alles an, denn damit haben wir den Ort, von dem aus wir constant die Angabe von Renzi erfüllen können. Die Möglichkeit, dass es sich in diesem Falle um Mitverletzung des benachbarten Nackenmarkes handelt, lässt sich vollkommen ausschliessen. Legt man einen Schnitt in die andere Diagonale, in die Linie *e*, so macht der Frosch wieder Reitbahnbewegungen nach der unverletzten Seite.

C. Einseitige Schnitte im Bereiche des Nackenmarks.

Über die Folgen einseitiger Verletzungen des Nackenmarkes herrscht unter den Autoren im Allgemeinen Übereinstimmung, insofern man nach den genannten Verletzungen wesentlich Rollbewegungen nach der verwundeten Seite beobachtet. Nichtsdestoweniger kann man hier auch ganz reine Reitbahnbewegung nach der unverletzten Seite bekommen, wenn man direct auf das Kleinhirn einschneidet und den Schnitt, wie alle diese Schnitte, bis auf die Basis führt. Der verwundete Theil, um den es sich hier nur handeln kann, ist jener, welcher direct unter dem Kleinhirn liegt, und dieser gehört nach der landläufigen Anatomie zum Nackenmark. Es ist auf diese Thatsache Werth zu legen, weil sie die citirte Angabe von Bandelot befriedigt.

Damit wäre die Untersuchung hier erschöpft, wenn sich meine Aufmerksamkeit nicht schon seit längerer Zeit auf folgende Thatsache gerichtet hätte: Die Rollbewegungen nach Verletzung des Nackenmarkes zeigen nämlich, besonders deutlich im Wasser, zwei verschiedene Typen; der eine Typus ist der, dass der Frosch, in's Wasser gesetzt, zunächst in einem oder mehreren Stössen einen regelrechten Reitbahnbogen nach der unverletzten Seite beschreibt, worauf er am Ende

Digitized by Google

eines solchen Stosses umschlägt und um die verwundete Seite eine Rollbewegung macht; danach rafft er sich auf, setzt seine Reitbahnbewegung fort und schlägt später wieder um u. s. w. Der Frosch beschreibt also einen regelrechten Reitbahnkreis in der Richtung nach der unverwundeten Seite, innerhalb dessen er periodische Rollbewegungen um die verwundete Seite macht. Wir wollen deshalb diesen Typus als »periodische Rollbewegung« bezeichnen. Der andere Typus besteht darin, dass der Frosch continuirliche Rollbewegungen in derselben Richtung macht, wobei man ebenfalls eine translatorische Bewegung sieht, deren Bahn aber nicht genau anzugeben ist. Wir wollen diese Form als »continuirliche Rollbewegung« bezeichnen.

Da diese beiden Formen stets ganz deutlich gesondert auftreten, so müssen es nach allen meinen Erfahrungen zweifellos zwei örtlich verschiedene Verwundungen sein, denen sie ihre Entstehung verdanken. Nach vielfachen Bemühungen ist es mir gelungen diese beiden Orte zu finden. Die periodische Rollbewegung tritt immer nur dann auf, wenn man das Nackenmark zwar halbseitig, aber total durchschneidet, die continuirliche Rollbewegung nur dann, wenn man nur einen kleinen Theil der einen Seite des Nackenmarkes durchschneidet, und zwar jenen Wall, der die Rautengrube umsäumt und den die Anatomie als »*Limbus fossae rhomboidalis*« bezeichnet. Die Höhe, in welcher die Schnitte anzulegen sind, ist für beide dieselbe; es ist nämlich die Gegend, wo bei totaler halbseitiger Durchschneidung das Auge derselben Seite starr und unbeweglich wird. Ich bezeichne diese Gegend deshalb als *Regio trigeminalis;* in der Fig. 3 geben die Linien *m* und *n* die betreffenden Schnitte an.

§. 9. Folgerungen aus den letzten Versuchen.

1. Wir können nunmehr jede bisher beobachtete Zwangsbewegung nach Belieben erzeugen; also Uhrzeigerbewegung nach der verletzten und unverletzten Seite, ebenso Reitbahnbewegung nach beiden Seiten, dagegen die Rollbewegung stets nur nach der verletzten Seite. Da Rollbewegung nach der unverletzten Seite bisher noch nicht beobachtet worden ist, so wird es wahrscheinlich, dass diese Combination in der Organisation des Gehirns nicht enthalten ist oder nur so, dass sie für uns nicht erreichbar ist.

2. Die Uhrzeigerbewegung gehört nur den Sehhügeln an; die Reitbahnbewegung wesentlich den Zweihügeln und die Rollbewegung ebenso dem Nackenmark — vorbehaltlich der angegebenen Ausnahmen.

Digitized by Google

Indem ich hier die Versuche schliesse, hoffe ich nunmehr die Unsicherheit gehoben zu haben, welche in diesem Gebiete geherrscht hat.

In einer demnächst als selbständiges Werk erscheinenden grösseren Arbeit (Untersuchungen über die Physiologie des Froschhirns, Braunschweig, Fr. Vieweg und Sohn, 1885) werde ich den Beweis zu führen suchen, dass alle diese Erscheinungen sich mechanisch aus der einfachen Annahme herleiten lassen, dass durch die jedesmalige Hirnverletzung die Kraft gewisser Muskelgruppen auf der einen Körperseite herabgesetzt wird.

Digitized by Google

Digitized by Google

26. Über die cyklische Entwickelung der Siphonophoren.

Von Prof. Carl Chun
in Königsberg i. Pr.

Zweite Mittheilung.

(Vorgelegt von Hrn. Schulze am 5. Februar; — gedruckt im Bericht vom 21. Mai [St. XXVI]; — ausgegeben am 4. Juni.)

Hierzu Taf. II.

In einer früheren Mittheilung an die Königliche Akademie der Wissenschaften[1] suchte ich den Nachweis zu führen, dass der Entwickelungscyclus der Calycophoriden sich complicirter gestaltet, als man bisher anzunehmen berechtigt war. Eine kleine durch eine fünfkantige Schwimmglocke ausgezeichnete Monophyide, welche von Will[2] als *Diphyes Kochii*, von Busch[3] als *Muggiaea pyramidalis* beschrieben wurde, zeigt nämlich in ihren früheren Entwickelungsstadien eine heteromorph gestaltete mützenförmige Schwimmglocke, die der definitiven Glocke vorausgeht und nach der Knospung der letzteren abgeworfen wird. Ich nannte diese Monophyide *Muggiaea Kochii*, indem ich die von den Entdeckern gewählten Bezeichnungen combinirte, und suchte weiterhin nachzuweisen, dass ihre Eudoxiengruppen sich zu der *Ersaea truncata* Will's und der mit ihr identischen *Eudoxia Eschscholtzii* Busch's ausbilden.

Sehr wahrscheinlich war es durch diese Beobachtungen geworden, dass die gesammten Calycophoriden einen ähnlichen Wechsel heteromorpher Schwimmglocken aufweisen und dass auch sie ein von mir als *Monophyes primordialis* bezeichnetes Stadium durchlaufen, dessen mützenförmige Schwimmglocke sich nicht zu der definitiven oberen Glocke ausbildet, sondern abgeworfen wird, nachdem die späteren heteromorphen Glocken geknospt wurden. Insofern also bei der Ent-

[1] Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, LII. 1882. S. 1155 bis 1172, Taf. XVII.

[2] Horae Tergestinae 1844. S. 77, Taf. II, Fig. 22.

[3] Beobacht. über Anat. und Entwickelungsgesch. einiger wirbelloser Seethiere 1851. S. 46 und 48.

Digitized by Google

wickelung der Calycophoriden ein der *Monophyes primordialis* gleichendes Stadium recapitulirt wird, so bezeichnete ich letztere als Stammform der Siphonophoren.

In einer kritischen Besprechung meiner Beobachtungen glaubte Claus[1] sich gegen meine Deutungen erklären zu müssen. Den Ausgangspunkt seiner Erörterung bildet die Behauptung, dass *Muggiaea Kochii* keine Monophyide, sondern eine Diphyide repräsentire, dass demgemäss *Monophyes primordialis* keiner Ammengeneration, sondern einer Larve gleichwerthig zu erachten sei, die wir nicht als Stammform der Siphonophoren zu betrachten haben.

Die daran sich anschliessenden Speculationen über den phylogenetischen Entwickelungsgang der Siphonophoren enthalten manche zutreffende Bemerkung und wir können denselben um so mehr beistimmen, als Claus nach dem Vorgange Leuckart's die polymorphen Hydroidencolonieen, welche an der Fixirung behindert, genöthigt wurden, sich im flottirenden Zustand weiter zu ernähren, zum Ausgangspunkt seiner Darstellung nimmt.

Dagegen muss ich mich mit Entschiedenheit gegen die Auffassung von Claus erklären, dass *Muggiaea* eine Diphyide repräsentire. Zu einer solch' irrigen Behauptung, die den Ausgangspunkt für seine ganze Darstellung abgiebt, liess sich Claus durch zwei Voraussetzungen bestimmen, die nicht zutreffend sind. Nach seiner Meinung weise nämlich einerseits der Typus der Schwimmglocken und der zu Eudoxien sich entwickelnden Individuengruppen durchaus auf eine *Diphyes* hin, welche die eine der beiden Schwimmglocken frühzeitig rückgebildet und verloren habe (S. 526), andererseits sei durch mich selbst der Nachweis geführt worden, dass die fünfkantige Schwimmglocke der *Muggiaea* von der primären Glocke der bisher bekannten *Monophyes*-Arten verschieden sei und eine erst später entstandene, mit einer Diphyidenglocke identische Bildung repräsentire (S. 527). Was nun zunächst die erste Voraussetzung anbelangt, so müssen wir es durchaus vermeiden, die Form der Schwimmglocken und der Eudoxiengruppen gegen eine Einreihung der *Muggiaea* unter die Monophyiden geltend zu machen. Unter den Diphyiden beobachten wir zwischen der Form der Glocken und Eudoxiengruppen von *Abyla* einerseits und *Praya* andererseits mindestens ebensolche Differenzen, wie sie zwischen der nur mit einer Glocke versehenen *Muggiaea* und den übrigen Monophyiden obwalten.

---

[1] Über das Verhältniss von *Monophyes* zu den Diphyiden, sowie über den phylogenetischen Entwickelungsgang der Siphonophoren in: Arbeiten d. Zool. Instit. Wien. Bd. V, S. 15 bis 27.

Digitized by Google

Was nun den zweiten, anscheinend weit schwerer wiegenden Einwand anbelangt, dass nämlich die fünfkantige Glocke der *Muggiaea* nicht der primären Glocke der von Claus[1] beschriebenen Monophyiden (*Monophyes gracilis* Fig. 1 und *M. irregularis*) homolog sei, so geht derselbe von der Voraussetzung aus, dass bei den genannten beiden *Monophyes*-Arten die larvale Glocke persistire. Claus betrachtet geradezu die zuerst gebildete Schwimmglocke der Diphyidenlarven als gleichwerthig der Schwimmglocke seiner Monophyiden (S. 529) und wirft die Frage auf, ob die von Huxley und ihm beschriebenen Monophyiden überhaupt selbständige Arten und nicht vorübergehende Entwickelungsstadien höher gegliederter Calycophoren (S. 529) repräsentiren. Er hält es nicht für unmöglich, dass die kleinere als *Monophyes irregularis* unterschiedene Art die Larve einer höher stehenden Calycophore sei, während er die grössere *M. gracilis* und die von Huxley[2] beschriebene *Sphaeronectes Köllikeri* als selbständige Arten aus dem Grunde auffasst, weil die ansehnliche Verlängerung der trichterförmigen, zur Aufnahme des Stammes dienenden Höhlung die Ausbildung einer anderen Schwimmglocke ausschliesse. Letzteres Argument klingt zwar plausibel, ist jedoch um so weniger beweiskräftig, als ich noch darlegen werde, dass Reserveglocken sich gelegentlich unter weit ungünstigeren Verhältnissen anlegen. So berechtigt nun auch Claus die Frage erscheinen mochte, ob die Monophyiden überhaupt als selbständige Familie aufrecht zu erhalten seien, so hätte er immerhin mit demselben Rechte die Frage aufwerfen können, ob denn wirklich die Schwimmglocke von *Monophyes gracilis* und *irregularis* eine primäre sei und ob nicht für die beiden Arten derselbe Entwickelungsgang gelte, den ich für *Muggiaea* nachwies. Liesse es sich thatsächlich erweisen, dass den Schwimmglocken der genannten beiden Monophyiden heteromorph gebildete Glocken vorausgehen, so würde jeder Grund wegfallen, der *Muggiaea* eine Sonderstellung anzuweisen, sondern wir müssten ihre fünfkantige Glocke als homolog den mützenförmigen Glocken der ersteren erachten.

Durch die Munificenz der Königlichen Akademie der Wissenschaften wurde ich in den Stand gesetzt, während der Osterferien 1884 auf der Zoologischen Station zu Neapel meine Untersuchungen über die Siphonophoren fortzusetzen. Indem ich der Königlichen Akademie meinen ehrerbietigsten Dank ausspreche, gestatte ich mir, derselben einen kurzen Bericht über meine Beobachtungen, soweit dieselben mit

---

[1] Schriften zoologischen Inhalts. 1874 II. Die Gattung *Monophyes Cls.* und ihr Abkömmling *Diplophysa Gbr.*

[2] *Oceanic Hydrozoa* 1858, S. 50. Taf. 3, Fig. 4.

Digitized by Google

den oben berührten Fragen in Zusammenhang stehen, vorzulegen und verweise bezüglich der ausführlichen Darlegung auf eine später erscheinende Monographie der Siphonophoren. Ich schildere zunächst die cyklische Entwickelung der Monophyiden und werde daran anknüpfend die Entwickelungsvorgänge am Anfange des Stammes der Diphyiden erörtern, um die gewonnenen Ergebnisse zu einer Charakteristik der beiden Familien zu verwerthen. Zum Schlusse sollen dann noch einige Bemerkungen über die Geschlechtsverhältnisse der Diphyiden angefügt werden.

1. Die cyklische Entwickelung der Monophyiden.

Durch Huxley (a. a. O.), Pagenstecher[1] und Claus (a. a. O.) wurden wir auf kleine Siphonophorenstöckchen aufmerksam gemacht, die auf den ersten Blick Medusen zu gleichen scheinen, bei genauerer Betrachtung jedoch einen seitlich anhängenden Stamm mit Knospengruppen erkennen lassen. Huxley nannte diese zierlichen Colonien *Sphaeronectes Köllikeri*, während Claus mit Rücksicht auf die stets nur in der Einzahl vorhandene Schwimmglocke die Bezeichnung *Monophyes* wählte. Da der letztere Gattungsname sich allmählich eingebürgert hat, insofern er zutreffend die Charaktere der Gattung und Familie den Diphyiden gegenüber zum Ausdruck bringt, so werde ich an dieser Bezeichnung festhalten. Claus unterschied zwei im Mittelmeer vorkommende Arten, nämlich *Monophyes gracilis* (vielleicht identisch mit *Sphaeronectes Köllikeri* Huxl.) mit tiefer Trichterhöhlung zur Aufnahme des Stammes und *M. irregularis* mit kurzer und abgeflachter Höhlung. Er wies weiterhin nach, dass die von Will[2] und Gegenbaur[3] geschilderten Diplophysen (*Ersaea truncata* Will) die geschlechtsreifen, vom Stamme sich loslösenden Eudoxiengruppen der Monophyiden repräsentiren. Bezüglich des Baues dieser einfachen Monophyiden verweise ich auf Fig. 1, welche *Monophyes gracilis* mit dem Anfangstheil des Stammes repräsentirt und auf die eingehende Darstellung von Claus. Die beiden Arten erscheinen im Golfe von Neapel vom Herbst an bis zum Frühjahre ziemlich häufig; mit Beginn der heissen Jahreszeit werden sie seltener und verschwinden schliesslich, bis sie im Laufe des September und October wieder auftauchen. In den Gläsern halten sie sich lange Zeit (2—3 Wochen), falls man sie öfters in frisches Seewasser ver-

[1] Eine neue Entwickelungsweise bei Siphonophoren. Zeitschr. f. wissensch. Zoologie, Bd. 19, S. 244.

[2] Horae Tergestinae, S. 82. Taf. 2, Fig. 18.

[3] Beiträge zur näheren Kenntniss der Schwimmpolypen. Zeitschr. f. wissensch. Zoologie, Bd. 5. S. 291. Taf. 16, Fig. 3.

Digitized by Google

setzt. Leicht lässt sich dann constatiren, dass ihre Anhangsgruppen zu den Diplophysen sich entwickeln. CLAUS bemerkte an dem Stamme nur sehr unvollkommen entwickelte Individuengruppen und glaubt, dass dieselben am Stocke keine hohe Differenzirung und vollständige Ausbildung zu den Diplophysen erhalten. Bei seinem Schlusse, dass die *Diplophysa inermis* GEGBR. als die zu *Monophyes gracilis* gehörige Eudoxie zu betrachten sei, liess er sich daher mit Recht durch die Identität der Nesselknöpfe bestimmen. Züchtet man jedoch die Monophyiden oder wendet man schonende Methoden des pelagischen Fanges an, so kann man am Ende des Stammes beider Arten vollkommen ausgebildete, mit fast reifen Geschlechtsproducten versehene Diplophysengruppen wahrnehmen. Durch diese Beobachtungen wird es in hohem Grade unwahrscheinlich, dass die *Monophyes*-Arten Larvenformen höher stehender Calycophoriden repräsentiren möchten, wie dies CLAUS neuerdings wenigstens für *M. irregularis* vermuthet. Da jedoch immerhin die Existenz geschlechtsreifer Larvenformen speciell bei den Cölanteraten neuerdings nachgewiesen wurde, so kann ein stricter Beweis für die selbständige Stellung der Monophyiden nur dann erbracht werden, wenn bewiesen wird, dass ihre Schwimmglocken persistiren und nicht durch heteromorphe Reserveglocken verdrängt werden. Ich habe daher zunächst den Anfangstheil des Stammes an zahlreichen Exemplaren einer sorgfältigen Prüfung unterzogen, ohne indessen bei beiden Arten eine Knospe für die Reserveglocke entdecken zu können. Fig. 2 stellt den Anfangstheil des Stammes von *Monophyes gracilis* dar. Man bemerkt an der Einmündung des Stammes in den Saftbehälter (*o*) und in das zur Subumbrella der Genitalglocke herabsteigende Gefäss (*s*) zahlreiche Knospengruppen, von denen indessen keine die frühzeitig sich charakterisirende Form einer Schwimmglockenanlage erkennen lässt. Vielmehr bilden die einseitig am Stamme angeordneten halbkugeligen Knospen sich zu der Anlage für den Magenschlauch (*m*), Fangfaden (*f*) und die ursprünglich gemeinsame Auftreibung für Deckstück und Genitalglocke (*g*) aus. CLAUS hat bereits darauf aufmerksam gemacht, dass an den Knospengruppen der *Monophyes gracilis* Magenpolyp mit Fangfaden durch einen stielförmig sich verlängernden Abschnitt (*st*) von der Anlage für Deckstück und Genitalglocke getrennt werden, während bei *M. irregularis* dieser Magenstiel so stark verkürzt erscheint, dass die letztgenannten Knospenanlagen unmittelbar dem Magenpolypen und dem Fangfaden anliegen. Auf diese Eigenthümlichkeit werden wir bei den späteren Darlegungen noch besonders aufmerksam zu machen haben.

Da also weder bei *Monophyes gracilis*, noch bei *M. irregularis* die Schwimmglocken abgestossen und durch Reserveglocken verdrängt

Digitized by Google

werden, so können sie auch keine Larvenformen repräsentiren, sondern sie sind als selbständige Arten zu betrachten, deren medusenförmig gewölbte Schwimmglocken definitive Glocken vorstellen.

Es entsteht nun die weitere Frage, ob diese definitiven Glocken primäre oder secundäre repräsentiren, d. h. ob die am Embryo sich ausbildende Schwimmglockenanlage persistirt oder ob sie abgestossen wird, nachdem eine heteromorphe Glockenanlage geknospt wurde. Ich versuchte zunächst die Embryonalentwickelung der beiden Monophyiden zu studiren, allein leider ohne Erfolg. Die Diplophysen werden zwar stets mit der Anlage von Eiern resp. Sperma im Genitalklöppel angetroffen, allein es gelang mir nicht, gleichzeitig ein Diplophysa-Weibchen mit befruchtungsfähigen Eiern und ein Männchen mit sich bewegenden Spermatozoen zu erhalten und eine künstliche Befruchtung vorzunehmen. Bei der stürmischen Frühjahrswitterung konnte ich mir zudem nur spärliches Material verschaffen. Um nun trotzdem zu einem Entscheid zu gelangen, so begann ich, den pelagischen Auftrieb nach Jugendstadien der Monophyiden zu durchmustern. Es gelang zwar, sehr junge Exemplare von *M. gracilis* und *irregularis* mit kurzem Stamme und noch unvollkommen entwickelten Knospengruppen aufzufinden, allein die Schwimmglocken liessen trotz ihrer geringen Grösse (sie maassen $1-1.5^{mm}$) und der bei *M. gracilis* noch kurzen trichterförmigen Höhlung doch schon die charakteristische Gestalt der ausgebildeten Glocke erkennen. Die Kleinheit der Schwimmglocken schloss immerhin die Möglichkeit nicht aus, dass ihnen nach Analogie der Entwicklung von *Muggiaea* eine heteromorphe Glocke vorausgehen möchte, und so begann ich schliesslich, die im pelagischen Auftrieb massenhaft sich umhertreibenden isolirten Glocken von Siphonophoren zu durchmustern und ihre Zugehörigkeit zu bekannten Arten zu bestimmen. Da, wie ich früherhin nachwies, die Schwimmglocken von Eudoxien einem ständigen Wechsel unterworfen sind und in kurzer Zeit durch einen Nachschub von Reserveglocken ersetzt werden, da weiterhin, wie ich noch ausführlicher darlegen werde, analoge Vorgänge am Stammanfang der Diphyiden sich abspielen, so darf es nicht befremden, wenn eine Fülle von Glocken, die theils mit Geschlechtsproducten erfüllt sind, theils dieselben entleert haben, theils überhaupt keinen Magenstiel besitzen, im pelagischen Auftrieb gefunden werden. Dazu kommt, dass bei stürmischem Wetter oder bei wenig schonenden Fangmethoden die zarten Colonien leicht verstümmelt werden und aller Schwimmglocken baar zur Beobachtung gelangen. Unter solchen Umständen ist es eine mühselige und zeitraubende Arbeit, sich genaue Rechenschaft über die Natur der vorliegenden isolirten Glocken zu geben.

Digitized by Google

Unter diesen isolirten Schwimmglocken fielen mir nun zwei Formen auf, deren bisher trotz ihrer abweichenden Gestalt in der Literatur keine Erwähnung gethan wird. Sie nahmen um so mehr mein Interesse in Anspruch, als ihr Auftreten in einem gewissen Connex mit dem Erscheinen der Monophyiden stand. Gelangten letztere in grösserer Zahl zur Beobachtung, so konnte ich auch sicher darauf rechnen, dass die in Frage stehenden Schwimmglocken gleichzeitig aufzufinden waren. Damit stimmt es auch, dass ich im Herbste 1882 trotz wochenlangen Durchsuchens des Auftriebes nur einmal eine dieser Glocken (Mitte October) auffand und zwar zu einer Zeit, wo auch die ersten Monophyiden zur Beobachtung gelangten.

Die eine der in Rede stehenden Glocken (Fig. 3) erinnert in ihrem Habitus an die obere Diphyiden- resp. an die *Muggiaea*-Glocke. Allerdings ist die fünfkantige Gestalt der Exumbrella kaum angedeutet und fehlt auch ein seitlicher trichterförmiger Raum zur Aufnahme des Stammes resp. einer zweiten unteren Glocke. Dagegen besitzt sie, wie die genannten Arten, einen seitlichen Ölbehälter, dessen unterer Abschnitt gefässartig verengt erscheint, während das obere Ende aufgetrieben ist und den charakteristischen Öltropfen birgt. Auch die tiefe Höhlung der mit den bekannten quergestreiften Epithelmuskelzellen ausgekleideten Subumbrella und der Gefässverlauf auf letzterer harmonirt mit demjenigen der Diphyiden. Von dem Ende des Ölbehälters streicht nämlich in fast rechtem Winkel ein Gefäss zur Subumbrella, um sich hier in die vier Gefässe zu theilen. Das eine verläuft in der Medianlinie bis zur Kuppe des Schwimmsackes, um dann abzusteigen und in den Ringcanal einzumünden, während zwei seitliche Gefässe in bogenförmigem Verlauf auf- und absteigen; der vierte kurze Ast verbindet den Ringcanal und die Theilungsstelle der genannten drei Gefässe. Ein contractiles Velum ist vorhanden. Die Glocke erreicht eine Länge von 5—6^{mm}; sie wird also eben so gross wie die Schwimmglocken der Monophyiden. In welcher Beziehung zu den bisher bekannten Siphonophoren steht nun diese Glocke? Repräsentirt sie die Schwimmglocke einer neuen Monophyide oder gehört sie in den Entwickelungscyclus einer bekannten Art? Lange Zeit hindurch beobachtete ich lediglich isolirte Glocken, bis es mir endlich bei Anwendung schonender Fangmethoden gelang, einige derselben zu erhalten, die ein im Vergleich zu der grossen Glocke winzig zu nennendes und mit blossem Auge leicht zu übersehendes Siphonophorenstämmchen an der Basis des Ölbehälters festgeheftet zeigten. Die mikroskopische Prüfung dieses Stämmchens lehrte nun, dass in allen Fällen am Anfangstheil des Stammes eine Reserveglocke vorhanden ist und dass weiterhin die Knospengruppen am Stamme identisch sind

Digitized by Google

mit den entsprechenden Gruppen von *Monophyes irregularis*. In Fig. 4 bilde ich das längste Stämmchen ab, welches zur Beobachtung gelangte. Die Reserveglocke ist kugelig und lässt deutlich vier Gefässe erkennen, welche nicht genau am oberen Pole der Anlage, sondern etwas seitlich entspringen, um in ziemlich geradem Verlaufe in den Ringcanal einzumünden. Darunter trifft man eine Anzahl von halbkugeligen Knospen, deren jede späterhin durch Verlängerung und seitliche Ausbuchtungen einer *Diplophysa*-Gruppe, bestehend aus Magenpolyp (*m*), Fangfaden (*f*), Deckstück (*d*) und Genitalglocke (*g*) den Ursprung verleiht. Um die bedeutungsvolle Identität der Knospengruppen zu erweisen, so untersuchte ich genauer den Anfangstheil des Stammes zahlreicher Exemplare von *Monophyes irregularis* im erwachsenen und jugendlichen Zustande. Bei letzteren trifft man oft eine geringere Zahl von Knospen an, als ich sie in Fig. 4 von dem längsten zur Beobachtung gelangten Stämmchen darstelle. Dagegen hat die Schwimmglocke sich ansehnlich entwickelt — ein Umstand, der nicht überraschen kann, da, wie ich von den Reserveglocken der Diphyiden darlegen werde, ein halber Tag genügt, um die kugelige Anlage zu der activ sich bewegenden Glocke auszubilden. Immerhin tritt die Identität der Stammanhänge so frappant hervor, dass die Fig. 6 auch ebenso wohl für den Stamm eines jungen *Monophyes irregularis* gelten könnte. Dass wir es nicht mit dem Stamme von *M. gracilis* zu thun haben, lehrt auf den ersten Blick die Stellung der Knospen für Deckstück und Genitalglocke, welche dem Magenschlauche und Fangfaden direct anliegen. Wie jugendliche Gruppen zeigen, so stehen die vier Knospen von oben gesehen sich diagonal gegenüber. Mehrfach fiel es mir auf, dass an den mit der oben geschilderten Glocke noch zusammenhängenden Stämmchen zwischen wohlentwickelten Knospengruppen solche sich einschieben, die lediglich die Anlage für Deckstück und Genitalglocke (Fig. 4 *a* und *b*) enthalten. Bei dem Durchmustern der Stammanhänge ausgebildeter Monophyiden trifft man denn auch sowohl bei *M. irregularis* wie bei *M. gracilis* dieselben unvollkommenen Anlagen gelegentlich an. An dem Stamme der Diphyiden sind mir nie solche unvollständige Eudoxiengruppen aufgefallen. So leicht nun auch die ausgebildeten Monophyiden sich längere Zeit züchten lassen, so hinfällig sind ihre primären heteromorphen Glocken. Ich konnte die letzteren kaum länger als einen Tag am Leben erhalten und musste zu meinem Leidwesen darauf verzichten, die Reserveglocke bis zur ihrer definitiven Ausbildung im Zusammenhang mit der primären Glocke zu erhalten. Schon eine stärkere Contraction der Subumbrella genügte, um das zarte Stämmchen mit der Glockenknospe zum Abfall zu bringen. Wenn es mir nun auch einst-

Digitized by Google

weilen noch nicht gelang, die Embryonalentwickelung von *Monophyes irregularis* zu verfolgen und den Nachweis zu führen, dass die Schwimmglockenanlage des Keimes sich zu einer diphyidenähnlichen primären Glocke entwickelt, so glaube ich doch mit Rücksicht auf den von mir früher geschilderten Entwickelungsgang der *Muggiaea* mit genügenden Gründen die Auffassung vertreten zu können, dass aus den befruchteten Eiern der von *Monophyes irregularis* abstammenden Diplophysen eine diphyidenähnliche, schwach fünfkantige, mit seitlichem Ölbehälter ausgestattete und eine ansehnliche Grösse erreichende Schwimmglocke neben Magenschlauch und Fangfaden entsteht, die nach Verlängerung des relativ klein bleibenden Stammes durch die definitive heteromorphe mützenförmige Schwimmglocke zum Abstossen gebracht wird.

Die cyklische Entwickelung niederer Thiere und speciell auch der Siphonophoren zeigt eine solche Fülle überraschender Erscheinungen, dass es nicht frappiren kann, wenn ich dem Entwickelungscyclus der zweiten grösseren *Monophyes*-Art, nämlich *M. gracilis*, eine Schwimmglocke zurechne, die nicht nur eine höchst originelle Gestalt besitzt, sondern von der definitiven Glocke in jeder Hinsicht so auffällig abweicht, dass man sich schwerlich grössere Differenzen in der Configuration zweier, demselben Thiere zugehöriger Schwimmglocken vorstellen möchte. In Fig. 5 bilde ich jene zweite Glocke ab, deren Erscheinen in einem gewissen Connex mit dem Auftreten der Monophyiden stand. Sie ist um weniges grösser als die vorhin geschilderte primäre Glocke von *M. irregularis* und weist wie jene einen tiefen Schwimmsack von ansehnlicher Grösse und ein wohl ausgebildetes Velum auf. Die Exumbrella ist deutlich fünfkantig und vor Allem dadurch ausgezeichnet, dass zwei Kanten zu weiten Flügeln sich ausziehen. Sehr charakteristisch ist der völlige Mangel eines Ölbehälters und der eigenthümliche Verlauf der Gefässe. Mitten zwischen den zwei Flügeln der Exumbrella steigt nämlich ein Gefäss zu der Kuppe der Subumbrella herab, um sich dort in vier Radiärgefässe zu theilen, welche in aus der Abbildung ersichtlicher Weise zum Velarrand verlaufen und in einen Ringcanal einmünden. Noch eigenthümlicher gestaltet sich die Insertion des winzigen Siphonophorenstämmchens, das ich nach längerem vergeblichem Suchen bei einigen Exemplaren zu beobachten vermochte. Es heftet sich nämlich hoch über der Kuppe der Subumbrella zwischen den beiden Flügeln am Anfangstheil des zum Schwimmsack absteigenden Gefässes an. Was den Bau dieses Stämmchens anbelangt, so beobachten wir auch hier eine Reserveglocke und Knospengruppen, die den entsprechenden Gruppen am Anfangstheile des Stammes von

Digitized by Google

Monophyes gracilis durchaus ähneln. Das Stämmchen weist eine sehr exponirte Fixirung auf, insofern es ja bei der Contraction des Schwimmsackes dem Widerstand des Wassers direct ausgesetzt ist. So mag es sich denn erklären, dass es einerseits leicht sich loslöst und dass andererseits nur sehr kleine Stämmchen zur Beobachtung gelangten, deren Knospengruppen noch wenig entwickelt waren. Fig. 6 stellt das längste von mir aufgefundene Stämmchen dar, an dessen Basis unterhalb der Reserveglocke zahlreiche halbkugelige Knospen auftreten. Leider waren jedoch die beiden letzten Gruppen, welche den sichersten Entscheid über die Zugehörigkeit zu *M. gracilis* abgegeben hätten, unvollständig entwickelt, insofern auch hier lediglich die gemeinschaftliche Knospe für Genitalglocke und Deckstück auftrat: ein Verhalten, das wir ja früherhin als Eigenthümlichkeit der Monophyiden hervorhoben. Wenn es mir auch nicht möglich ist, mit derselben Entschiedenheit wie bei *M. irregularis* die Zugehörigkeit des Stämmchens zu *M. gracilis* zu statuiren, so ist es indessen andererseits nicht leicht abzusehen, zu welcher der bekannten Diphyiden (denn nur um diese könnte es sich noch handeln) dasselbe gehören möge. Soweit mir Diphyiden zugänglich waren, habe ich den Anfangstheil des Stammes untersucht und an demselben Verhältnisse constatiren können, die, wie ich gleich darlegen werde, den Monophyiden fremd sind. Erstere wiesen auch übereinstimmend eine viel raschere Entwickelung der vier zusammengehörigen Eudoxiengruppen auf (siehe Fig. 8), als sie bei den Monophyiden mit ihren zahlreichen, noch längere Zeit hindurch die halbkugelige Form wahrenden Anlagen beobachtet wird. Da auch aus der Gestalt der Schwimmglockenanlage, bevor dieselbe die Umbrellargallerte ausgeschieden hat, ein völlig sicherer Schluss nicht zu ziehen ist (in Fig. 7 bilde ich die grösste Reserveglocke eines Stämmchens ab, die von mir gerade am Tage meiner Abreise, Ende April, nur flüchtig skizzirt werden konnte), so möchte ich mich vorsichtiger ausdrücken und mit Rücksicht auf das gleichzeitige Auftreten, auf die fast identische Ausbildung der noch wenig differenzirten Knospen nach Analogie des Entwickelungsganges von *Muggiaea* und *Monophyes irregularis* es als höchst wahrscheinlich hinstellen, dass auch *Monophyes gracilis* eine primäre heteromorphe, fünfkantige, mit zwei seitlichen Flügeln ausgestattete, eines Ölbehälters entbehrende Schwimmglocke aufweist, an welcher der winzige mit der definitiven Glockenanlage ausgestattete Stamm hoch oberhalb des Schwimmsackes sich inserirt.

Fassen wir nun zum Schlusse die gewonnenen Ergebnisse in Kürze zusammen, so können wir behaupten, dass sämmtliche Mono-

Digitized by Google

hyiden, nämlich *Muggiaea Kochii*, *Monophyes irregularis* und *Monophyes gracilis* selbständige Arten repräsentiren, deren primäre Schwimmglocken abgestossen und durch definitive, stets nur in der Einzahl vorhandene heteromorphe Glocken ersetzt werden. Meine frühere Auffassung, dass *Muggiaea* eine Monophyide repräsentirt, muss ich gegenüber der irrigen Ansicht von Claus, der sie für eine Diphyide erklärt, durchaus für gerechtfertigt erklären. Ob wir nun die primären Glocken für Ammen erklären, welche den Stamm mit der Reserveglocke knospen oder ob wir sie für Larvenformen halten wollen, das kann dem individuellen Ermessen überlassen bleiben. Wer auf die präponderirende Entwickelung einer ansehnlichen Glocke das Hauptgewicht legt, der wird sich der ersteren Auffassung zuneigen; wer dagegen, wie Claus richtig hervorhebt, den Wechsel heteromorpher Deckschuppen und Fangfäden bei Siphonophoren als analoge Erscheinungen anzieht, der wird sich für die letztere Ansicht entscheiden.

II. Über das Verhältniss der Monophyiden zu den Diphyiden und Polyphyiden.

Durch den Nachweis, dass bei den Monophyiden der definitiven Glocke eine heteromorph gestaltete Schwimmglocke vorausgeht, welche abgestossen wird, ist ein solches Verhalten für die gesammten Calycophoriden in hohem Grade wahrscheinlich geworden. Ich habe bereits früherhin darauf aufmerksam gemacht, dass die durch Gegenbaur und Metschnikoff beschriebenen larvalen Glocken von *Diphyes* und *Epibulia aurantiaca* nicht, wie man bisher annahm, die obere Schwimmglocke bilden dürften, sondern dass sie heteromorphe primäre Glocken darstellen, die abgestossen werden. Allerdings muss dies Verhältniss erst noch thatsächlich nachgewiesen werden. Der Unterschied zwischen Monophyiden und Diphyiden würde dann einfach darin bestehen, dass bei den ersteren mit der Bildung der einen definitiven Glocke, welche der oberen definitiven Diphyidenglocke entspricht, überhaupt die Production von Schwimmglocken ihren Abschluss findet, während bei den Diphyiden noch eine zweite definitive Glocke sich anlegt. Die Zahl der definitiven Schwimmglocken würde somit zur Charakteristik der drei Calycophoridenfamilien in erster Linie zu berücksichtigen sein — und das mit um so mehr Recht, als die Form der Glocken nicht nur bei nahe verwandten Arten, sondern auch im Entwickelungscyclus einer und derselben Art auffällige Differenzen erkennen lässt. Bei genauerer Untersuchung des Stammes der Diphyiden stiess ich indessen auf Verhältnisse, welche einerseits die Differenzen

Digitized by Google

zwischen ihnen und den Monophyiden noch schärfer zum Ausdruck bringen, andererseits die Beziehungen zwischen Polyphyiden und Diphyiden als sehr innige erscheinen lassen. Auf die hier zu schildernden Vorgänge sind schon ältere Forscher gelegentlich aufmerksam geworden, ohne dass indessen ihre allgemeine Gültigkeit für die gesammten Diphyiden und die Verhältnisse im Speciellen nachgewiesen wurden.

Leuckart[1] und Gegenbaur[2] machten bereits darauf aufmerksam, dass gelegentlich Diphyiden zur Beobachtung gelangen, die drei, ja sogar vier ausgebildete Schwimmglocken besitzen. Leuckart constatirte bei *Epibulia aurantiaca* sogar constant 2—3 Schwimmglockenknospen, die er mit vollem Recht als Ersatzglocken deutet, welche gelegentlich noch bei Anwesenheit der Hauptschwimmglocken ihre weitere Entwickelung beginnen. Leider scheinen diese interessanten Angaben wenig beachtet worden zu sein; wenigstens beschreibt Korotneff[3] neuerdings dasselbe Verhalten bei *Epibulia*, ohne die Angaben der genannten Forscher zu kennen. Ich selbst beobachtete gelegentlich sowohl bei *Praya* (bei der Leuckart ebenfalls auf Ersatzglocken aufmerksam macht) als auch bei *Epibulia* Individuen mit vermehrter Glockenzahl und begann diese Erscheinungen am Anfange des Stammes der Diphyiden bei allen mir zugänglichen Arten genau zu verfolgen. Das Resultat ist für alle untersuchten Arten von Diphyiden das gleiche und lässt sich kurz dahin zusammenfassen: Die beiden Schwimmglocken der Diphyiden unterliegen einem beständigen Ersatz durch Reserveschwimmglocken von gleicher Gestalt. Um an einigen speciellen Beispielen das genannte Verhalten darzulegen, so bilde ich zunächst in Fig. 8 den Anfangstheil des Stammes von *Diphyes turgida* Gegenb. nach Entfernen der beiden ausgebildeten Schwimmglocken ab. Man gewahrt zunächst eine fast völlig ausgebildete Knospe (I) für die obere Schwimmglocke am Anfang des Stammes, die ausser dem charakteristischen Gefässverlauf die Anlage für den Ölbehälter (*s*) erkennen lässt. Unter ihr inserirt sich die Reserveknospe für die untere Glocke (II), oberhalb deren eine noch wenig differenzirte Knospe (III) wahrzunehmen ist, welche späterhin die Knospe I verdrängen und sich zur oberen Glocke entwickeln wird.

Ein besonders geeignetes Object zum Studium des Schwimmglockenwechsels giebt *Praya maxima* ab. Sie lässt sich nämlich lange

---

[1] Zoolog. Untersuchungen 1853. I. Heft, Siphonophoren S. 10 und: Zur näheren Kenntniss der Siphonophoren von Nizza. Arch. f. Naturgesch. 1854. S. 35 und 44.

[2] Zeitschr. f. wissensch. Zool. Bd. 5. S. 316.

[3] Zur Histologie der Siphonophoren, Mitth. d. Zool. Station Neapel. Bd. 5. 1884. S. 279.

Digitized by Google

Zeit in Gefässen am Leben erhalten und zeigt dabei sehr hübsch das Abstossen der grossen Glocken und das allmähliche Heranwachsen der Reserveglocken. Sobald die Reserveglocken, deren man an kleineren Exemplaren drei bis vier zwischen den ausgebildeten Glocken wahrnimmt, die ersten Entwickelungsstadien durchlaufen haben, sind sie von origineller in Fig. 9 dargestellter Form. Sie sitzen nämlich dem Anfangstheil des Stammes (*st.*) vermittelst eines langen Anhanges auf, der im Querschnitt nicht drehrund erscheint, sondern gegen die Einmündung des Stammes zu seitlich comprimirt ist. Neben dem Schwimmsack ist eine leichte Ausbuchtung (*u. s.*) der stielförmigen Verlängerung angedeutet, deren spätere Configuration wir gleich erwähnen werden. Der Gefässverlauf auf dem Schwimmsack, insbesondere die bogenförmigen Krümmungen der seitlichen Gefässe stimmt bereits mit dem definitiven Verhalten überein. Bei warmem Wetter und günstiger Ernährung nimmt die Knospe innerhalb einer einzigen Nacht den in Fig. 10 dargestellten Habitus an. Zwischen Ekto- und Entoderm werden ansehnliche Mengen von Gallerte ausgeschieden und es zieht sich in Form zweier Flügel (*fl*) die Exumbrella über den Stammtheil weg. Der stielförmige Anhang der jungen Knospe (*o. s.*) bildet sich zu dem die Gallerte durchziehenden Gefäss aus, während die vorhin erwähnte Ausbuchtung sich zu dem unteren neben dem Schwimmsack verlaufenden Divertikel (*u. s.*) differenzirt. Es liegt auf der Hand, dass wir die beiden in Rede stehenden Gefässschenkel als Homologon des Saftbehälters auffassen dürfen. Von den Enden der beiden Schenkel verstreichen kräftige ektodermale Muskelfasern, zu zwei dreieckigen Platten angeordnet (*mu*), gegen den Anfangstheil des Stammes. Die ganze Schwimmglockenanlage ähnelt so sehr der ausgebildeten Glocke, dass es nicht schwer fällt, in ihr die der unteren Diphyidenglocke homologe Glocke zu erkennen, während die der oberen Glocke entsprechende Knospe (II) in dem vorliegenden Falle noch wenig entwickelt ist. Ein Exemplar der *Praya maxima*, das ich länger als eine Woche am Leben erhielt, stiess während dieser Zeit nach einander beide Schwimmglocken ab und ersetzte sie durch Reserveglocken, welche nach Ablauf mehrerer Tage nahezu die Grösse der früheren erreicht hatten. Am Anfangstheil des Stammes zeigte sie wiederum drei Reserveglockenanlagen: ein Beweis dafür, dass dieser Wechsel von Glocken ziemlich rasch sich abspielt. Die abgestossenen Glocken treiben sich noch längere Zeit im Wasser umher, ehe sie zerfallen.

Die beiden hier angeführten Beispiele mögen genügen, um die bei allen übrigen untersuchten Diphyidengattungen in analoger Weise sich abspielenden Vorgänge zu illustriren. Wir entnehmen aus den-

Digitized by Google

selben nun die Thatsache, dass die Unterschiede zwischen Monophyiden und Diphyiden noch schärfer sich präcisiren lassen, insofern nämlich bei ersteren mit der Bildung der einen definitiven Glocke überhaupt kein weiterer Glockenwechsel auftritt, sondern ihre heteromorphe definitive Glocke der zuerst gebildeten heteromorphen oberen Glocke der Diphyiden homolog ist. Da es sich empfehlen wird, überhaupt bei den Calycophoriden zwischen primärer Glocke und heteromorphen secundären zu unterscheiden, so können wir das Verhältniss auch präcis folgendermaassen formuliren: Bei den Monophyiden repräsentirt die einzige secundäre heteromorphe Glocke eine definitive, bei den Diphyiden unterliegen die zwei secundären heteromorphen Glocken einem ständigen Ersatz durch Glocken von identischer Form. Denken wir uns nun andererseits, dass die secundären Glocken der Diphyiden nicht abgestossen werden, sondern neben dem Nachschub jüngerer Glocken am Stamme zweizeilig sich gruppiren und identische Form annehmen (wie ja schon bei *Praya* die obere und untere Glocke sich auffällig ähneln), so erhalten wir die Vertreter der Polyphyiden, nämlich *Hippopodius* und *Vogtia*.

III. Über die Eudoxiengruppen der Diphyiden und deren Geschlechtsverhältnisse.

Bekanntlich bestehen die von dem Stamme der Monophyiden und Diphyiden sich loslösenden, als Eudoxien resp. Diplophysen bezeichneten Anhangsgruppen aus einem Magenschlauche mit dem Fangfaden, aus einer Deckschuppe und der Genitalschwimmglocke. Sie treiben sich, wie dies Leuckart zuerst klar erkannte, lange Zeit nach ihrer Loslösung von dem Stocke umher und vermögen sich selbständig zu ernähren und fortzupflanzen, da ihnen ja alle Attribute einer kleinen Colonie zukommen. Wie ich schon früherhin nachwies, so werden die Genitalglocken nach Entleerung ihrer Geschlechtsproducte durch Reserveglocken ersetzt, so dass hier ein ähnlicher Wechsel der medusenförmigen Schwimmglocken vorliegt, wie ich dessen soeben von den Diphyidenschwimmglocken Erwähnung that. In den früher von mir angezogenen Fällen wechselten die Ersatzglocken nie das Geschlecht — ein Verhalten, das ich auch für die Diplophysen von *Monophyes gracilis* und *irregularis* bestätigen kann. Wenn es nun auch nahe lag, die Eudoxien überhaupt als getrennt geschlechtliche Colonien aufzufassen, so lehrten doch fortgesetzte Beobachtungen, dass eine solche Verallgemeinerung nicht zutreffend ist. In Fig. 11 bilde ich

Digitized by Google

eine Eudoxiengruppe von *Abyla pentagona* ab, welche klar erkennen lässt, dass die grosse männliche Genitalglocke (*g. sch.*$_1$) von einer weiblichen Reserveglocke (*g. sch.*$_2$) verdrängt wird. Für die Geschlechtsverhältnisse der Diphyiden erscheint dieses Verhalten insofern von Interesse, als ja bekanntlich männliche und weibliche Eudoxiengruppen bald monöcisch an demselben Stamme knospen (z. B. *Praya, Diphyes Sieboldii* KÖLL., *D. turgida* GGBR.), bald diöcisch auf verschiedene Stöcke vertheilt sind (*Diphyes acuminata* LEUCK., *Galeolaria aurantiaca* VOGT). Gerade von *Abyla pentagona* geben VOGT[1] und LEUCKART[2] übereinstimmend an, dass sie eine diöcische Colonie repräsentirt, und zwar konnten beide Forscher lediglich männliche Colonien beobachten. Sollte es sich nun herausstellen, dass die Eudoxiengruppen diöcischer Colonien nach der Loslösung sowohl männliche als weibliche Genitalglocken produciren, so kann von einer Vertheilung der Geschlechter auf verschiedene Stöcke nur mit gewisser Reserve gesprochen werden. In unserem Falle wäre es z. B. möglich, dass zuerst lediglich männliche Genitalglocken gebildet werden, denen ein Nachschub weiblicher folgt, nachdem die Eudoxien vom Stamme sich loslösten. Weitere Untersuchungen müssen über das Schicksal der von monöcischen Colonien abstammenden Eudoxien Aufschluss geben.

Sehr auffällig weichen nach C. VOGT's Entdeckung die Anhangsgruppen der *Praya diphyes* von dem Typus der Eudoxien ab. Sie besitzen nämlich ausser den charakteristischen vier Constituenten: Magenschlauch, Fangfaden, Deckstück und Genitalschwimmglocke noch eine »Specialschwimmglocke«, d. h. eine medusenförmige Glocke, welcher jede Andeutung eines Magenstieles fehlt. Dagegen treten neben der Specialglocke zahlreiche Genitalglocken von sehr reducirter Form gleichzeitig auf. Freilich wurden die Angaben VOGT's vielfach in Zweifel gezogen und als GEGENBAUR die Geschlechtsverhältnisse der *Praya maxima* klargelegt hatte, glaubte man auch diejenigen der *Praya diphyes* als identisch gebildete in Anspruch nehmen zu müssen. Von besonderem Interesse war mir daher der Fund einer reizenden neuen Diphyide, welche an ihren Eudoxiengruppen genau dieselben Verhältnisse erkennen liess, wie sie VOGT für *Praya diphyes* beschreibt. Erst später wurde ich darauf aufmerksam, dass eine der von mir gefundenen Diphyide offenbar sehr nahe stehende Art durch METSCHNIKOFF in einer wenig bekannten und russisch geschriebenen Arbeit[3] als *Praya medusa* geschildert wird. Ich verzichte darauf, an dieser Stelle

[1] Sur les Siphonophores de la mer de Nice. S. 126.

[2] Zur näheren Kenntniss d. Siphonoph. v. Nizza. S. 25.

[3] Beiträge zur Kenntniss der Siphonophoren und Medusen. Verhandlungen der Gesellsch. f. Naturkunde. Moskau. T. VIII 1870. Taf. I.

Digitized by Google

eine eingehende Schilderung der neuen Form zu geben und erwähne lediglich, dass die beiden Schwimmglocken von fast gleicher Grösse sind und von der Seite gesehen eine keilförmige Gestalt besitzen. Ihr Schwimmsack ist von ansehnlicher Grösse und auf ihm verlaufen die beiden seitlichen Gefässe nicht gerade gestreckt, wie dies Fewkes von einer offenbar mit der *Praya medusa* identischen Diphyide abbildet,[1] sondern in grossen Bogen wie bei *P. maxima*. An beiden von mir aufgefundenen Exemplaren waren drei bereits weit entwickelte Reserveglocken ausgebildet.

Die Anhangsgruppen des Stammes erweisen sich auf ihren frühesten Entwickelungsstadien als aus fünf Knospen zusammengesetzt, welche späterhin zum Magenschlauch mit Fangfaden, Deckschuppe, Genitalglocke und Specialschwimmglocke heranwachsen. Neben der einen Knospe für die Genitalglocke treten frühzeitig vier bis sechs weitere Knospen auf, so dass an der ausgebildeten Eudoxiengruppe, wie dies Fig. 12 darstellt, ein Träubchen von Geschlechtskapseln sich inserirt. Die in Rede stehende Form ist monöcisch, wie ihre nächsten Verwandten *Praya diphyes* und *P. medusa*. Männliche und weibliche Geschlechtskapseln kommen indessen nicht neben einander an derselben Eudoxiengruppe vor, sondern letztere sind streng diöcisch gebildet. Was nun den Bau der ausgebildeten Eudoxiengruppe anlangt, wie ihn Fig. 12 von einer männlichen Gruppe versinnlicht, so gleicht die Deckschuppe (*d*) insofern der einer *Praya*, als das sonderbar gestaltete, gestreckte und an dem einen verbreiterten Ende mit zwei seitlichen Flügeln ausgestattete Gebilde von sechs blind endigenden Gefässcanälen durchzogen ist. Der Magenschlauch mit dem Fangfaden inserirt sich ziemlich in der Mitte der Schuppe; die Nesselbatterien sind intensiv orange gefärbt. Die Geschlechtsträubchen verhalten sich je nach dem Geschlecht ziemlich abweichend. Was zunächst die männlichen Gemmen (♂ *g*) anbelangt, so imponirt an ihnen die mächtige Entwickelung des Magenstieles, während andererseits die rudimentäre Ausbildung der Glocke nicht minder auffällig erscheint. Frühzeitig wird nämlich die untere Glockenhälfte in Folge der raschen Entwickelung des Magenstieles nach rückwärts gedrängt, so dass die Kuppe der Exumbrella dem einmündenden Gefässaste sich anschmiegt und nur der untere Umbrellartheil frei zu Tage tritt (Fig. 13). An den weiblichen Gonophoren bleibt hingegen der eine beschränkte Zahl von Eiern (drei bis vier) bergende Genitalklöppel von der Glockenwandung umhüllt. Sowohl männliche als auch weibliche Glocken lassen vier Gefässe, die in einen Ringcanal einmünden, erkennen. Die rudimentäre Aus-

[1] Bullet. Mus. Comp. Zool. Cambridge. Vol. VI. 1880. Taf. III Fig. 2.

Digitized by Google

bildung der Umbrella mag Veranlassung gegeben haben, dass zur Locomotion der Eudoxiengruppe eine Specialschwimmglocke sich differenzirte. Wie den beiden Hauptschwimmglocken, so fehlt auch den Specialglocken ein Magenstiel. Ihre Exumbrella ist einseitig verbreitert und flügelförmig ausgezogen, so dass das vom Stamme zur Subumbrella verlaufende Gefäss seitlich eintritt. Auf letzterer theilt es sich in vier Radiärcanäle, die indessen nicht von einem Punkt ausstrahlen, sondern zu zwei Paaren angeordnet durch einen bogenförmigen Canal verbunden werden. An sämmtlichen Specialglocken sind zwei gemeinsam entspringende Gefässe durch einen intensiv rothen Pigmentfleck ausgezeichnet. Das Pigment ist in den Entodermzellen und direct anliegenden Zellen der Gefässlamelle entwickelt. An dem Glockenrande treten, wie dies METSCHNIKOFF auch für *Praya medusa* hervorhebt, winzige rothe Flecken — rudimentären Randkörpern vergleichbar — auf, zwischen denen zahlreiche birnförmige Höcker, vielleicht rudimentären Tentakeln entsprechend, sich inseriren.

Die eben geschilderten Anhangsgruppen weichen von den entsprechenden Gruppen der *Praya maxima* auffällig ab. GEGENBAUR erkannte zuerst die Geschlechtsverhältnisse der letzteren und wies nach, dass sie nicht nur monäcisch ist, sondern auch, dass ihre Anhangsgruppen durchaus nach dem Typus der übrigen Diphyiden gebaut sind. Allerdings sind völlig geschlechtsreife Exemplare der *P. maxima* noch nicht beobachtet worden und ich will daher nicht verfehlen, die mit reifen Geschlechtsproducten erfüllten Genitalglocken unter schwacher Vergrösserung in Fig. 14 und 15 abzubilden. Das Ovarium, wie wir wohl kurz den mit Eiern erfüllten Genitalklöppel nennen dürfen, erfüllt nicht völlig den Subumbrellarraum, während der Hoden eine so enorme Entwickelung zeigt, dass er noch zu einem Drittel aus der Umbrella hervorragt. Nur die grössten Exemplare der *P. maxima* scheinen geschlechtsreif zu werden — wenigstens stammen die abgebildeten Genitalglocken von einem mächtigen Thiere, das mehr denn hundert Gruppen am Stamme aufwies. Keines der kleineren Exemplare, von denen zahlreiche zur Beobachtung gelangten, liess dagegen völlig reife Geschlechtsproducte erkennen. Als charakteristisch für *Praya maxima* möchte ich noch betonen, dass fast sämmtliche Anhangsgruppen gleichzeitig die Geschlechtsproducte heranreifen lassen — ein Verhalten, welches nicht dafür spricht, dass successive die Eudoxiengruppen vom Stamme sich loslösen und eine freie Existenz führen. Unter dem Gattungsnamen *Praya* sind demgemäss bis jetzt zwei Categorien von Diphyiden zusammengefasst worden, deren eine, durch *P. maxima* repräsentirt, Anhangsgruppen aufweisen, welche die gewohnten vier Constituenten einer Eudoxiengruppe besitzen, während

Digitized by Google

die anderen Categorien, nämlich *P. diphyes*, *P. medusa* und die von mir geschilderte neue Form nicht nur eine bemerkenswerthe Vermehrung der mit rudimentärer Umbrella ausgestatteten Gonophoren erkennen lässt, sondern auch durch den Besitz von Specialschwimmglocken unter den gesammten Diphyiden ausgezeichnet ist. Ich glaube wohl auf letzteren Charakter besonderen Werth legen zu dürfen und schlage demgemäss vor, die bisher unter dem gemeinsamen Gattungsnamen *Praya* beschriebenen Arten in zwei Gattungen zu vertheilen. Für die eine bisher als *maxima* oder *cymbiformis* beschriebene und von GEGENBAUR eingehend geschilderte Art behalte ich den Gattungsnamen *Praya* bei, während ich jene Diphyiden, welche durch den Besitz von Gonophorenträubchen mit rudimentären Glocken und durch Specialschwimmglocken an den Anhangsgruppen des Stammes ausgezeichnet sind, der neuen Gattung *Lilyopsis* zuweise. Wir kennen bis jetzt drei Arten von *Lilyopsis*, nämlich *L. diphyes* VOGT und KÖLLIKER, *L. medusa* METSCHNIKOFF und *L. rosea*, wie ich die von mir geschilderte Art benennen will.

Tafelerklärung.

Fig. 1. *Monophyes gracilis* CLS. mit dem Anfangstheile des Stammes. Schwache Vergrösserung.

Fig. 2. Anfangstheil des Stammes von *Monophyes gracilis*, *o* Ursprung des Ölbehälters, *s* zur Subumbrella verlaufendes Gefäss, *g* Knospe für die Genitalglocke und Deckschuppe, *f* Fangfaden, *m* Magenschlauch, *st* stielförmiger Ansatz für Magenschlauch und Fangfaden. $\frac{70}{1}$

Fig. 3. Primäre Glocke von *Monophyes irregularis* mit dem kleinen Stamm. $\frac{15}{1}$

Fig. 4. Stamm der Glocke Fig. 3 bei starker Vergrösserung mit der secundären definitiven Glockenanlage. *m* Magenschlauch, *f* Fangfaden. *d* und *g* Knospen für Deckschuppe und Genitalglocke, *a* und *b* Anhangsgruppen, denen Magenschlauch und Fangfaden fehlen. $\frac{140}{1}$

Fig. 5. Primäre Glocke von *Monophyes gracilis* mit dem kleinen oberhalb der Subumbrella sich inserirenden Stamme. $\frac{15}{1}$

Digitized by Google

Fig. 6. Der Stamm von Fig. 5 bei starker Vergrösserung. *s u* Subumbrella, *g* Radiärgefässe. $\frac{120}{1}$

Fig. 7. Am weitesten entwickelte Knospe für die definitive Glocke.

Fig. 8. Anfangstheil des Stammes von *Diphyes turgida* GEGBR. nach Entfernung der beiden Schwimmglocken. *I, II* und *III* drei Reserveglocken, *eu* Eudoxiengruppe, *s* Anlage des Ölbehälters, *s u* Subumbrella, *st* Stumpf, an dem die beiden grossen Glocken sich inserirten. $\frac{40}{1}$

Fig. 9. Reserveglocke der *Praya maxima*. *st* Anfang des Stammes, *o s* Anlage des oberen, *u s* des unteren Umbrellargefässes. $\frac{40}{1}$

Fig. 10. Weiter entwickelte Reserveglocke von *Praya maxima* mit der Knospe für eine zweite Glocke (II). *fl* flügelförmige Verbreiterungen der Exumbrella, *o s* und *u s* oberer und unterer Ast des Umbrellargefässes, *mu* Muskelplatten. $\frac{30}{1}$

Fig. 11. *Eudoxia cuboides* von *Abyla pentagona* mit männlicher Genitalschwimmglocke ($g\,sch_1$), welche durch eine weibliche ($g\,sch_2$) ersetzt wird, $g\,sch_3$ Knospe für eine dritte Genitalglocke. $\frac{15}{1}$

Fig. 12. *Lilyopsis rosea n. g.* und *n. sp.* Männliche Anhangsgruppe des Stammes, *d* Deckschuppe, *m* Magenschlauch mit Fangfaden, ♂*g* männliche Gonophoren, *sp. sch.* Specialschwimmglocke, *st* Stelle, wo der Stamm abgerissen ist. $\frac{15}{1}$

Fig. 13. *Lilyopsis rosea.* Anfangstheil einer männlichen Gemme, *st* Stiel, *gl* Glockenmantel mit den Radiärgefässen, *sp* mit Sperma erfüllter Magenschlauch. $\frac{140}{1}$

Fig. 14. *Praya maxima.* Weibliche Genitalschwimmglocke. } Loupen-
Fig. 15. *Praya maxima.* Männliche Genitalschwimmglocke. } vergr.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALTSVERZEICHNISS.

Seite

27. Roth: Über die von Hrn. Dr. Paul Güssfeldt in Chile gesammelten Gesteine 283
28. Burmeister: Berichtigung zu Coelodon (hierzu Taf. IV) 287
29. Rammelsberg: Über die Gruppe des Skapoliths 295

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE

aus den Jahren 1883 und 1884.

(In Commission in Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.)

Schrader: Gedächtnissrede auf Justus Olshausen . . . . . M. 1.00
Hagen: Geschwindigkeit des strömenden Wassers in verschiedenen Tiefen, untersucht nach den von Brünings ausgeführten Messungen . . . . . " 4.00
Tobler: Die altvenezianische Übersetzung der Sprüche des Dionysius Cato . . . . . " 3.50
Eichler: Beiträge zur Morphologie und Systematik der Marantaceen . . . . . " 6.30
Kronecker: Über bilineare Formen von vier Variabeln . . . . . " 2.50
Schrader: Zur Frage nach dem Ursprunge der altbabylonischen Cultur . . . . . " 3.00
Tobler: Über das Buch des Uguçon da Laodho . . . . . " 5.00
Dillmann: Über die Regierung, insbesondere die Kirchenordnung des Königs Zar'a-Jacob . . " 5.00
Imhoof-Blumer: Die Münzen der Dynastie von Pergamon . . . . . " 5.00
Roth: Beiträge zur Petrographie plutonischer Gesteine. IV. . . . . " 7.50
Virchow: Über alte Schädel von Assos und Cypern . . . . . " 5.00
Wiedemann: Über die Bestimmung des Ohm . . . . . " 4.50

Studer: Über die von S. M. S. Gazelle auf der Reise um die Erde 1874—1876 gesammelten Isopoden . . . . . " 2.50
Marshall: Agilardiella radiata . . . . . " 1.50
Krabbe: Über das Wachsthum des Verdickungsringes und der jungen Holzzellen in seiner Abhängigkeit von Druckwirkungen . . . . . " 4.50
Studer: Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—1876 gesammelten Asteriden und Euryaliden . . . . . " 4.50
Freudenthal: Die durch Averroes erhaltenen Fragmente Alexander's zur Metaphysik des Aristoteles " 3.00
Bohn: Der Tempel des Dionysos zu Pergamon . . . . . " 1.50

Register für die Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie zu Berlin vom Jahre 1874 bis 1881 M. 3.00

Digitized by Google

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im Auszuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden Theil des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus diesen Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der reinen Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschaften in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder von fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch demselben Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, Reden und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in Monatsheften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird in der Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften und Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen »Sitzungsberichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zuschicken zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu geben.

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämlich:

die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,

» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,

» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Fertigstellung des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1884 nicht zugekommen sein sollten, werden ersucht, hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamationen nur in Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1885 angebracht werden.

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchhändlerischen Bezuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann) in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungsberichte« oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften von Seiten der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in einzelnen Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten, zuzusenden. Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der genannten Buchhandlung in Verbindung setzen.

Digitized by Google

13892

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

HEFT VI.

JUNI 1885.

MIT TAFEL IV.

BERLIN 1885.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN.

Digitized by Google

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges **beschränkt werden.** Der Satz einer Mittheilung **wird erst begonnen**, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden **Holzschnitte** fertig sind und von besonders **beizugebenden Tafeln** die volle erforderliche Auflage **eingeliefert ist.**

§ 7.

Eine **für die Sitzungsberichte** bestimmte wissenschaftliche **Mittheilung darf in keinem** Falle vor der Ausgabe des **betreffenden Stückes anderweitig**, sei es auch nur **auszugsweise oder auch in** weiterer Ausführung, in deutscher **Sprache veröffentlicht sein** oder werden. Wenn der Verfasser **einer aufgenommenen** wissenschaftlichen Mittheilung **diese anderweit früher** zu veröffentlichen beabsichtigt, **als ihm dies gesetzlich** zusteht, bedarf er dazu **der Einwilligung der Gesammtakademie** oder der betreffenden **Classe.**

§ 8.

3. **Auswärts werden Correcturen** nur auf besonderes Verlangen **verschickt.** Die Verfasser verzichten damit auf **Erscheinen ihrer Mittheilungen** nach acht Tagen.

§ 9.

1. **Neben der vollständigen** Ausgabe der Sitzungsberichte **können bestimmte** Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen **auch abgesondert** in der Weise publicirt werden, **dass dieselben mit** Sondertitel und fortlaufender Paginirung **versehen und mit** besonderem Verkaufspreis in den **Buchhandel gebracht** werden.

§ 11.

1. **Jeder Verfasser** einer unter den »Wissenschaftlichen **Mittheilungen**« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich **fünfzig Sonderabdrücke** mit einem Umschlag, auf welchem **der Titel der Arbeit** wiederholt wird.

2. **Dem Verfasser steht** frei, auf seine Kosten weitere gleiche **Separatabdrücke** bis zur Zahl von noch zweihundert zu **unentgeltlicher** eigener Vertheilung abziehen zu lassen, **sofern er hiervon** rechtzeitig dem **redigirenden Secretar Anzeige gemacht** hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der **Secretar zusammen**, welcher darin den Vorsitz hatte. **Derselbe Secretar führt** die Oberaufsicht über die Redaction und **den Druck der** in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er **der redigirende** Secretar.

§ 29.

1. **Der redigirende** Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen **Theils** der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

Digitized by Google

30. Aus dem Bericht über die LEIBNIZ-Sitzung.

(Gedruckt im Bericht vom 2. Juli [St. XXXIII]: — ausgegeben am 9. Juli.)

Antrittsrede von Hrn. FR. EILHARD SCHULZE.

In der grossen Auszeichnung, mit welcher mich die Akademie durch die Wahl zum ordentlichen Mitgliede geehrt hat, erblicke ich vorwiegend eine Anerkennung meiner wissenschaftlichen Arbeitsrichtung. Gerade für den Zoologen, dessen Aufgaben von entgegengesetzten Seiten so verschieden beurtheilt werden, muss es von besonderem Werthe sein, die Richtung seines Strebens von den berufensten Beurtheilern gebilligt zu sehen.

Meinem Bildungsgange entsprechend, welcher mich von dem Studium der Medicin aus, von der berufsmässigen Beschäftigung mit der Anatomie des Menschen durch die vergleichende Anatomie zur Zoologie geführt hat, ist die Grundrichtung meiner Arbeiten stets die vergleichend anatomische gewesen.

Durch den Einfluss meines Lehrers MAX SCHULTZE war früh eine besondere Neigung zu histiologischen Untersuchungen, sowie zur Erforschung der mikroskopischen Thierwelt in mir geweckt worden, und durch die selbstgewonnene Überzeugung von der grossen Bedeutung der Entwickelungsgeschichte für die thierische Morphologie ward ich zu embryologischen Studien veranlasst.

So kam es, dass auf meine descriptiven und vergleichend anatomischen Arbeiten zunächst rein histiologische, darauf Studien über mikroskopische Organismen und schliesslich eine fortlaufende Reihe von Untersuchungen über den Bau und die Entwickelung der bisher so auffallend vernachlässigten Spongien folgte. Diese merkwürdige Thiergruppe, mit deren Studium ich noch jetzt beschäftigt bin, verspricht trotz oder vielmehr gerade wegen der Einfachheit ihrer Organi-

Digitized by Google

sation für die Lösung mancher allgemeinen Fragen von hervorragender Bedeutung zu werden.

Wenn ich bisher zu diesen Untersuchungen absichtlich nur die mir lebend zu Gebote stehenden Arten verwandt habe, so glaubte ich doch die von der grossen englischen Tiefsee-Erforschungs-Expedition erbeuteten und mir zur wissenschaftlichen Verwerthung angebotenen reichen Schätze von Glasschwämmen nicht zurückweisen zu dürfen, da ein eingehendes Studium der feineren Organisationsverhältnisse dieser bisher noch fast unbekannten Bewohner der grössten Meerestiefen besonders wichtige Ergebnisse zu liefern versprach.

Die bis jetzt gewonnenen Resultate erscheinen geeignet, eine feste Stütze für jene Theorie zu liefern, welche uns zu einer ungezwungenen und einheitlichen Auffassung der gesammten Lebewelt und ihrer Geschichte führt — für die Abstammungslehre, nach welcher sich die ganze ausgestorbene und lebende Thierwelt wie ein gewaltiger Baum darstellt, dessen zarte Wurzeln als allereinfachste Lebewesen schon lange vor der Silurperiode entstanden, in dessen stattlicher Krone wir jetzt an einem der jüngsten grünen Zweige das Geschlecht der Menschen blühen sehen.

Durch die Aufnahme in diesen Kreis hervorragender Gelehrter habe ich neue Anregung zu freudigem wissenschaftlichen Schaffen gewonnen, und ich hoffe, dass es mir auch gelingen wird, meinen Pflichten als Mitglied der Akademie gerecht zu werden.

Antwort des beständigen Secretars der physikalisch-mathematischen Classe, Hrn. E. du Bois-Reymond.

Ihr Erscheinen in unserem Kreise, Hr. Schulze, ist ein neues Glied in der Reihe von Wandlungen, welche die Wissenschaft von den Lebewesen, und deren Vertretung in der Akademie und an der ihr eng verbundenen Hochschule, während des letzten Vierteljahrhunderts erfuhren. Es wäre hier nicht an der Zeit zu verfolgen, wie einst Lichtenstein aus einem Arzt in holländischen Diensten am Cap der erste Professor der Zoologie an der jungen Berliner Universität, der Begründer der zoologischen Sammlung und des zoologischen Gartens, und jahrzehndelang der Zoologe der Akademie ward. Ausser

Digitized by Google

dem Erforscher des kleinsten Lebens, wie Ehrenberg selber das Feld seiner Thätigkeit nannte, und dem feinen Kenner der Insectenwelt, Klug, gab es aber damals unter uns neben Lichtenstein noch einen Zoologen, und zwar ersten Ranges, Niemand anders als Johannes Müller, dessen ragendes Haupt im Gedenken des heutigen Geschlechtes schon mythischer Nebelglanz umfängt.

Ausgegangen von der vergleichenden Physiologie, durcharbeitete er mit der ihm eigenen Energie, zum Theil unterstützt durch Gehülfen wie Henle, Troschel, Hrn. Cabanis, mehrere der wichtigsten Abtheilungen des lebenden und des ausgestorbenen Thierreiches, indem er bei tiefster Kenntniss der Gesammtorganisation aller Thiere im Sinne der alten Cuvier'schen Systematik classificirend verfuhr, und besonders absoluten Merkmalen nachging, in welchen er den Stein der Weisen für die Systematik erblickte. Der Mikrographie sich zuwendend, schuf er dann bei uns, wie Edward Forbes in England, jene wissenschaftliche Seefischerei, aus der, im Verein mit Liebig's Welt im Glase, allmählich die heutigen Aquarien und zoologischen Stationen sich entwickelten, und schliesslich auch die Challenger-Expedition hervorging, deren Ergebnisse zu verwerthen das sonst so eifersüchtige Ausland Ihrer Sachkenntniss, Hr. Schulze, zum Theil überlässt.

Aber wie bewundernswerth auch Müller's zoologische Arbeiten erscheinen, der ihn dabei leitende Gedanke kennzeichnet einen heute völlig überwundenen Standpunkt: der Gedanke, den allgemeinen Plan zu enträthseln, dessen Verwirklichung die periodisch schaffende Macht von Anbeginn der Lebewesen bis zum Auftreten des Menschen auf Erden sich vorsetzte. Müller's schmerzliche Sehnsucht nach besserer Einsicht, wie sie gelegentlich seines Fundes der Entstehung von Schnecken in Holothurien sich Luft machte, zu einer Zeit, wo Charles Darwin längst im Besitz des Geheimnisses war, erinnert fast an die Klage, welche Geibel dem greisen König auf Sans-Souci in den Mund legt, einem Volk als Held gesandt zu sein, dem nie der Muse Bild auf goldener Wolke erschien, zu einer Zeit, wo Götz und Werther schon den Sonnenaufgang der deutschen Poësie verkündet hatten.

Mit der Gewalt des Genius zog Johannes Müller stets Talente aller Art in die gerade von ihm bevorzugten Forschungskreise. Einer seiner Schüler aus früheren Jahren war Ihr unmittelbarer Vorgänger, Hr. Wilhelm Peters. Nachdem er sich in Nizza als Sammler bewährt hatte, entsandte ihn Müller nach dem südöstlichen Afrika, von wo er, nach unendlicher Mühsal, 1848 mit wissenschaftlichen Schätzen beladen heimkehrte, um drei Jahre später Mitglied der Akademie, und nach Lichtenstein's Tode, 1857, dessen Nachfolger an der Universität

Digitized by Google

und der zoologischen Sammlung zu werden. Was er, bei den damals noch sehr beschränkten Staatsmitteln, für diese Sammlung geleistet, weiss die Welt. Über die Art seiner wissenschaftlichen Thätigkeit, sein unermüdliches Beschreiben und Einordnen vorzüglich neuer Wirbelthierarten dünken sich die jungen Zoologen und Morphologen moderner Schule nur zu leicht erhaben. Möchten sie nicht vergessen, dass nur so der sichere Grund für den von ihnen geplanten Bau gewonnen werden kann, dass auch diese Arbeit gethan sein will, und noch lange nicht fertig ist. Peters' kühle, zähe, vorsichtige, ganz dem besonderen Thatsächlichen zugekehrte Natur, die Natur seiner nordischen Heimath, war freilich dafür mehr geschaffen, als für keck verallgemeinernde vorzeitige Phantasien. Aber man thäte ihm Unrecht, glaubte man, dass er die Bedeutung des von Darwin eröffneten unermesslichen Ausblickes verkannte. Gern betheiligte er sich bei den dem Britischen Forscher von der Akademie erwiesenen Ehren, und als Vorsteher der zoologischen Sammlung richtete er in neuerer Zeit seine Bemühungen auf Herstellung möglichst vollständiger Varietäten-Reihen, als des unentbehrlichen Apparates zur Kritik des Begriffes der Art.

Einen anderen Schüler Müller's, aus späterer Periode, haben Sie selber, Hr. Schulze, uns in's Gedächtniss gerufen, den früh verstorbenen Meister histiologischer und mikrographischer Forschung, Ihren Lehrer Max Schultze. Waren Sie schon so mit unserer Körperschaft gleichsam durch geistige Kindschaft verbunden, so gestatten Sie mir, an welchem diese Verschlingungen deutschen wissenschaftlichen Lebens als Zeitgenossen vorüberzogen, auch noch daran zu erinnern, was nur noch Wenigen bekannt ist, dass der Stolz unserer Chirurgie, der Lister'sche Verband, dass die Krönung unseres pathologischen Gebäudes, die neue Disciplin der Bakteriologie, ihren Ausgang nahmen von einem Versuche, den vor gerade fünfzig Jahren Ihr Vater bei Eilhard Mitscherlich, nach welchem Sie heissen, im chemischen Laboratorium der Akademie anstellte.

Solcher Schule und solcher Herkunft haben Sie sich, Hr. Schulze, von früh an würdig gezeigt. Seitdem Sie an der Seitenlinie der Fische das neue Sinnesorgan beschrieben, welches lehrt, dass mikroskopische Härchen, wie Geschmack, Geruch und Gehör, auch hydrodynamische Druckempfindung vermitteln, — so dass von den adaequaten Reizen der Sinnesorgane das Licht allein nicht durch Härchen wahrgenommen wird, — haben Sie nicht aufgehört, durch mannigfaltige Arbeiten die theilnehmende Aufmerksamkeit der Fachgenossen zu fesseln. Jetzt fällt Ihrer noch jugendlichen Kraft in diesem Kreise die glänzendste Erbschaft zu. Ihres Berufes wird es sein, die neue Gestalt der Zoologie, die in grossartigem, aber unbestimmten Umriss unserem geistigen

Digitized by Google

Auge vorschwebt, zu fester Bildung wenigstens theilweise auszuprägen; den leitenden Gedanken, von dem Lichtenstein nichts ahnte, dessen Aufgang Johannes Müller nicht erlebte, mit welchem sich zu befassen Peters sich scheute, hie und da im Einzelnen auszuführen; und so die Abstammungslehre, zu der Sie soeben emphatisch sich bekannten, mehr und mehr zum Rang einer wohlbegründeten Theorie zu erheben.

So wird Ihr Eintritt in die Akademie einen Abschnitt im wissenschaftlichen Leben einer ihrer wichtigsten Abzweigungen bezeichnen, indem ihr zugleich durch Sie der Ruhm erhalten wird, der ihr seit Pallas' und Illiger's Tagen nie ausging, eine Heimstätte strenger zoologischer Forschung zu sein.

Digitized by Google

Digitized by Google

31. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen.

Erste Mittheilung.

Von K. Weierstrass.

(Vorgetragen am 9. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXIV]; — ausgegeben am 16. Juli.)

Ist $f(x)$ eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze hat, so gilt bekanntlich die nachstehende Gleichung, in der u eine zweite reelle Veränderliche bedeutet und unter k eine von x und u unabhängige positive Grösse zu verstehen ist:

$$\text{(1.)} \qquad \lim_{k=0} \cdot \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x).$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz lässt sich leicht verallgemeinern.

Es werde irgend eine Function $\psi(x)$ von derselben Beschaffenheit wie $f(x)$ angenommen, welche ihr Zeichen nicht ändert, der Gleichung $\psi(-x) = \psi(x)$ genügt und überdies der Bedingung entspricht, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty} \psi(x)\, dx$$

einen endlichen Werth haben muss, der mit ω bezeichnet werden möge. Setzt man dann

$$\text{(2.)} \qquad F(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

so ist

$$\text{(3.)} \qquad \lim_{k=0} \cdot F(x,k) = f(x).$$

In Betreff des Beweises der Gleichungen (1, 3) möge Folgendes bemerkt werden. Es seien a_1, a_2, b_1, b_2 positive Grössen, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, so hat man

Digitized by Google

$$\frac{1}{k}\int_{-b_1}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du - \frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

$$= \frac{1}{k}\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{k}\int_{a_2}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

$$= f(-b_1 \ldots -a_1)\int_{\frac{a_1+x}{k}}^{\frac{b_1+x}{k}} \psi(u)\,du + f(a_2 \ldots b_2)\int_{\frac{a_2-x}{k}}^{\frac{b_2-x}{k}} \psi(u)\,du.^1$$

In Verbindung mit den in Betreff der Functionen $f(x), \psi(x)$ gemachten Annahmen lehrt diese Gleichung, dass das Integral

$$\frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

wenn man den Grössen x, k bestimmte Werthe giebt und dann a_1, a_2 unabhängig von einander unendlich gross werden lässt, sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert und somit das Integral

$$\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

eine wohldefinirte Grösse ist.

Dies festgestellt, sei nun δ eine beliebig klein anzunehmende positive Grösse, so ist

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{x-\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x+\delta}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

$$+ \frac{1}{2k\omega}\int_{x-\delta}^{x} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x}^{x+\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

$$= \frac{1}{2\omega} f(-\infty \ldots x-\delta)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty} \psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega} f(x+\delta \ldots +\infty)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty} \psi(u)\,du$$

$$+ \frac{1}{2\omega}\int_{0}^{\frac{\delta}{k}} \big(f(x-ku) + f(x+ku)\big)\,\psi(u)\,du.$$

---

[1] Ich bezeichne mit $f(x_1 \ldots x_2)$ einen Mittelwerth zwischen dem kleinsten und grössten derjenigen Werthe, welche $f(x)$ in dem Intervall von $x = x_1$ bis $x = x_2$ annimmt.

Digitized by Google

Daraus folgt:

$$F(x,k)-f(x)=\frac{f(-\infty\ldots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty}\psi(u)\,du$$

$$+\frac{1}{2\omega}\int_{0}^{\frac{\delta}{k}}\Big(f(x-ku)+f(x+ku)-2f(x)\Big)\psi(u)\,du$$

$$=\frac{f(-\infty\ldots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du$$

$$+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1\Big(f(x-\varepsilon\delta)+f(x+\varepsilon\delta)-2f(x)\Big),$$

wo $\varepsilon, \varepsilon_1$ positive, zwischen 0 und 1 enthaltene Grössen bedeuten.

Nun seien x_1, x_2 irgend zwei bestimmte Werthe von x, G die obere Grenze für den absoluten Betrag von $f(x)$, und g_1, g_2 zwei positive Grössen, die beliebig klein angenommen werden können. Dann kann man zunächst der Grösse δ einen so kleinen Werth geben, dass der absolute Betrag von

$$\tfrac{1}{2}\Big(f(x-u)+f(x+u)-2f(x)\Big)$$

stets kleiner als g_1 ist, wenn x in dem Intervall $(x_1\ldots x_2)$, und zugleich u in dem Intervall $(0\ldots\delta)$ angenommen wird. Hat man einen solchen Werth von δ fixirt, so kann man ferner eine positive Grösse k' so bestimmen, dass für jeden Werth von k, der $<k'$,

$$\frac{2G}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du<g_2,$$

also vermöge der vorstehenden Gleichung die Differenz zwischen $F(x,k)$ und $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g_1+g_2 ist, und zwar für jeden der betrachteten Werthe von x.

Hiermit ist also nicht nur bewiesen, dass $F(x,k)$ für jeden einzelnen Werth von x der Grenze $f(x)$ sich nähert, wenn k unendlich klein wird, sondern auch, dass die Annäherung für alle einem endlichen Intervalle angehörigen Werthe von x eine gleichmässige ist.

Aus der Gleichung (3.) ziehe ich nun eine bemerkenswerthe Folgerung.

Unter den Functionen $\psi(x)$, welche den oben angegebenen Bedingungen entsprechen, giebt es unzählige, welche transcendente ganze Functionen und zugleich so beschaffen sind, dass auch die zugehörigen Functionen $F(x,k)$ für jeden bestimmten Werth der Grösse k in be-

Digitized by Google

ständig convergirende Potenzreihen von x entwickelt werden können. Nimmt man für $\psi(x)$ eine derartige Function, z. B. $\psi(x) = e^{-x^2}$, so ergiebt sich der folgende, wie es mir scheint, merkwürdige und fruchtbare Satz:

A. »Ist $f(x)$ eine nur für reelle Werthe der Veränderlichen x eindeutig definirte und durchweg stetige Function, so lässt sich auf mannigfaltige Weise eine transcendente ganze Function $F(x, k)$ herstellen, welche ausser x noch einen veränderlichen (positiven) Parameter k enthält und so beschaffen ist, dass für jeden reellen Werth von x die Gleichung

$$\lim_{k=0} \cdot F(x, k) = f(x)$$

besteht.«

Unter der Bedingung, dass die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt werde, kann man ferner, wie gezeigt worden ist, nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse g', dem Parameter k einen so kleinen Werth k' geben, dass für jeden Werth von x die Differenz zwischen $F(x, k')$ und $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g' ist. Stellt man sodann $F(x, k')$ in der Form einer Potenzreihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

dar und bezeichnet die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe mit $G(x)$, so kann man, nach Annahme einer anderen positiven Grösse g'', dem n einen so grossen Werth geben, dass für jeden dem angenommenen Intervall angehörigen Werth von x der absolute Betrag von $F(x, k') - G(x)$ kleiner als g'', mithin der absolute Betrag von $f(x) - G(x)$ kleiner als $g' + g''$ ist.

Damit ist bewiesen:

B. »Ist $f(x)$ eine Function von der angegebenen Beschaffenheit, und wird die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt, so lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g, auf mannigfaltige Weise eine ganze rationale Function $G(x)$ bestimmen, welche in dem festgesetzten Intervalle sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass die Differenz $f(x) - G(x)$ ihrem absoluten Betrage nach beständig kleiner als g ist.«

Nun nehme man zwei unendliche Reihen positiver Grössen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

so an, dass $\lim_{\nu=\infty} \cdot a_\nu = \infty$ ist und $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ einen endlichen Werth hat;

Digitized by Google

dann kann man dem Vorstehenden gemäss eine Reihe von ganzen rationalen Functionen

$$G_1(x), G_2(x), G_3(x), \ldots$$

so bestimmen, dass (für $\nu = 1, 2, \ldots \infty$)

$$|f(x) - G_\nu(x)| < g_\nu$$

ist, wenn x in dem Intervall $(-a_\nu \ldots a_\nu)$ liegt. Setzt man sodann

$$f_0(x) = G_1(x), f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x),$$

so ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) = G_{n+1}(x),$$

und für jeden bestimmten Werth von x

$$\lim_{n=\infty} G_{n+1}(x) = f(x);$$

woraus sich

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

ergiebt.

Nun seien x_1, x_2 irgend zwei bestimmte, endliche Werthe von x, so ergiebt sich aus den Ungleichheiten

$$\begin{aligned} |f(x) - G_\nu(x)| &< g_\nu, (-a_\nu \leqq x \leqq a_\nu,) \\ |f(x) - G_{\nu+1}(x)| &< g_{\nu+1}, (-a_{\nu+1} \leqq x \leqq a_{\nu+1}) \end{aligned}$$

dass für jeden dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werth von x

$$|f_\nu(x)| < g_\nu + g_{\nu+1}$$

ist, sobald ν grösser ist als eine bestimmte Zahl ν', die dadurch definirt wird, dass jedes Intervall $(-a_\nu \ldots a_\nu)$, für welches $\nu > \nu'$, die Werthe x_1, x_2 beide enthalten muss. Man hat also

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} |f_\nu(x)| < \sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} (g_\nu + g_{\nu+1}), \text{ wenn } x_1 \leqq x \leqq x_2;$$

und es convergirt demzufolge die Reihe

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} f_\nu(x)$$

und somit auch die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

unbedingt und gleichmässig für die dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werthe von x. Es ist aber die Wahl der Grössen x_1, x_2 keiner andern Beschränkung unterworfen, als dass sie endliche reelle Werthe haben müssen, und die Functionen $f_\nu(x)$ sind unabhängig von

Digitized by Google

denselben; die vorstehende Reihe convergirt also unbedingt für jeden Werth von x und gleichmässig in jedem Intervall

$$x_1 \leqq x \leqq x_2,$$

dessen Grenzen endliche Werthe haben. Es gilt also das Theorem:

C. »Jede Function $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich auf mannigfaltige Weise darstellen in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder ganze rationale Functionen von x sind; diese Reihe convergirt unbedingt für jeden endlichen Werth von x, und gleichmässig in jedem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$, dessen Grenzen endliche Grössen sind.«

In Betreff des Satzes (B.) ist zu bemerken, dass man zur Begründung desselben nur anzunehmen braucht, es sei $\psi(x)$ eine transcendente ganze Function, welche für reelle Werthe von x die im Vorstehenden angegebenen Eigenschaften besitzt, nicht aber, dass auch $F(x, k)$ eine ganze Function von x sei, was keine nothwendige Folge der ersteren Annahme ist.

Setzt man nämlich, unter a, b zwei beliebig anzunehmende reelle Grössen verstehend,

$$F_1(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_a^b f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

so hat man für reelle Werthe von x

$$F(x, k) = F_1(x, k) + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{x-a}{k}}^{+\infty} f(x-ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{b-x}{a}}^{+\infty} f(x+ku)\,\psi(u)\,du,$$

und kann also, wenn a, b, x_1, x_2 der Bedingung

$$a < x_1 < x_2 < b$$

gemäss angenommen worden, und eine beliebig kleine positive Grösse g_1 gegeben ist, den Werth von k so fixiren, dass für jeden dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werth von x der absolute Betrag der Differenz $f(x) - F_1(x, k)$ kleiner als g_1 ist. Dies vorausgesetzt, kann man ferner, da $F_1(x, k)$ unbedingt eine (transcendente) ganze Function von x ist, nach Annahme irgend einer zweiten positiven Grösse g_2, eine ganze rationale Function $G(x)$ so bestimmen, dass in dem Intervall $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$

$$|G(x) - F_1(x, k)| < g_2,$$

also

$$|f(x) - G(x)| < g_1 + g_2$$

ist; was den Satz (B.) giebt.

Digitized by Google

Dieser Beweis des in Rede stehenden Satzes ist, wie ich glaube, vollkommen streng und reicht aus, wenn nur gezeigt werden soll, dass ganze rationale Functionen $G(x)$, welche sich einer gegebenen Function $f(x)$ in allen Punkten eines beliebig angenommenen Intervalls $(x_1 \ldots x_2)$ so genau anschliessen, wie man will, existiren und auch wirklich bestimmt werden können. Dagegen leidet die im Vorstehenden angegebene Bildungsweise solcher Functionen an einem wesentlichen Mangel. Setzt man

$$F_1(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k)_\nu x^\nu,$$

wo $(k)_\nu$ eine Function von k ist, für die sich der Ausdruck

$$(k)_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu!\, \omega k^\nu} \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(ku) \frac{d^\nu \psi(u)}{du^\nu} \cdot du$$

ergiebt, und

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (k)_\nu x^\nu;$$

so existiren zwar, wenn irgend eine positive Grösse δ gegeben ist Werthe von k und n, für welche in dem Intervall $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$

$$|f(x) - G^{(n)}(x, k)| < \delta$$

ist; es wird aber, wenn δ unendlich klein wird, k ebenfalls unendlich klein, und es tritt der Übelstand ein, dass aus dem vorstehenden Ausdruck von $(k)_\nu$ nicht zu ersehen ist, ob derselbe, wenn k unendlich klein wird, einer endlichen Grenze sich nähere oder doch wenigstens endlich bleibe, was unbedingt erforderlich ist, wenn auf die in Rede stehende Weise für einen beliebig kleinen Werth δ ein brauchbarer Annäherungsausdruck der Function $f(x)$ sich soll herstellen lassen

Wie dem angeführten Übelstande abzuhelfen ist, werde ich in einer folgenden Mittheilung zeigen.

Digitized by Google

Digitized by Google

32. Über das DIRICHLET'sche Integral.

Von L. KRONECKER.

(Vorgetragen am 9. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXIV]; — ausgegeben am 16. Juli.)

I. Bedeutet x eine reelle positive, auf das Intervall von Null bis X beschränkte, Veränderliche und $f(x)$ eine eindeutige, reelle, integrirbare, ihrem absoluten Werthe nach stets unter einer bestimmten Grösse M bleibende Function von x, welche sich für bis zu Null abnehmende Werthe von x einem bestimmten Grenzwerthe $f(0)$ nähert, so kann die allgemeine Frage nach den weiteren Bedingungen, unter welchen das DIRICHLET'sche Integral:

$$\int_0^{x'} f(x) \sin wx\pi \, d\log x,$$

für alle in dem Intervall von Null bis X liegenden Werthe von x', sich mit wachsendem w dem Werthe $\frac{1}{2}\pi f(0)$ nähert, unmittelbar auf die speciellere zurückgeführt werden, bei welcher der Grenzwerth der Function, für $x = 0$, selbst gleich Null ist.

Setzt man nämlich $f(x) - f(0) = f_0(x)$, so ist:

$$\int_0^{x'} f(x) \sin wx\pi \, d\log x = \int_0^{x'} f_0(x) \sin wx\pi \, d\log x + f(0) \int_0^{x'} \sin wx\pi \, d\log x,$$

und dass hier der Factor von $f(0)$ sich mit wachsendem w in der That dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$ nähert, geht am Einfachsten daraus hervor, dass

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x'} \sin wx\pi \, d\log x = \frac{1}{2} \lim_{w=\infty} \int_{-x'w}^{+x'w} \sin z\pi \, d\log z = \lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \int_k^{k+1} \sin z\pi \, d\log z,$$

$$\int_k^{k+1} \frac{\sin z\pi}{z} dz = \int_0^1 (-1)^k \frac{\sin z\pi}{z+k} dz \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \frac{(-1)^k}{z+k} = \frac{\pi}{\sin z\pi}$$

ist.

II. Es sind hiernach nur für Functionen $f_0(x)$, die sich für $x = 0$ der Null nähern, die Bedingungen zu untersuchen, unter denen der Grenzwerth des Integrals:

Digitized by Google

$$(A) \qquad \int_0^{x'} f_0(x) \sin wx\pi \, d \log x,$$

für wachsende Werthe von w, oder also der Grenzwerth des Integrals:

$$(A^0) \qquad \int_0^{x'} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma} \, d \log x$$

für bis zu Null abnehmende Werthe von σ, gleich Null wird.

Das Integral (A^0) geht, wenn man darin σx an Stelle der Integrationsvariabeln x setzt, in das Integral:

$$(A') \qquad \int_0^{\frac{x'}{\sigma}} f_0(\sigma x) \sin x\pi \, d \log x$$

über. Da nun, auf Grund der Voraussetzung: $\lim_{x=0} f_0(x) = 0$, für irgend eine gegebene, beliebig kleine, positive Grösse τ und für irgend eine gegebene positive Grösse ξ der Werth x_0 so klein angenommen werden kann, dass für alle Werthe von x, die kleiner als x_0 sind,

$$|f_0(x)| < \frac{\tau}{\pi\xi}$$

wird, und da für alle positiven Werthe von x:

$$|\sin x\pi| < x\pi$$

ist, so wird für alle positiven Werthe von x, die kleiner als ξ sind, und für alle positiven Werthe von σ, die kleiner als $\frac{x_0}{\xi}$ sind,

$$\left| f_0(\sigma x) \frac{\sin x\pi}{x} \right| < \frac{\tau}{\xi},$$

und also der absolute Werth des Integrals:

$$(B) \qquad \int_0^{\xi} f_0(\sigma x) \sin x\pi \, d \log x$$

kleiner als τ. Der Grenzwerth des Integrals (B) für abnehmende Werthe von σ ist daher gleich Null, und die Gleichung:

$$(B^0) \qquad \lim_{\sigma=0} \int_{\xi}^{\frac{x'}{\sigma}} f_0(\sigma x) \sin x\pi \, d \log x = \lim_{\sigma=0} \int_{\xi\sigma}^{x'} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma} \, d \log x = 0.$$

in welcher man für ξ irgend einen bestimmten positiven Werth, z. B. den Werth $\xi = 1$ nehmen kann, stellt also eine nothwendige

Digitized by Google

und hinreichende Bedingung dafür dar, dass der Grenzwerth des Integrals (A') mit abnehmendem Werthe von σ verschwinde.

III. Ebenso wie das Integral (B) nähert sich auch, für irgend welche positiven Werthe von x' und ξ', das Integral:

$$\int_{\frac{x'}{\sigma}}^{\frac{x'}{\sigma}+\xi'} f_0(\sigma x) \sin x\pi \, d\log x \qquad (\xi' > 0)$$

mit abnehmendem σ dem Werthe Null. Denn es verwandelt sich, wenn man $x = \frac{x'}{\sigma} + z$ setzt, in

$$\sigma \int_0^{\xi'} f_0(\sigma z + x') \sin\left(z + \frac{x'}{\sigma}\right)\pi \frac{dz}{\sigma z + x'},$$

und das mit σ multiplicirte Integral ist seinem absoluten Werthe nach kleiner als $\frac{\xi' M_0}{x'}$, da der absolute Werth von $f_0(x)$ (für alle Werthe von x in dem betrachteten Intervalle, d. h. für $0 < x < X$) kleiner als M_0 ist, wenn mit M_0 der Werth: $M + |f(0)|$ bezeichnet wird.

IV. Man kann hiernach in dem Integral (A') — ohne den Werth, dem es sich für $\sigma = 0$ nähert, zu ändern — die Grenzen 0 und $\frac{x'}{\sigma}$ durch die Grenzen ξ und $\frac{x'}{\sigma} + \xi'$ ersetzen, wo ξ und ξ' willkürlich anzunehmende positive Grössen bedeuten. Es wird also, wenn der Einfachheit halber:

$$f_0(x) = x\phi(x)$$

gesetzt wird:

$$\text{(C)} \qquad \lim_{\sigma=0} \int_0^{x'} f_0(x) \sin\frac{x\pi}{\sigma} \, d\log x = \lim_{\sigma=0} \int_{\xi}^{\frac{x'}{\sigma}+\xi'} \sigma\phi(\sigma x) \sin x\pi \, dx.$$

Wenn man nun für ξ irgend eine ungrade Zahl $2m+1$ setzt und dann ξ' so wählt, dass $\frac{x'}{\sigma} + \xi'$ der nächsten über dem Werth von $\frac{x'}{\sigma}$ liegenden graden Zahl gleich wird, so lässt sich das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (C) als Summe von Integralen:

$$\sum_h \int_h^{h+1} \sigma\phi(\sigma x) \sin x\pi \, dx$$

darstellen, welche, wenn in jedem einzelnen Integrale $x + h$ an Stelle der Integrationsvariabeln x gesetzt wird, in:

Digitized by Google

$$(C') \qquad \int_0^1 \sigma \sum_h (-1)^h \phi(\sigma x + \sigma h) \sin x\pi \, dx$$

übergeht. Die Summation in Beziehung auf h ist hier durch die Bedingungen:

$$2m + 1 \leq h \leq 2\left[\frac{x'}{2\sigma}\right] + 1$$

bestimmt, wenn nach Gauss'scher Weise mit $[a]$ die der Grösse a nächste, kleinere ganze Zahl bezeichnet wird.

Für abnehmende Werthe von σ verschwindet der Grenzwerth eines einzelnen $h$ten Gliedes der unter dem Integralzeichen stehenden Summe sowohl dann, wenn h eine bestimmte Zahl, und also der Grenzwerth von $\sigma(x + h)$ für $\sigma = 0$ gleich Null, als auch dann, wenn dieser Grenzwerth eine bestimmte positive Grösse $\mathfrak{p}$ ist. Denn

$$\lim_{\sigma=0} \sigma\phi(\sigma x + \sigma h) \text{ oder } \lim_{\sigma=0} \frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{x + h}$$

ist in dem einen Falle gleich Null, weil $\lim_{\sigma=0}(\sigma x + \sigma h) = 0$ und demnach

$$\lim_{\sigma=0} f_0(\sigma x + \sigma h) = \lim_{x=0} f_0(x) = 0$$

ist, in dem anderen Falle, weil $\lim_{\sigma=0} f_0(\sigma x + \sigma h) = f_0(\mathfrak{p}) < M_0$ und

$$\lim_{\sigma=0} \frac{1}{x + h} = \lim_{\sigma=0} \frac{\sigma}{\sigma x + \sigma h} = \lim_{\sigma=0} \frac{\sigma}{\mathfrak{p}} = 0$$

ist. Man kann daher zu dem Integrale (C'), ohne seinen Grenzwerth für $\sigma = 0$ zu verändern, das Integral:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \sigma\big(\phi(\sigma x + 2m\sigma + \sigma) + \phi(\sigma x + 2r\sigma + \sigma)\big) \sin x\pi \, dx \qquad \left(r = \left[\frac{x'}{2\sigma}\right]\right)$$

addiren und demgemäss an Stelle des Integrals (C') das Integral:

$$\int_0^1 \sigma \sum_h (-1)^h \phi(\sigma x + \sigma h) \sin x\pi \, dx$$

nehmen, wenn die Summation auf die Werthe:

$$h = 1, 2, 3, \ldots\ldots 2\left[\frac{x'}{2\sigma}\right] + 1$$

erstreckt und durch den Strich über dem Summenzeichen angedeutet wird, dass das erste und letzte Glied der Summe mit dem Factor $\frac{1}{2}$ zu versehen ist. Hiernach wird:

Digitized by Google

$$(D)\quad \lim_{\sigma=0}\int_0^{x'} f_0(x)\sin\frac{x\pi}{\sigma}\,d\log x = \lim_{\sigma=0}\int_0^1 \sigma\sum_h{}'(-1)^h\phi(\sigma x+\sigma h)\sin x\pi\,dx,$$

und die Gleichung:

$$(D^0)\qquad \lim_{\sigma=0}\int_0^1 \sigma\sum_h{}'(-1)^h\phi(\sigma x+\sigma h)\,d\cos x\pi = 0$$

stellt also eine nothwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, dass mit abnehmenden Werthen von σ zugleich der Werth des Integrals (A') verschwinde.

V. Bedeutet x^0 irgend eine positive Grösse, die kleiner als x' ist, so verschwindet offenbar der Grenzwerth:

$$\lim_{\sigma=0}\sigma\sum_h{}'(-1)^h\phi(\sigma x+\sigma h) \qquad (0\leqq x\leqq 1),$$

wenn die Summation nur auf alle diejenigen Zahlen h erstreckt wird, für welche

$$h > 2\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]$$

ist. Denn, da für alle diese Zahlen h die Werthe von $\phi(\sigma x+\sigma h)$, für beliebig kleine Werthe von σ, unter einer bestimmten Grenze bleiben, indem

$$|\phi(\sigma x+\sigma h)| = \left|\frac{f_0(\sigma x+\sigma h)}{\sigma x+\sigma h}\right| < \frac{M_0}{x^0}$$

ist, so nähert sich

$$\sigma\sum_k \phi(2\sigma\delta+2\sigma k) \qquad \left(\left[\frac{x_0}{2\sigma}\right] < k \leqq \left[\frac{x'}{2\sigma}\right]\right),$$

für jeden beliebigen zwischen Null und Eins liegenden Werth von δ, mit abnehmendem σ einem und demselben festen durch das Integral $\int_{x^0}^{x'}\phi(z)\,dz$ bezeichneten Grenzwerth. Das Aggregat der positiven Glieder in der obigen Summe:

$$\sum_h{}'(-1)^h\sigma\phi(\sigma x+\sigma h)$$

erreicht also bei abnehmendem σ denselben Werth wie das der negativen, d. h. es ist:

$$\lim_{\sigma=0}\sigma\sum_h{}'(-1)^h\phi(\sigma x+\sigma h)$$

und also auch:

$$\lim_{\sigma=0}\int_0^1 \sigma\sum_h{}'(-1)^h\phi(\sigma x+\sigma h)\,d\cos x\pi$$

Digitized by Google

gleich Null, wenn die Summation auf alle in dem Intervalle von $\frac{x^0}{\sigma}$ bis $\frac{x'}{\sigma}$ enthaltenen ganzen Zahlen h erstreckt wird. Es besteht demnach für je zwei beliebige (in dem betrachteten Intervalle von o bis X liegende) Grössen x^0, x' die Gleichung:

$$\text{(E)} \quad \lim_{\sigma=0} \int_{\frac{x^0}{\sigma}}^{\frac{x'}{\sigma}} \sigma\phi(\sigma x) \sin x\pi\, dx = \lim_{\sigma=0} \int_{x^0}^{x'} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x = 0,$$

und die Gleichung (B°) muss daher für jede beliebige positive Grösse x' gelten, sobald sie nur für irgend eine bestimmte Grösse x^0 besteht.

Das Resultat der bisherigen Entwickelungen lässt sich demgemäss in folgender Weise formuliren:

> Um erschliessen zu können, dass der Grenzwerth des über jeden beliebigen Theil des Intervalles (o, X) ausgedehnten Integrals:
>
> $$\int f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x$$
>
> für $\sigma = o$ verschwinde, genügt der Nachweis, dass dies für irgend ein bestimmtes Theilintervall $(\xi\sigma, x^0)$ der Fall ist, d. h. dass
>
> $$\text{(F)} \qquad \lim_{\sigma=0} \int_{\xi\sigma}^{x^0} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x = 0$$
>
> wird, wenn für ξ und x^0 irgend zwei bestimmte positive Grössen genommen werden.

Es genügt also z. B. der Nachweis, dass die Gleichung (F) für $\xi = x^0 = 1$ besteht, d. h. also, dass

$$\text{(F')} \qquad \lim_{\sigma=0} \int_{\sigma}^{1} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x = 0$$

ist.

Die Gleichung (F) kann durch die oben mit (D°) bezeichnete Gleichung ersetzt werden. Es genügt also der Nachweis, dass für irgend eine ganze Zahl m und für irgend eine Grösse x^0:

$$\text{(F°)} \quad \lim_{\sigma=0} \int_{0}^{1} \sigma \sum_{h} (-1)^h \phi(\sigma x + \sigma h)\, d\cos \pi x = 0 \qquad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

wird.

Digitized by Google

VI. Die Gleichung (F′) kann durch die Gleichung:

$$\text{(G)} \qquad \lim_{x^0=0} \lim_{\xi=\infty} \lim_{\sigma=0} \int_{\xi\sigma}^{x^0} f_0(x) \sin\frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x = 0$$

ersetzt werden. Denn einerseits folgt offenbar die Gleichung (G) aus der Gleichung (F′), da für jeden Werth von x^0, das Integrationsgebiet $(\xi\sigma\,,\, x^0)$ ein Theil des Intervalles $(0\,,\, X)$ ist; andererseits lässt sich aber auch die Gleichung (F′) aus der Gleichung (G) erschliessen. Wenn nämlich für jede gegebene, positive, beliebig kleine Grösse τ eine (wenn auch noch so kleine) Grösse x^0 und eine (wenn auch noch so grosse) Zahl ξ bezeichnet werden kann, für die sich nachweisen lässt, dass der absolute Werth von:

$$\lim_{\sigma=0} \int_{\xi\sigma}^{x^0} f_0(x) \sin\frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x$$

kleiner als τ ist, so folgt mit Hülfe der Gleichungen:

$$\lim_{\sigma=0} \int_{\xi\sigma}^{\sigma} f_0(x) \sin\frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x = 0\,, \qquad \lim_{\sigma=0} \int_{x^0}^{1} f_0(x) \sin\frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x = 0\,,$$

dass auch der absolute Werth von:

$$\lim_{\sigma=0} \int_{0}^{1} f_0(x) \sin\frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x$$

kleiner als jene gegebene, beliebig kleine Grösse τ sein muss.

Es kann nun ebenso die Gleichung (F°) durch die Gleichung:

$$\text{(G°)} \quad \lim_{x^0=0} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \int_{0}^{1} \sigma \sum_{h} (-1)^h \phi(\sigma x + \sigma h)\, d\cos x\pi = 0 \quad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

ersetzt werden; denn für $\sigma = 0$ verschwindet, wie schon oben gezeigt worden ist, der Werth von:

$$\sigma \sum_{h} (-1)^h \phi(\sigma x + \sigma h)\,,$$

sobald die Summation auf die Zahlen von 1 bis m und auf alle in irgend einem Intervalle von $\frac{x^0}{\sigma}$ bis $\frac{x'}{\sigma}$ enthaltenen ganzen Zahlen ausgedehnt wird.

Um das Bestehen der Gleichung (G°) erschliessen zu können, bedarf es nur des Nachweises, dass für jede gegebene positive Grösse τ eine (wenn auch noch so kleine) Grösse x^0 und eine (wenn auch noch so

Digitized by Google

grosse) Zahl m bezeichnet werden kann, für die der absolute Werth des Integrals:

$$\int_0^1 \sigma \sum_h^{\bar{}} (-1)^h \phi(\sigma x + \sigma h)\, d\cos x\pi \qquad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) < \frac{x^0}{2\sigma}\right),$$

bei hinreichend kleinen Werthen von σ, kleiner als τ bleibt.

VII. Die Gleichung (G) ist offenbar erfüllt, wenn das Integral:

$$\int_0^x f_0(x)\, d\log x$$

absolut convergent ist, da alsdann:

$$\lim_{x^0=0} \int_0^{x^0} |f_0(x)|\, d\log x = 0$$

und demnach auch für jeden Werth von σ:

$$\lim_{x^0=0} \int_0^{x^0} f_0(x) \sin\frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x = 0$$

wird.[1] Da ferner die Gleichung (G), wenn man darin $\xi = 0$ setzt, mittels partieller Integration in folgende übergeht:

---

[1] Vergl. Hrn. P du Bois-Reymond's Note: »Sur les formules de représentations de fonctions« in den Comptes Rendus von 1881. Bd. 92. S. 915 und 962. Hier ist ferner folgende Äusserung Dirichlet's zu citiren, welche sich in einem von ihm an Gauss gerichteten Briefe vom 20. Februar 1853 findet:

»Ist $f(\beta)$ so beschaffen, dass die Differenz $f(\beta) - f(0)$ sich als ein Product darstellen lässt, dessen erster Factor $\phi(\beta)$ für ein unendlich kleines β endlich bleibt, während der zweite, den ich positiv voraussetze und $\dot{\psi}(\beta)$ nennen will, die Eigenschaft besitzt, dass das Integral $\int_0^\delta \dot{\psi}(\beta)\frac{d\beta}{\beta}$, wie es z. B. für jede positive Potenz β^p der Fall ist, für ein unendlich kleines δ selbst unendlich klein wird, so darf man $\int_0^\delta f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\, d\beta$ nur in die beiden Bestandtheile

$$f(0)\int_0^\delta \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\, d\beta + \int_0^\delta \phi(\beta)\sin k\beta\, \frac{\dot{\psi}(\beta)}{\sin\beta}\, d\beta$$

zerlegen, von denen der erste für ein unveränderliches δ durch Wachsen von k in $\frac{\pi}{2}f(0)$ übergeht, während der zweite für ein gehörig klein gewähltes δ immer kleiner bleibt als eine beliebig kleine Grösse.«

Unser Correspondent Hr. E. Schering hat die Freundlichkeit gehabt, mir die von Dirichlet an Gauss gerichteten Briefe zu übersenden, um davon Abschrift zu nehmen und sie für die Herausgabe der Dirichlet'schen Werke zu benutzen.

Digitized by Google

$$\lim_{x^0=0}\lim_{\sigma=0}\int_0^{x^0}\left(\sin\frac{x\pi}{\sigma}-\int_0^{x}\sin\frac{x\pi}{\sigma}d\log x\right)d\psi(x)=0,$$

wo $\psi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f_0(x)dx$ ist, so resultirt hier auch die Bedingung:

$$\lim_{x^0=0}\int_0^{x^0}|\psi'(x)|\,dx=0,$$

welche sich ebenfalls schon in der angeführten Note des Hrn. P. DU BOIS-REYMOND findet.

VIII. Um die Bedeutung der mit (G^0) bezeichneten Bedingungsgleichung darzulegen, bemerke ich zuvörderst, dass die Summe:

$$\sum_h{}'(-1)^h\phi(\sigma x+\sigma h) \qquad (h=2m+1,\ 2m+2,\ \ldots 2r+1)$$

in der Form:

$$\tfrac{1}{2}\sum_h{}'(-1)^h\big(\phi(\sigma x+\sigma h)-\phi(\sigma x+\sigma h+\sigma)\big) \qquad (h=2m+1, 2m+2,\ldots 2r)$$

dargestellt werden kann.

Setzt man nun voraus, dass die Gleichung $y=\phi(x)$ in rechtwinkligen Coordinaten x, y eine Curve $\mathfrak{C}$ repräsentirt, so kann man sich dazu für jeden bestimmten Werth von σ eine zweite Curve $\mathfrak{C}_\sigma$ construiren, welche durch die Gleichung:

$$y=\phi(x)+\big(\phi(x)-\phi(x+\sigma)\big)\sin\frac{x\pi}{\sigma}$$

für die Werthe von $x=(2m+1)\sigma$ bis $x=x^0$ dargestellt wird. Jede solche Curve $\mathfrak{C}_\sigma$, deren Ordinaten für einen zwischen σh und $\sigma(h+1)$ gelegenen Abscissenwerth $\sigma x+\sigma h$ auch durch:

$$\phi(\sigma x+\sigma h)+(-1)^h\big(\phi(\sigma x+\sigma h)-\phi(\sigma x+\sigma h+\sigma)\big)\sin x\pi \qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

ausgedrückt werden, schneidet die ursprüngliche Curve $\mathfrak{C}$ in den Punkten, deren Abscissen ganze Vielfache von σ sind. Denkt man sich in diesen Schnittpunkten die Curve $\mathfrak{C}_\sigma$ abwechselnd über und unter der Curve $\mathfrak{C}$ verlaufend, so »umschlingt« sie die Curve $\mathfrak{C}$ desto enger, je kleiner σ wird. Das Integral in (G^0):

$$\int_0^1\sigma\sum_h{}'(-1)^h\phi(\sigma x+\sigma h)\,d\cos x\pi$$

drückt aber offenbar den von den beiden Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_\sigma$ umschlossenen (in üblicher Weise positiv oder negativ zu rechnenden) Flächenraum aus, und es lässt sich daher die Bedeutung der Bedingungsgleichung (G^0) dahin formuliren:

Digitized by Google

Es soll die Umschlingung der Curve $\mathfrak{C}_\sigma$ um die Curve $\mathfrak{C}$ mit abnehmendem σ eine immer engere werden, und zwar in der Weise, dass dabei der Gesammt-Zwischenraum beliebig verkleinert wird.

IX. Die Gleichung (G^0) wird offenbar erfüllt, wenn der Ausdruck selbst, der dort unter dem Integralzeichen mit $d\cos x\pi$ multiplicirt ist, den Grenzwerth Null hat, und die Gleichung:

$$(H)\quad \lim_{x^0=0}\lim_{m=\infty}\lim_{\sigma=0}\sigma\bar{\sum_h}(-1)^h\phi(\sigma x+\sigma h)=0 \qquad \left(m\leqq\tfrac{1}{2}(h-1)\leqq\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right];(0\leqq x\leqq 1)\right)$$

enthält daher eine hinreichende Bedingung für das Verschwinden des Grenzwerthes:

$$\lim_{\sigma=0}\int_0^{x'}\phi(x)\sin\frac{x\pi}{\sigma}\,dx$$

bei beliebigem Werthe von x'

Um die Bedeutung der Bedingung (H) darzulegen, sei zuvörderst bemerkt, dass:

$$\sigma\bar{\sum_h}(-1)^h\phi(\sigma x+\sigma h) \qquad \left(m\leqq\tfrac{1}{2}(h-1)\leqq\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

sich als eine Summe von zweiten Differenzen:

$$\sum_k\sigma\left(-\tfrac{1}{2}\phi(\sigma x+2\sigma k-\sigma)+\phi(\sigma x+2\sigma k)-\tfrac{1}{2}\phi(\sigma x+2\sigma k+\sigma)\right)$$
$$\left(k=m+1,\ m+2,\ldots\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

darstellen lässt. Jede dieser zweiten Differenzen giebt den (in üblicher Weise positiv oder negativ genommenen) Werth des Flächeninhalts eines Dreiecks an, dessen Eckpunkte durch die Abscissen:

$$\sigma x+2\sigma k-\sigma\ ,\quad \sigma x+2\sigma k\ ,\quad \sigma x+2\sigma k+\sigma$$

und die zugehörigen Ordinaten:

$$\phi(\sigma x+2\sigma k-\sigma)\ ,\quad \phi(\sigma x+2\sigma k)\ ,\quad \phi(\sigma x+2\sigma k+\sigma)$$

bestimmt sind. Die Bedingung (H) verlangt daher,

dass die algebraische Summe der Inhalte aller dieser Dreiecke, für

$$k=m+1\ ,\ m+2\ ,\ \ldots\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right],$$

mit abnehmendem σ sich der Null nähere.

Jene Summe $\sigma\Sigma(-1)^h\phi(\sigma x+\sigma h)$ ist ferner als der Zuwachs aufzufassen, den die Summe:

$$(J_{2\sigma})\qquad \bar{\sum_k}2\sigma\phi(\sigma x+\sigma+2\sigma k) \qquad \left(k=m,\ m+1,\ m+2,\ldots\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

erhält, wenn man zur Summe:

$$(J_\sigma)\qquad \bar{\sum_h}\sigma\phi(\sigma x+\sigma h) \qquad \left(m\leqq\tfrac{1}{2}(h-1)\leqq\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

Digitized by Google

übergeht. Für solche Functionen ϕ, für die sich diese Summe mit abnehmendem σ einem bestimmten Grenzwerthe, also dem Werthe des Integrals:

$$\int_0^{x^0} \phi(z)\, dz$$

nähert, ist daher $\sigma \overline{\sum}(-1)^h \phi(\sigma x + \sigma h)$ der Zuwachs, welchen der durch die Summe $(J_{2\sigma})$ dargestellte »angenäherte« Integralwerth erhält, wenn man in der Mitte zwischen je zwei Ordinaten noch eine neue einschaltet.

Die Bedingung (H) kann aber, wie das Beispiel:

$$\phi(z) = \frac{1}{z \log z}$$

zeigt, auch erfüllt sein, wenn $\int \phi(z)\, dz$, von Null an genommen, keinen endlichen Werth hat.

Behufs Orientirung über das Maass der Anforderung, welche durch die Bedingung (H) an die Natur der Function ϕ gestellt wird, kann man den Fall in's Auge fassen, in welchem die Function ϕ Differentialquotienten ϕ', ϕ'' hat, und in welchem:

$$\sum_k \sigma\left(-\tfrac{1}{2}\phi(\sigma x + 2\sigma k - \sigma) + \phi(\sigma x + 2\sigma k) - \tfrac{1}{2}\phi(\sigma x + 2\sigma k + \sigma)\right)$$

mit hinreichender Annäherung durch:

$$-\tfrac{1}{2}\sigma^3 \sum_k \phi''(\sigma x + 2\sigma k)$$

oder auch durch:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 (\phi'(0) - \phi'(x^0))$$

dargestellt wird. In diesem Falle wird — bei endlichen Werthen der Ableitungen $\phi'(x)$ — die linke Seite der Gleichung (H) mit abnehmenden σ unendlich klein wie σ^2.

X. Die Gleichung (H) geht, wenn man darin die Function $\frac{f_0(x)}{x}$ an Stelle von $\phi(x)$ einführt, in folgende über:

$$(H^0) \quad \lim_{x^0=0} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \overline{\sum_h}(-1)^h \frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{x + h} = 0 \quad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right],\ 0 \leqq x \leqq 1\right).$$

Falls nun nachgewiesen werden kann, dass der absolute Werth jeder von $h = 2m + 1$ bis zu irgend einem der folgenden Werthe von h erstreckten Summe:

$$\sum_h (-1)^h f_0(\sigma x + \sigma h) \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

für hinreichend kleine Werthe von σ, kleiner als eine bestimmte Zahl N_0 ist, so lässt sich daraus nach jener bekannten ABEL'schen Methode[1] erschliessen, dass der absolute Werth der Summe:

[1] CRELLE's Journal, Bd. I, S. 314 und ABEL, Oeuvres complètes, Nouvelle édition 1881, Tome I. p. 222.

Digitized by Google

$$\sum_h (-1)^h \frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{x+h} \quad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right], \; 0 \leqq x \leqq 1\right),$$

für hinreichend kleine Werthe von σ, kleiner als $\frac{N_0}{2m+1}$ und also:

$$\lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \overline{\sum_h} (-1)^h \frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{x+h} = 0 \quad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right], \; 0 \leqq x \leqq 1\right)$$

sein muss. Da ferner:

$$f(0) \sum_h (-1)^h + \sum_h (-1)^h f_0(\sigma x + \sigma h) = \sum_h (-1)^h f(\sigma x + \sigma h)$$

ist, und also die Voraussetzung, dass die Summe rechts, für hinreichend kleine Werthe von σ, ihrem absoluten Werthe nach kleiner als eine bestimmte Zahl N_1 bleibt, mit der oben bezüglich der Summe $\Sigma (-1)^h f_0(\sigma x + \sigma h)$ gemachten Voraussetzung zusammenfällt, sobald $N_1 > N_0 + |f(0)|$ angenommen wird, so ergiebt sich das Resultat:

Um erschliessen zu können, dass für beliebige Werthe von x', die kleiner als X sind,

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x'} f(x) \sin wx\pi \, d \log x = \tfrac{1}{2}\pi f(0)$$

ist, reicht es hin, eine positive Zahl N und irgend welche (beliebig kleine) Grössen σ^0, x^0 so bestimmen zu können, dass der absolute Werth der Reihe:

(K) $$\overline{\sum_h} (-1)^h f(\sigma x + \sigma h) \qquad (h = 1, 2, \ldots 2r+1; \; 0 \leqq x \leqq 1)$$

oder:

$$-\tfrac{1}{2} f(\sigma x + \sigma) + f(\sigma x + 2\sigma) - f(\sigma x + 3\sigma) + \ldots + f(\sigma x + 2r\sigma) - \tfrac{1}{2} f(\sigma x + 2r\sigma + \sigma) \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

für alle Werthe von σ, die kleiner als σ^0 sind, und für alle Werthe von r, die kleiner als $\frac{x^0}{2\sigma}$ sind, stets kleiner als N bleibt.

Denn, wenn jede der beiden Summen:

$$\overline{\sum_{h=1}^{h=2m+1}} (-1)^h f(\sigma x + \sigma h), \qquad \sum_{h=1}^{h=2r+1} (-1)^h f(\sigma x + \sigma h)$$

ihrem absoluten Werthe nach kleiner als N ist, so ist ihre Differenz, absolut genommen, kleiner als $2N$.

Um die Bedeutung der Bedingung (K) darzulegen, erinnere ich zuvörderst daran, dass durch:

$$\sigma \overline{\sum_h} (-1)^h f(\sigma x + \sigma h) \qquad (h = 1, 2, \ldots 2r+1)$$

oder:

Digitized by Google

$$\sum_{k=1}^{k=r} \sigma \left(-\tfrac{1}{2} f(\sigma x + 2\sigma k - \sigma) + f(\sigma x + 2\sigma k) - \tfrac{1}{2} f(\sigma x + 2\sigma k + \sigma) \right)$$

die algebraische Summe der Inhalte aller derjenigen Dreiecke dargestellt wird, deren Eckpunkte durch die Abscissen:

$$\sigma x + 2\sigma k - \sigma,\ \sigma x + 2\sigma k,\ \sigma x + 2\sigma k + \sigma$$

und die Ordinaten:

$$f(\sigma x + 2\sigma k - \sigma), f(\sigma x + 2\sigma k), f(\sigma x + 2\sigma k + \sigma)$$

bestimmt sind. Die Bedingung (K) verlangt daher, dass der (algebraische) Gesammtinhalt dieser Dreiecke, dividirt durch 2σ — d. h. durch den Werth der Projection jedes einzelnen Dreiecks, auf die Abcissenaxe — bei beliebig abnehmendem σ, stets unter einer festen endlichen Grenze bleibe.

Ich erinnere ferner daran, dass durch jene Summe

$$\sigma \overline{\sum} (-1)^k f(\sigma x + \sigma k)$$

der Zuwachs dargestellt wird, den die Summe:

$$\overline{\sum_k} 2\sigma f(\sigma x - \sigma + 2\sigma k) \qquad (k = 1, 2, \ldots r+1)$$

erhält, wenn man zur Summe:

$$\overline{\sum_k} \sigma f(\sigma x + \sigma k) \qquad (k = 1, 2, \ldots 2r+1)$$

übergeht, d. h. also der Zuwachs, den der durch die Summe:

$$\overline{\sum_k} 2\sigma f(\sigma x - \sigma + 2\sigma k) \qquad (k = 1, 2, \ldots r+1)$$

(für hinreichend kleine Werthe von σ) dargestellte »angenäherte« Integralwerth:

$$\int_0^{2\sigma r} f(z)\, dz$$

erhält, wenn man in der Mitte zwischen je zwei Ordinaten noch eine neue einschaltet.

Endlich sei bemerkt, dass unter der Voraussetzung der Existenz von Ableitungen $f'(z), f''(z)$ der Werth von:

$$\overline{\sum_k} (-1)^k f(\sigma x + \sigma k) \qquad (k = 1, 2, \ldots 2r+1),$$

für hinreichend kleine Werthe von σ, annäherungsweise durch:

$$\tfrac{1}{2}\sigma (f'(0) - f'(2r\sigma))$$

ausgedrückt werden kann und sich also — vorausgesetzt, dass die Differentialquotienten von $f(z)$ endlich sind — nicht nur als unter einer festen endlichen Grenze bleibend, sondern sogar als mit abnehmendem σ von derselben Ordnung unendlich klein werdend erweist.

Digitized by Google

XI. Sowohl dann, wenn für alle Werthe $x' < x'' \leqq x^0$

$$f(x') > f(x'')$$

ist, als auch dann, wenn durchweg die Ungleichheit:

$$f(x') < f(x'')$$

stattfindet, liegt der Werth der Reihe:

$$\overline{\sum_h}(-1)^h f(\sigma x + \sigma h) \qquad (h = 1, 2, \ldots.)$$

zwischen dem Werthe des ersten und dem des letzten Gliedes. Die obige Bedingung (K), und daher auch die Bedingung (H), aus der sie abgeleitet ist, umfasst also jene, welche DIRICHLET in seiner ersten (im IV. Bande des CRELLE'schen Journals) über diesen Gegenstand veröffentlichten Abhandlung als bestehend vorausgesetzt hat.

XII. Wenn die Differenz:

$$\text{(L)} \qquad \int_0^{x^0} f(x)\,dx - \sigma \overline{\sum_h} f(\sigma\delta + \sigma h) \qquad \left(\begin{matrix} 0 < h < \frac{x^0}{\sigma} \\ 0 \leqq \delta \leqq 1 \end{matrix}\right),$$

dividirt durch σ, bei beliebig abnehmendem σ stets unter einer festen endlichen Grenze N' bleibt, so ist der absolute Werth der Differenz:

$$2\sigma \overline{\sum_k} f(\sigma\delta - \sigma + 2\sigma k) - \sigma \overline{\sum_h} f(\sigma\delta + \sigma h) \qquad \left(\begin{matrix} 0 < k < \frac{x^0}{2\sigma} \\ 0 < h < \frac{x^0}{\sigma} \end{matrix}\right),$$

dividirt durch σ, d. h. also der absolute Werth von:

$$\overline{\sum_h}(-1)^h f(\sigma\delta + \sigma h) \qquad \left(0 < h < \frac{x^0}{\sigma}\right),$$

bei beliebig abnehmendem σ stets kleiner als $2N'$, und die Bedingung (K) ist daher erfüllt. Da nun die Differenz (L) sich von der über alle Werthe von h erstreckten Summe der Differenzen:

$$\text{(L')} \qquad \int_{\sigma\delta+\sigma h}^{\sigma\delta+\sigma h+\sigma} f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\sigma\left(f(\sigma\delta + \sigma h) + f(\sigma\delta + \sigma h + \sigma)\right)$$

nur um die Werthe von:

$$\int_0^{\sigma\delta+\sigma} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{x^0}^{\sigma\delta+\sigma\left[\frac{x^0}{\sigma}\right]} f(x)\,dx$$

d. h. nur um solche Werthe unterscheidet, welche, wenn sie durch σ dividirt werden, bei beliebig abnehmendem σ endlich bleiben, so kann an Stelle von (L) eben jene Summe der Differenzen (L') genommen werden. Jede dieser Differenzen stellt aber den Flächeninhalt des Segments dar, welcher einerseits von der Curve $y = f(x)$ und andererseits von der durch die beiden Punkte:

$\left(x = \sigma\delta + \sigma h\,,\ y = f(\sigma\delta + \sigma h)\right)$, $\left(x = \sigma\delta + \sigma h + \sigma\,,\ y = f(\sigma\delta + \sigma h + \sigma)\right)$

Digitized by Google

gehenden Graden begrenzt wird. Die Summe der Differenzen (L') stellt daher die algebraische Summe der Flächeninhalte aller Segmente dar, welche durch die verschiedenen, je zwei aufeinanderfolgende von den Punkten:

$$\left(x = \sigma\delta + \sigma h\,,\ y = f(\sigma\delta + \sigma h)\right) \qquad \left(0 < h < \frac{x^0}{\sigma}\right)$$

mit einander verbindenden Graden von der Curve C abgeschnitten werden. Es genügt also, dass diese algebraische Summe der Segmentflächen, dividirt durch σ (d. h. durch den Werth ihrer Projection auf die Abscissenaxe), bei beliebig abnehmendem σ, unter einer festen endlichen Grenze bleibe, um das Bestehen der Gleichung:

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x^0} f(x) \sin wx\pi \, d\log x = \tfrac{1}{2}\pi f(0)$$

erschliessen zu können. Die Bedingung (K) und jene ursprüngliche Bedingung (H) umfasst demnach sowohl die von Hrn. WEIERSTRASS aufgestellte, als auch die daraus von Hrn. HÖLDER entwickelte weitere Bedingung,[1] und folglich auch diejenige, welche von Hrn. CAMILLE JORDAN angegeben worden ist.[2]

XIII. Der Inhalt der Bedingungsgleichung (H°) kann dahin formulirt werden, dass der Werth der Reihe:

$$\text{(R)} \qquad \sum_n \frac{\overline{\sum_h}(-1)^h f(\sigma x + \sigma h + \sigma)}{(x+2n)\,(x+2n+2)} \qquad \left(0 \leqq x \leqq 1\,;\ 2m \leqq h \leqq 2n\,;\ m+1 \leqq n \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

beliebig klein werden soll, wenn man für m eine beliebig grosse Zahl, für x^0 eine beliebig kleine Grösse und alsdann den Werth von σ hinreichend klein annimmt. Man kann nämlich, da $f(0)\overline{\sum_h}(1-)^h = 0$ ist, in der Reihe (R), ohne ihren Werth zu ändern, $f_0(\sigma x + \sigma h + \sigma)$ d. h. $f(\sigma x + \sigma h + \sigma) - f(0)$ an die Stelle von $f(\sigma x + \sigma h + \sigma)$ setzen und sie dann als Summe der vier Ausdrücke:

$$\text{(a)} \qquad \tfrac{1}{2}\overline{\sum_h}(-1)^h \frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{x+h} \qquad (h = 2m+1, 2m+2, \ldots 2r+1)$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{2(x+2r+2)\,\sigma}\,\overline{\sum_h}\,\sigma(-1)^h f_0(\sigma x + \sigma h)$$

$$\text{(c)} \qquad \sum_{k=m+1}^{k=r} \left(\frac{-1}{x+2k} + \frac{2}{x+2k+1} - \frac{1}{x+2k+2}\right) f_0(\sigma x + 2\sigma k + \sigma)$$

$$\text{(d)} \qquad \tfrac{1}{4}\left(\frac{f_0(\sigma x + 2\sigma r + \sigma)}{x+2r+2} - \frac{f_0(\sigma x + 2\sigma m + \sigma)}{x+2m+2}\right)$$

[1] Sitzungsbericht vom 7. Mai d. J. St. XXIV, S. 419.
[2] Comptes Rendus von 1881. Bd. 92. S. 228.

Digitized by Google

darstellen, wenn darin $r = \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]$ genommen wird. Der erste dieser vier Ausdrücke ist, abgesehen vom Factor $\frac{1}{2}$, genau derjenige, welcher auf der linken Seite der Gleichung (H°) steht, und jeder der drei anderen verschwindet mit zunehmendem m und abnehmendem σ. Denn in dem Ausdrucke (b) hat der Factor vor dem Summenzeichen einen positiven Werth, der kleiner als $\frac{1}{2x^0}$ ist, und die Summe:

$$\overline{\sum_k}\sigma(-1)^k f_0(\sigma x + \sigma h)$$

verschwindet für abnehmende σ, weil das Aggregat der positiven Glieder und das der negativen sich einem und demselben, durch das Integral $\int_0^{x^0} f(z)dz$ bezeichneten Grenzwerthe nähert. Im Ausdrucke (c) ist der Factor von f_0, unter dem Summenzeichen, gleich:

$$\frac{-2}{(x+2k)(x+2k+1)(x+2k+2)},$$

also seinem absoluten Werthe nach kleiner als $\frac{1}{4k^3}$. Da nun $|f_0(\sigma x + 2\sigma k + \sigma)| < M_0$ ist, so ist der absolute Werth des Ausdrucks (c) kleiner als:

$$\tfrac{1}{16} M_0 \sum_k \frac{1}{k^3} \qquad (k = m+1, m+2, \ldots r)$$

und wird also bei wachsendem m beliebig klein. Endlich werden offenbar die beiden Theile im Ausdruck (d) mit abnehmendem σ, bei irgend welchen Werthen von m, beliebig klein, da einerseits:

$$\frac{|f_0(\sigma x + 2\sigma r + \sigma)|}{x + 2r + 2} < \frac{\sigma M_0}{x^0}$$

und andererseits für jeden endlichen Werth von m:

$$\lim_{\sigma = 0} f_0(\sigma x + 2\sigma m + \sigma) = 0$$

ist.

Es lässt sich hiernach die mit (H°) bezeichnete Bedingungsgleichung in die ihr aequivalente:

$$(\overline{\mathrm{H}}) \qquad \lim_{x^0=0} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \sum_n \frac{\overline{\sum_h}(-1)^h f(\sigma x + \sigma h + \sigma)}{(x+2n)(x+2n+2)} = 0,$$
$$\left(0 \leqq x \leqq 1;\ 2m \leqq h \leqq 2n;\ m+1 \leqq n \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

transformiren, aus welcher das oben bei (K) angegebene Resultat ganz

Digitized by Google

unmittelbar gefolgert werden kann. Die Gleichung (H) geht wiederum, wenn zur Abkürzung:

$$\frac{1}{n-m}\sum_{h}^{}(-1)^h f(\sigma x+\sigma h+\sigma)=\Delta_m^n f(\sigma x+2\sigma k) \qquad (2m\leq h\leq 2n)$$

gesetzt wird, in folgende über:

$$(\bar{\bar{\mathrm{H}}}) \qquad \lim_{x^0=0}\lim_{m=\infty}\lim_{\sigma=0}\sum_{n}\frac{(n-m)\Delta_m^n f(\sigma x+2\sigma k)}{(x+2n)(x+2n+2)}=0\,.$$
$$\left(0\leq x\leq 1\,;\ m+1<n\leq\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

Um deren Bedeutung darzulegen, bemerke ich, dass $\Delta_m^n f(\sigma x+2\sigma k)$ der »mittlere Werth« der $n-m$ aufeinanderfolgenden zweiten Differenzen:

$$-\tfrac{1}{2}f(\sigma x+2\sigma k-\sigma)+f(\sigma x+2\sigma k)-\tfrac{1}{2}f(\sigma x+2\sigma k+\sigma) \qquad (m\leq k\leq n)$$

ist.

Substituirt man in der Summe auf der linken Seite der Gleichung $(\bar{\bar{\mathrm{H}}})$ für jene mittleren Werthe ihre absoluten Beträge und nimmt dann an Stelle des positiven Factors:

$$\frac{n-m}{(x+2n)(x+2n+2)}$$

den grösseren Factor $\frac{1}{n}$, so verwandelt sie sich in folgende:

$$\sum_{n}\frac{1}{n}\left|\Delta_m^n f(\sigma x+2\sigma k)\right| \qquad \left(n=m+1\,,\ m+2,\ldots\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right).$$

Wenn diese Summe für $\sigma=0$, $m=\infty$, $x^0=0$ verschwindet, so ist offenbar die Gleichung $(\bar{\bar{\mathrm{H}}})$ erfüllt, und es ergiebt sich daher das Resultat:

Um erschliessen zu können, dass für beliebige Werthe von x', die kleiner als X sind,

$$\lim_{w=\infty}\int_{0}^{x'}f(x)\sin wx\pi\, d\log x=\tfrac{1}{2}\pi f(0)$$

ist, reicht es hin, für irgend eine gegebene, noch so kleine
($\bar{\mathrm{K}}$) Grösse τ eine Zahl m und eine Grösse x^0, und alsdann eine beliebig kleine Grösse σ^0 so bestimmen zu können, dass der Werth der Reihe:

$$\sum_{n}\frac{1}{n}\left|\Delta_m^n f(\sigma x+2\sigma k)\right| \qquad (m<n\leq r)$$

stets kleiner als τ bleibt, wenn $0\leq x\leq 1$, $\sigma<\sigma^0$ und $2r\sigma<x^0$ ist.

Digitized by Google

Um die Bedeutung der hier auftretenden Bedingungsgleichung:

$$(\bar{K}) \qquad \lim_{x^0=0} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \sum_n \frac{1}{n} |\Delta_m^n f(\sigma x + 2\sigma k)| = 0 \qquad \left(m < n \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

darzulegen, bemerke ich zuvörderst, dass sie offenbar erfüllt ist, wenn $\sum \frac{1}{n}$, multiplicirt mit dem grössten Werthe von $|\Delta_m^n|$, bei abnehmendem σ beliebig klein wird. Da nun der Werth von $\sum \frac{1}{n}$ annäherungsweise durch $\log \frac{x^0}{2\sigma m}$ ausgedrückt wird, so genügt es,

dass jeder der mittleren Werthe der aufeinander folgenden zweiten Differenzen:

$$(\bar{L}) \qquad -\tfrac{1}{2} f(\sigma x + 2\sigma k - \sigma) + f(\sigma x + 2\sigma k) - \tfrac{1}{2} f(\sigma x + 2\sigma k + \sigma),$$

multiplicirt mit $\log \frac{1}{\sigma}$, bei abnehmendem σ sich der Null nähere,

und es zeigt sich also, dass die Bedingung (H) auch diejenige umfasst, welche Hr. Lipschitz in seiner im 63. Bande des Journals für Mathematik (S. 296 ff.) veröffentlichten Abhandlung entwickelt hat.

Man kann aber noch weitere Bedingungen aus der Gleichung $(\bar{\bar{K}})$ ableiten, indem man wiederum von den absoluten Beträgen jener mittleren Werthe zu den mittleren Werthen eben dieser absoluten Beträge übergeht, d. h. also indem man die Summenausdrücke:

$$\frac{1}{p-m} \sum_n |\Delta_m^n f(\sigma x + 2\sigma k)| \qquad (m < n \leqq p-1)$$

einführt. Bezeichnet man einen solchen »mittleren absoluten Betrag« der mittleren Werthe aufeinander folgender zweiter Differenzen:

$$-\tfrac{1}{2} f(\sigma x + 2\sigma k - \sigma) + f(\sigma x + 2\sigma k) - \tfrac{1}{2} f(\sigma x + 2\sigma k + \sigma) \qquad (m \leqq k \leqq n)$$

mit θ_p, so tritt an die Stelle der Summe in $(\bar{\bar{K}})$ das Aggregat:

$$\sum_k \frac{k\theta_{m+k}}{(m+k)(m+k+1)} + \frac{r-m+1}{r} \theta_{r+1} + \frac{1}{r} |\Delta_m^r| \qquad (k = 1, 2, \ldots r-m+1),$$

wenn, wie oben $r = \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]$ gesetzt wird. Der Grenzwerth, welchem sich dieser Ausdruck für $\sigma = 0$ nähert, verschwindet offenbar, sobald

$$\lim_{\sigma=0} \sum_{k=1}^{k=r-m} \frac{\theta_{m+k}}{m+k} = 0 \text{ und } \lim_{\sigma=0} \theta_{r+1} = 0$$

ist, und man schliesst daher in derselben Weise, wie oben, dass es schon genügt,

Digitized by Google

wenn jeder der mit ϑ bezeichneten »mittleren absoluten Beträge« der mittleren Werthe jener zweiten Differenzen, mit $\log \frac{1}{\sigma}$ multiplicirt, bei abnehmendem σ sich der Null nähert.

XIV. Substituirt man in der oben mit (H°) bezeichneten Gleichung:

$$\lim_{x^0=0}\lim_{m=\infty}\lim_{\sigma=0}\sum_{h}^{\prime\prime}(-1)^h\frac{f_0(\sigma x+\sigma h)}{x+h}=0 \qquad \left(m\leqq\tfrac{1}{2}(h-1)\leqq\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right];\ 0\leqq x\leqq 1\right)$$

für $f_0(\sigma x+\sigma h)$ seinen Werth:

$$f(\sigma x+\sigma h)-f(0),$$

so wird der Factor von $f(0)$, nämlich der Grenzwerth der Summe:

$$\sum_{h}^{\prime\prime}\frac{(-1)^h}{x+h} \qquad \left(m\leqq\tfrac{1}{2}(h-1)\leqq\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right),$$

für wachsende m, offenbar gleich Null. Man kann also in der Gleichung (H°) die Function f_0 durch die ursprüngliche Function f ersetzen. Man kann ferner darin den Strich über dem Summenzeichen und zugleich das letzte Glied der Summe weglassen, d. h. nämlich die Glieder:

$$-\frac{f(\sigma x+2\sigma m+\sigma)}{2(x+2m+1)}+\frac{f(\sigma x+2\sigma r+\sigma)}{2(x+2r+1)} \qquad \left(r=\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

hinzufügen, da ja deren Grenzwerth für wachsende Zahlen m und r sich der Null nähert. An die Stelle der Reihe in der Gleichung (H°) tritt alsdann die Reihe:

$$\sum_{h}(-1)^h\frac{f(\sigma x+\sigma h)}{x+h} \qquad \left(2m<h\leqq 2\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right];\ 0\leqq x\leqq 1\right),$$

und es ergiebt sich das Resultat:

Um erschliessen zu können, dass für beliebige Werthe von x', die kleiner als X sind,

$$\lim_{w=\infty}\int_0^{x'}f(x)\sin wx\pi\, d\log x=\tfrac{1}{2}\pi f(0)$$

(K_1) ist, genügt es nachzuweisen, dass der Grenzwerth:

$$\lim_{\sigma=0}\sum_{h}^{\prime\prime}(-1)^h\frac{f(\sigma x+\sigma h)}{x+h} \qquad \left(2m<h\leqq 2\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right];\ 0\leqq x\leqq 1\right)$$

sich mit wachsendem m und mit abnehmendem x^0 der Null nähere.

Die hierin enthaltene Forderung lässt sich auch so formuliren:

Digitized by Google

Für eine gegebene positive, beliebig kleine Grösse τ soll zuerst eine Zahl m_1, und eine Grösse x_1^0, und alsdann für jede Zahl m, die grösser als m_1 ist, und für jede Grösse x^0, die kleiner als x_1^0 ist, eine Grösse σ^0 so bestimmt werden

(K_2) können, dass der absolute Werth der Reihe:

$$\sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x+h} \qquad \left(2m < h \leqq 2\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right];\ 0 \leqq x \leqq 1\right)$$

stets kleiner als τ bleibt, sobald $\sigma < \sigma^0$ ist.

Dieses, wie mir scheint, bemerkenswerthe Resultat, welches sich aus den obigen Entwickelungen ergeben hat, soll nunmehr noch direct verificirt werden.

Zu diesem Zwecke ist das Dirichlet'sche Integral:

$$\int_0^{\frac{x'}{\sigma}} f(\sigma x) \sin x\pi \, d\log x$$

als Aggregat von sieben Integralen:

$$J_0 + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6$$

darzustellen, welche folgendermaassen definirt sind:

$$J_0 = f(0) \int_0^{\infty} \sin x\pi \, d\log x, \quad J_1 = f(0) \int_{\infty}^{2m+1} \sin x\pi \, d\log x$$

$$J_2 = \int_{2m+1}^{2r+1} f(\sigma x) \sin x\pi \, d\log x = \int_0^1 \sum_{h=2m+1}^{h=2r} (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x+h} \sin x\pi \, dx$$

$$J_3 = \int_1^{2m+1} \big(f(\sigma x) - f(0)\big) \sin x\pi \, d\log x$$

$$J_4 = \int_0^1 \big(f(\sigma x) - f(0)\big) \frac{\sin x\pi}{x} \, dx$$

$$J_5 = \int_{2r+1}^{\frac{x^0}{\sigma}} f(\sigma x) \sin x\pi \, d\log x, \quad J_6 = \int_{\frac{x^0}{\sigma}}^{\frac{x'}{\sigma}} f(\sigma x) \sin x\pi \, d\log x,$$

und es ist nun zu zeigen, dass — wenn die bei (K_2) formulirte Forderung erfüllt ist — die Zahlen m, r und die Grössen σ, x^0 stets so gewählt werden können, dass der absolute Werth des Aggregats:

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6$$

kleiner als irgend eine gegebene, beliebig kleine Grösse τ wird, d. h.

Digitized by Google

also, dass sich alsdann der Werth jenes DIRICHLET'schen Integrals von dem Werthe von J_0 um weniger als τ unterscheidet.

Man nehme nun zuerst eine Zahl m^0 so an, dass $2m^0+1 > \frac{12}{\pi\tau}$ wird. Dann ist für jede Zahl m, die grösser als m^0 ist:

$$|J_1| < \frac{2}{\pi(2m+1)} < \tfrac{1}{6}\tau.$$

Man wähle ferner, gemäss der als erfüllbar vorausgesetzten Forderung (K_2). eine Zahl m, die grösser als m_1 ist, sowie eine Grösse x^0, die kleiner als x_1^0 ist, und bestimme darnach eine Grösse σ^0 so, dass der absolute Werth der Summe:

$$\sum_{h=2m+1}^{h=2r} (-1)^h \frac{f(\sigma x+\sigma h)}{x+h} \qquad \left(0 \leqq x \leqq 1\,;\; r = \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right),$$

kleiner als $\frac{1}{6}\tau$ wird, sobald σ kleiner als σ^0 ist. Alsdann ist für jeden solchen Werth von σ:

$$|J_2| < \tfrac{1}{6}\tau.$$

Nunmehr bestimme man eine Grösse ξ so, dass der absolute Werth der Differenz $f(x) - f(0)$ für alle Werthe von x, die kleiner als ξ sind, kleiner als:

$$\frac{\tau}{6\log(2m+1)}$$

bleibt, und setze dann $\sigma' = \frac{\xi}{2m+1}$. Dann ist für jede Grösse σ, die kleiner als σ' ist, der absolute Werth der Differenz $f(\sigma x) - f(0)$ kleiner als $\frac{\tau}{6\log(2m+1)}$, so lange $x < 2m+1$ bleibt. Es ist also für jeden solchen Werth von σ:

$$|J_3| < \tfrac{1}{6}\tau,$$

zugleich aber auch, da $\frac{\sin x\pi}{x}$ kleiner als π ist;

$$|J_4| < \frac{\tau\pi}{6\log(2m+1)} < \tfrac{1}{6}\tau.$$

Das Intervall zwischen $2r+1$ und $\frac{x^0}{\sigma}$, über welches sich die Integration in J_5 erstreckt, ist höchstens gleich Eins, da $r = \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]$ angenommen worden ist. Der absolute Werth von J_5 ist also kleiner als:

$$M\left|\log\left(1-\frac{\sigma}{x^0}\right)\right|,$$

Digitized by Google

wenn M, wie oben, eine Grösse bedeutet, welche von keinem Functionswerthe $f(x)$ übertroffen wird. Man kann hiernach σ'' hinreichend klein wählen, damit für jeden Werth von σ, der kleiner als σ'' ist:

$$|J_5| < \tfrac{1}{6}\tau$$

wird. Dass endlich eine hinreichend kleine Grösse σ''' so bestimmt werden kann, dass für alle Werthe von σ, die kleiner als σ''' sind, der absolute Werth von J_6 beliebig klein gemacht, also die Ungleichheitsbedingung:

$$|J_6| < \tfrac{1}{6}\tau$$

erfüllt werden kann, ist bereits oben in art. V ausführlich dargelegt worden.

Man braucht also nur σ kleiner als die kleinste der vorstehend definirten Grössen σ^0, σ', σ'', σ''' anzunehmen, um sicher zu sein, dass der absolute Werth jedes der sechs Integrale $J_1, J_2, \ldots J_6$ kleiner als $\frac{1}{6}\tau$, dass also:

$$|J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6|$$

kleiner als τ, d. h. kleiner als eine gegebene, beliebig kleine Grösse wird.

XV. Die hiermit verificirte Bedingung für die Gültigkeit der Gleichung:

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x'} f(x) \sin wx\pi d \log x = \tfrac{1}{2}\pi f(0)$$

ist eine »weitere«, d. h. sie enthält weniger Beschränkungen für die Function $f(x)$ und lässt also deren Bereich weiter, als die bisher bekannten Bedingungen[1]; sie umfasst namentlich, wie oben gezeigt worden ist, sowohl die Dirichlet'schen als auch diejenigen Bedingungen, welche oben aus den Arbeiten der HH. Lipschitz, P. du Bois-Reymond, C. Jordan und Hölder citirt sind; und sie steht dabei in Bezug auf die Einfachheit und Durchsichtigkeit ihrer Bedeutung hinter den früher angegebenen Bedingungen kaum zurück. Die Möglichkeit ihrer Aufstellung beruht wesentlich auf jener gleich Anfangs (art. II [B]) entwickelten Gleichung:

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^{\xi} f_0(\sigma x) \sin x\pi d \log x = 0 ,$$

welche meines Wissens bisher nicht hervorgehoben oder wenigstens nicht vollständig für die Bedingungen der Gültigkeit der Dirichlet'schen Integralgleichung benutzt worden ist.

[1] Die verschiedenen Bedingungen, welche in dem 1880 erschienenen Werke des Hrn. Ulisse Dini vorkommen, habe ich noch nicht sämmtlich, in Bezug auf ihren Umfang, mit der obigen Bedingung verglichen.

Digitized by Google

Aber man kann noch eine weitere Anwendung von dem Principe machen, welches der erwähnten Gleichung und also auch der obigen Zerlegung des DIRICHLET'schen Integrals in sieben Integrale zu Grunde liegt, indem man irgend eine Beziehung zwischen der Zahl $2m+1$ und der Grösse σ sucht, für welche die Grenzwerthe der beiden Integrale J_2 und J_3 bei abnehmendem σ verschwinden. Setzt man nämlich, um eine solche Beziehung anzudeuten:

$$(S) \qquad 2m = \frac{\theta(\sigma)}{\sigma},$$

so ist die mit $\theta(\sigma)$ bezeichnete Function von σ so zu bestimmen, dass zu gleicher Zeit:

$$(S^\circ) \qquad \lim_{\sigma=0} \frac{\sigma}{\theta(\sigma)} = 0,$$

$$(S') \qquad \lim_{\sigma=0} \int_{\sigma}^{\sigma+\theta(\sigma)} (f(x) - f(0)) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x = 0,$$

$$(G_1^\circ) \qquad \lim_{x^0=0} \lim_{\sigma=0} \int_0^1 \sum_h^{\cdots} (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x+h} \sin x\pi dx = 0.$$

$$\left(\frac{\theta(\sigma)}{2\sigma} \leqq \frac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right],\ 0 \leqq x \leqq 1\right)$$

wird, und man kann demnach den oben mit (G°), (H°), $(\overline{H})$, $(\overline{\overline{H}})$ bezeichneten Bedingungsgleichungen eine allgemeinere Bedeutung beilegen, indem man, statt, wie es dort geschehen ist, die Zahl m unabhängig von σ wachsen zu lassen, zwischen m und σ irgend eine durch die Gleichung (S) angedeutete Beziehung zulässt, für welche die beiden Gleichungen (S°) und (S') befriedigt werden. Die hier mit (G_1°) bezeichnete Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung (G°) des Art. VI eben nur dadurch, dass in den Summationsbedingungen die Zahl m durch ihren aus der Gleichung (S) entnommenen Werth ersetzt und mit Rücksicht auf die Gleichung (S°) die dadurch unnöthig gewordene Bestimmung: *limes* $m = \infty$ weggelassen worden ist.

Nimmt man für die bei (K_1) formulirte Bedingung:

$$\lim_{x^0=0} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x+h} = 0 \qquad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) < r;\ r = \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right];\ 0 \leqq x \leqq 1\right)$$

die ihr aequivalente:

$$\lim_{x^0=0} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \sum_k \frac{f(\sigma x + 2\sigma k) - f(\sigma x + 2\sigma k - \sigma)}{x+2k} = 0 \qquad (m < k \leqq r;\ 0 \leqq x \leqq 1),$$

so sieht man, dass es genügt, wenn:

$$\left(f(x+\sigma) - f(x)\right) \sum_{k=m+1}^{k=r} \frac{1}{k},$$

Digitized by Google

mit abnehmendem σ, für jeden Werth von x, der kleiner als x^0 ist, verschwindet. Da hier die Summe der reciproken Zahlen von $m+1$ bis r durch $\log \frac{r}{m}$, oder also auch durch $\log \frac{x^0}{\vartheta(\sigma)}$ ersetzt werden kann, so folgt, dass man an Stelle jener Gleichung (G_1^0) die Gleichung:

$$\lim_{x^0=0} \lim_{\sigma=0} \big(f(x+\sigma) - f(x)\big) \log \frac{x^0}{\vartheta(\sigma)} = 0 \qquad (0 \leqq x < x^0)$$

oder auch, da wegen der Stetigkeit der Function $f(x)$ der Grenzwerth von $\big(f(x+\sigma) - f(x)\big) \log x^0$ für $\sigma = 0$ verschwindet, die Gleichung:

$$(S_1') \qquad \lim_{\sigma=0} \big(f(x+\sigma) - f(x)\big) \log \frac{1}{\vartheta(\sigma)} = 0 \qquad (0 \leqq x < x^0)$$

als eine (freilich nur) hinreichende Bedingung für das Bestehen der Dirichlet'schen Integralgleichung nehmen kann, wenn dabei die Function $\vartheta(\sigma)$ so gewählt wird, dass sie die beiden Gleichungen (S^0) und (S') befriedigt.

Der Werth des Integrals in der Gleichung (S') kann durch den Ausdruck:

$$\varepsilon \Big(f\big(\sigma + \delta\vartheta(\sigma)\big) - f(0)\Big) \log\left(1 + \frac{\vartheta(\sigma)}{\sigma}\right)$$

dargestellt werden, in welchem $-1 \leqq \varepsilon \leqq +1$ und $0 \leqq \delta \leqq 1$ ist, und an die Stelle der Gleichung (S') selbst kann daher die Gleichung:

$$(S_2') \qquad \lim_{\sigma=0} \Big(f\big(\sigma + \delta\vartheta(\sigma)\big) - f(0)\Big) \log \frac{\vartheta(\sigma)}{\sigma} = 0$$

treten.

Bezeichnet man mit $\Delta\sigma$ den grössten Werth der Differenzen $f(x+\sigma) - f(x)$ für die verschiedenen Werthe von x, die kleiner als x^0 sind, so ist $\Delta\sigma$ um so kleiner, je stetiger die Function $f(x)$ in dem Intervalle von 0 bis x^0 ist, und man kann sich nunmehr die Function $\vartheta(\sigma)$ gemäss der aus (S_1') hervorgehenden Gleichung:

$$(T) \qquad \lim_{\sigma=0} \Delta\sigma \log \frac{1}{\vartheta(\sigma)} = 0$$

definirt denken, so dass also nur irgend eine mit σ selbst verschwindende Function $\psi(\sigma)$ anzunehmen und alsdann:

$$\vartheta(\sigma) = e^{-\frac{\psi(\sigma)}{\Delta\sigma}}$$

zu setzen ist. Die Gleichung (S_2') liefert hiernach, da sich die Differenz: $f\big(\sigma + \delta\vartheta(\sigma)\big) - f(0)$ aus den Differenzen $f\big(\sigma + \delta\vartheta(\sigma)\big) - f(\sigma)$, $f(\sigma) - f(0)$ zusammensetzen lässt, die Relation:

Digitized by Google

$$\lim_{\sigma=0} \Delta\sigma \log \frac{\theta(\sigma)}{\sigma} = 0,$$

und aus dieser geht endlich in Verbindung mit jener Gleichung (T) die Relation:

$$(T^0) \qquad \lim_{\sigma=0} \Delta\sigma \log \frac{1}{\sigma} = 0$$

hervor. Es ergiebt sich also hierbei nur jenes Resultat, welches schon in dem oben mit $(\bar{L})$ bezeichneten enthalten ist, nämlich:

> wenn die Function $f(x)$ in hinreichender Nähe von $x = 0$ einen solchen Grad von Stetigkeit hat, dass jede Differenz $f(x+\sigma) - f(x)$, multiplicirt mit $\log \frac{1}{\sigma}$, für abnehmende Werthe von σ verschwindet, so ist der Grenzwerth des Integrals:
>
> $$\int_0^{x'} f(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma} d \log x,$$
>
> für abnehmende Werthe von σ, gleich $\frac{1}{2}\pi f(0)$.

Diese Bedingung selbst schliesst sich unmittelbar an jene LIPSCHITZ-sche an, welche schon oben citirt worden ist, aber die bei der Herleitung angewendete Methode steht in naher Beziehung zu jener, deren sich Hr. P. DU BOIS-REYMOND im I. Capitel seiner »Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der FOURIER'schen Darstellungsformeln« bedient hat, um Bedingungen der Gültigkeit der DIRICHLET-schen Integralformel für dort besonders charakterisirte Functionen $f(x)$ herzuleiten.[1] Ob auch diese speciellen, auf besondere Functionen $f(x)$ bezüglichen, DU BOIS-REYMOND'schen Bedingungen in jener Bedingungsgleichung (H) — wenn sie in der oben bei (G_1^0) charakterisirten allgemeineren Bedeutung genommen wird — enthalten ist, habe ich noch nicht ergründet.

Dass alle solche Bedingungen, — also auch diejenigen, welche in dem vorliegenden Aufsatze hergeleitet worden sind, — in Bedingungen für die Entwickelbarkeit von Functionen in FOURIER'sche Reihen umgesetzt werden können, ist an sich klar.

[1] Abhandlungen der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften. II. Cl. XII. Bd. II. Abth. München 1876.

Digitized by Google

Digitized by Google

33. Lebende Zitterrochen in Berlin.

Zweite Mittheilung.[1]

Von E. du Bois-Reymond.

(Vorgetragen am 16. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVI]; — ausgegeben am 23. Juli.)

§. I. *Einleitung.*

Ich habe im verflossenen Sommer (1884) und in diesem Winter und Frühling (1884—85) durch gütige Vermittelung des Directors des Berliner Aquariums, Hrn. Dr. Otto Hermes, wieder über mehrere lebende Zitterrochen (*T. marmorata*) aus Triest verfügt. Im Sommer waren es vier Weibchen, I, II, III, IV, von beziehlich 29.5, 35, 31.5, 31.5^{cm} Länge. Torpedo I kam am 9. Juni sehr krank an. Als ich sie Tages darauf verarbeitete, athmete sie noch regelmässig, sie schloss aber die Spritzlöcher nur zum Theil, und merkwürdigerweise befand sie sich in einer Art von Opisthotonus, so dass ihr Rücken in sagittaler Richtung stark concav war. II, III, IV kamen am 23. Juni an, und wurden beziehlich am 9. und 16. Juli und am 13. August, nach rund 2, 3, 7 Wochen Aufenthalt in den Becken des Berliner Aquariums (I. S. 183) getödtet. Der Wintervorrath, am 22. October eingebracht, bestand aus drei Weibchen, V, VI, VII, von beziehlich 28.5, 26.5, 28^{cm} Länge; sie wurden am 21. und 30. December 1884 und am 6. Mai 1885, nach rund 8, 9, 28 Wochen geopfert. Eine erste Frühlingssendung in diesem Jahre verunglückte, doch kam noch am 8. Mai ein 34^{cm} langes Weibchen (VIII) wohlbehalten an und wurde am 3. Juni verarbeitet.

Auch im Sommer 1883 hatte ich von der Ankunft der Fische bis zur Tödtung 3 und 5, im Winter 1883—84 8, 10 und 15 Wochen verstreichen lassen. Der Grund dieser Zögerungen liegt darin, dass man, um eine Torpedo auszunutzen, mindestens zwei volle Tage nacheinander ununterbrochen muss dabei bleiben können, was meine

[1] Die Erste Mittheilung findet sich im ersten Bande des Jahrganges 1884 dieser Berichte, S. 181—242 (s. auch Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen, 1884. S. 87—148; — Archiv für Physiologie, 1885. S. 86—145). Sie wird hier stets einfach mit »I.« bezeichnet und ihre Seitenzahlen werden nach der ersten Quelle angeführt. Die dort S. 181 Anm. 2 und S. 182 Anm. 1 eingeführten Abkürzungen von Selbstcitaten gelten auch für diese Mittheilung.

Digitized by Google

Geschäfte mir nur in weiten Zwischenräumen gestatten. Ich erwähne dies, weil natürlich die Leistungsfähigkeit der Thiere, namentlich im Sommer, sehr unter Verlängerung ihrer Haft leidet. Im Sommer 1883, wo sie früher hier eintrafen, hatten sie sich verhältnissmässig gut gehalten. Die Fische der Frühlingssendung 1884 blieben zwar ruhig im Kies eingewühlt — eine Stellung, welche sie verlassen, sobald sie ernstlich erkranken (I. S. 183) — sie sahen ganz gut aus, athmeten regelmässig und sträubten sich lebhaft, wenn man sie am Schwanz aufhob. Sie schlugen aber erst nach wiederholten heftigen Reizen, und ihre elektrische Kraft war so gesunken, dass es mir am 29. Juli nicht gelang, in der (I. S. 192) geschilderten Art den Schlag der vierten Torpedo meinen Zuhörern fühlbar zu machen. Dieser geringen Leistungsfähigkeit des Organs entsprach sichtlich dessen Beschaffenheit, ganz wie man schlecht reagirenden Froschpraeparaten sogleich ihre üble Verfassung ansieht;[1] es war weich, zerfliesslich, die Schnittflächen troffen von Flüssigkeit, und bei dem fehlenden Turgor fielen die Organpraeparate nicht so gut aus wie früher (I. S. 206. 207). Auch ihr Organstrom erschien minder stark und in eigener Art unregelmässig (s. unten §. II). Unstreitig kam dies daher, dass die Fische bei vergleichsweise hoher Temperatur fasteten; bisher hat sich aber keine Art gefunden, sie zu füttern (I. S. 184). Von der siebenten Torpedo, welche den ganzen vorigen Winter, über ein halbes Jahr, im Aquarium gelebt hatte, glaubten die Wärter, dass sie Nahrung zu sich genommen habe; sie schlossen dies aber nur aus ihrem scheinbar kräftigen Zustand. Ich fand Magen und Darm ganz leer.

Die im Winter bei nur 10.5 — 12° C. gehaltenen Fische leiden zwar weniger als die Sommerfische unter der Gefangenschaft. Doch auch sie sind, nach ihrer elektrischen Leistungsfähigkeit zu urtheilen, weit entfernt vom normalen Zustande.[2] Selbst vierundzwanzig Stunden vor den Versuchen in gewärmtes Seewasser gebracht, schlagen sie nur schwach, und nur auf stärkere Reize.

Unsere Versuche an elektrischen Fischen bewegen sich noch vielfach diesseit der Grenze, wo das höchste Maass von Leistungsfähigkeit unentbehrlich wird, und trotz des schlechten Zustandes mancher Praeparate glückten mir doch wieder einige, wie ich glaube, nicht unwichtige Ermittelungen. Diese beabsichtige ich jetzt mitzutheilen, ohne auf neue Sendungen zu warten, deren glückliches Eintreffen mehr oder weniger vom Zufall abhängt. Andererseits hatte jener Mangel an Leistungsfähigkeit allerdings zur Folge, dass gewisse andere Fragen

---

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. I. S. 168.
[2] Vergl. I. S. 191; — Untersuchungen u. s. w. S. 266.

Digitized by Google

noch nicht völlig erledigt werden konnten. Doch werde ich auch über diese dem augenblicklichen Stande der Dinge gemäss berichten, wie denn überhaupt die Beschränktheit des Materials und die Unsicherheit seiner Beschaffung mich zwingen, hier von der Regel abzuweichen, die ich an den Muskeln und Nerven stets zu befolgen strebte, nur nach bestem Wissen und Können abgeschlossene Untersuchungen zu veröffentlichen.

Die Vorbereitungen zu den Versuchen waren dieselben, wie bei denen der Ersten Mittheilung (I. S. 184). Die Tödtung der Thiere geschah in allen Fällen auf die dort S. 205 beschriebene Art durch Ausstanzen der elektrischen Lappen des Gehirnes mittels eines einzigen Hammerschlages. Mit Savi's Abbildung[1] vor Augen hat diese Operation keine Schwierigkeit auch für Jemand, dem die Zitterrochen-Anatomie nicht so vertraut ist, wie Prof. Fritsch. Es empfiehlt sich, zuerst die Haut in der Sagittalebene zu spalten, da sie leicht unter dem Locheisen seitlich ausgleitet und das Eisen mitnimmt, so dass die Sagittalebene nicht das Loch hälftet. Nie schlägt das Thier nach Entfernung der Lappen, auch wenn diese nicht tadellos gelang, doch kann es noch lange sowohl von selber zappeln wie auch reflectorisch sich sträuben. Das von den Organen nicht am Schlachttage Verbrauchte wurde bei wärmerer Witterung auf Eis bewahrt.

Vielleicht ist es nicht unnütz zu bemerken, dass die von mir seit vielen Jahren und auch im Folgenden wieder angewendete Polarisationswippe mit ihren die Dauer eines polarisirenden Stromes regelnden Zeitscheiben[2] sich in der unlängst erschienenen Schlusslieferung meiner 'Untersuchungen über thierische Elektricität' jetzt beschrieben und abgebildet findet.[3] Hier sind auch meine Untersuchungen über Polarisation an der Grenze ungleichartiger Elektrolyte und im Inneren feuchter poröser Halbleiter vollständig mitgetheilt, welche für alle Ermittelungen an den elektromotorischen Geweben eine der wichtigsten Grundlagen bilden und bisher erst auszugsweise im ersten Bande der 'Gesammelten Abhandlungen' vorlagen.

---

[1] Matteucci, Traité des Phénomènes électro-physiologiques des Animaux. Paris 1844. Planche I.

[2] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 3. 13. 34; — Bd. II. S. 718; — diese Berichte 1883. Bd. I. S. 351. 352; — 1884. Bd. I. S. 211 ff.

[3] A. a. O. Bd. II. Abth. II. Berlin bei G. Reimer 1884. S. 389—395. Taf. VI. Fig. 151. 152. A. B. — Die Mittel, welche mir zu Gebote stehen, um einen polarisirenden oder tetanisirenden Strömungsvorgang fein abgestufte Bruchtheile der Secunde dauern zu lassen, sind hier noch nicht dargelegt; dies soll bei nächster Gelegenheit geschehen.

Digitized by Google

§. II. *Vom elektromotorischen Verhalten der Haut der Zitterfische.*

An den Organpraeparaten vom Zitterwelse hatte ich umsonst nach einer elektromotorischen Wirkung in der Ruhe, einem Organstrome, gesucht. Dieser Misserfolg muss jetzt befremden, wo am Zitteraal und Zitterrochen, angeblich sogar am unvollkommenen elektrischen Organ des gemeinen Rochen, solche Wirkungen nachgewiesen sind.[1] Er erklärt sich weder durch gesunkene Leistungsfähigkeit der Praeparate, denn sie waren in viel besserem Zustand als viele Praeparate vom Zitterrochen, welche mir jetzt den Organstrom gaben, noch durch die Unvollkommenheit der Versuchsweise, denn ich bediente mich des Nervenmultiplicators, und der Widerstand der alten Zuleitungsgefässe und der mit Eiweisshäutchen bekleideten Kochsalzbäusche war sicher kleiner als der der jetzigen, unpolarisirbaren Vorrichtung. Die Polarisation des Platins in den alten Zuleitungsgefässen bliebe übrig, um zu erklären, dass eine beständige schwache Wirkung mir entgehen konnte; sie hinderte aber doch nicht die Wahrnehmung einer geringen Positivität der äusseren Hautfläche gegen alle übrigen natürlichen wie künstlichen Begrenzungen des Organpraeparates, einer Wirkung, mit welcher, wie sich jetzt zeigen wird, der Organstrom, wenn vorhanden, von gleicher Ordnung gewesen wäre.

Am Zitteraal fand Sachs Punkte der Haut schwach positiv 0.0050 Daniell = 0.0053 Raoult; — s. I. S. 208) gegen in derselben Querebene gelegene Punkte natürlicher, nicht mit Haut bekleideter Längsschnitte, sowie gegen solche Punkte künstlicher Längs- und Querschnitte. Gegen die Kopffläche eines Organstückes verhält sich die Haut schwächer positiv, gleichartig, oder sehr schwach negativ, gegen die Schwanzfläche stärker positiv: da man die algebraïsche Summe des Organstromes der zwischen den Ableitungspunkten gelegenen Strecke und des Hautstromes erhält. Bei der ersten Anordnung betrug beispielsweise die Kraft im Mittel 0.0040, bei der zweiten 0.0195, woraus die Hautstromkraft sich zu $0.0155/2 = 0.00775$ berechnet, was mit der unmittelbaren obigen Messung (0.005) hinlänglich stimmt.[2]

Natürlich drängte sich mir die Frage auf, wie sich am Zitterrochen die Haut elektromotorisch zum Inneren des Organes verhalte. Die Dinge liegen hier nicht so einfach, wie beim Zitterwelse, wo kein merklicher Organstrom sich einmischte, und beim Zitteraale, wo das Organ seitlich von Haut begrenzt ist, folglich der Organstrom ausgeschaltet werden kann, indem man die Ableitung von Haut und Organ auf

[1] Untersuchungen u. s. w. S. 169 ff.
[2] Untersuchungen u. s. w. S. 172.

Digitized by Google

einer und derselben, rücksichtlich des Schlages und des Organstromes isoëlektrischen Curve vornimmt. Beim Zitterrochen sind die Polflächen der Organpraeparate mit Haut bekleidet, und wenn die Ableitung einerseits von der einen dieser Flächen, andererseits von der Seitenfläche oder einem Querschnitt des Praeparates geschieht, hat man stets den Organstrom der zwischen beiden Ableitungspunkten begriffenen Säulenstrecke im Kreise, und kann etwaige elektromotorische Wirkungen der Haut erst durch Elimination bestimmen, was aber folgendermaassen ausführbar ist.

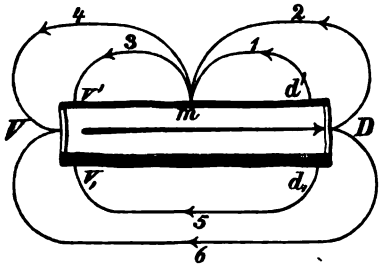


Fig. 1.

In Fig. 1 erkennt man ein Organpraeparat, bei V von der Bauch-, bei D von der Rückenhaut begrenzt. Die Bögen 1—6 stellen verschiedene Lagen des Bussolkreises vor, dessen Enden die Thonspitzen der unpolarisirbaren Leitungsröhren bilden, und in welchem mittels des runden Compensators das Gleichgewicht zur Messung elektromotorischer Kräfte hergestellt wird. Der Punkt m hälftet möglichst genau die Länge des Praeparates; die Punkte d', $d_,$ und v', $v_,$ liegen beziehlich der Rücken- und der Bauchhaut möglichst nahe.[1]

In allen Fällen hat man Organstromkraft im Kreise, in den Fällen 2, 4, 6 überdies die etwaige elektromotorische Wirkung der Haut. Rückt man aber mit der dorsalen Spitze von d', $d_,$ nach D, oder mit der ventralen Spitze von v', $v_,$ nach V, so nimmt man nicht nur die Haut in den Kreis auf, man verlängert auch ein wenig die Säulenstrecke zwischen den Spitzen. Ist die Haut elektromotorisch unwirksam, so muss also der Übergang von d', $d_,$ zu D, sowie der von v', $v_,$ zu V, eine geringe Verstärkung der positiven Organstromkraft zur Folge haben, welche bei regelmässiger säulenartiger Anordnung im Praeparat, und bei gleicher Länge der hinzugetretenen Säulenstrecken, in beiden Fällen dieselbe sein wird. Eine Abweichung von diesem Verhalten dagegen wird unter Umständen auf elektromotorische Wirksamkeit der Haut zu deuten sein.

Solche Abweichung zeigt sich nun wirklich mit grosser Regelmässigkeit in dem Sinne, dass man am Rücken beim Übergange von 1 zu 2 (von md' zu mD) ansehnliche Verstärkung, am Bauche beim Über-

[1] Die Anordnungen mV, mD wurden schon von Hrn. Eckhard untersucht, der aber dabei so wenig wie zwischen V und D am ruhenden Organ elektromotorische Wirkung erhielt (Beiträge zur Anatomie und Physiologie. Bd. I. Giessen 1858. 4. S. 161. 162. — Vergl. I. S. 204. 210).

Digitized by Google

gange von 3 zu 4 (von mv' zu mV) etwas geringere Schwächung der positiven Kraft beobachtet. Letzterer Erfolg kann nicht von Verlängerung der Säulenstrecke herrühren. Dagegen erklären sich beide Erfolge vollkommen bei der Annahme schwacher Positivität der Haut gegen das Innere. Dass die Schwächung am Bauche weniger beträgt, als die Verstärkung am Rücken, könnte man beim ersten Anblick von verschiedener elektromotorischer Beschaffenheit der pigmentirten Rücken- und pigmentlosen Bauchhaut ableiten wollen, welche übrigens beim Frosch nicht sicher nachweisbar ist.[1] Doch liegt ein anderer Grund näher, der keine neue Voraussetzung nöthig macht, nämlich dass die in beiden Fällen aus der Verlängerung der Säulenstrecke zwischen den Spitzen entspringende Verstärkung des Organstromes am Rücken sich zur Hautwirkung hinzufügt, am Bauche davon abzieht.

Die Versuche wurden zuerst am letzten Sommerfisch (IV) angestellt. In einem gut gelungenen Versuch erhielt ich

im Bogen 1	(md')	.....	+ 0.0057	Raoult
» » 2	(mD)	.....	» 0.0103	»
» » 3	(mv')	.....	» 0.0049	»
		.....	» 0.0063	»
		Mittel	» 0.0056	»
» » 4	(mV)	.....	» 0.0034	»
		.....	» 0.0029	»
		Mittel	» 0.0032	»

Die Verstärkung am Rücken beim Übergang von md' zu mD betrug also 0.0046, die Schwächung am Bauche beim Übergange von mv' zu mV, gemäss dem oben Gesagten, nur etwa die Hälfte, 0.0024. Sei x der Potentialunterschied zwischen Haut und Innerem des Organs, δ die Kraft der Säulenstrecken zwischen der Haut und den ihr zunächst anliegenden Spitzen, so haben wir am Rücken

$$0.0057 + \delta + x = 0.0103,$$

am Bauche

$$0.0056 + \delta - x = 0.00315,$$

woraus sich ergeben

$$\delta = 0.0011, \; x = 0.0036.$$

Als ich die Versuche im verflossenen Winter an dem am 21. December geopferten Fische (V) wiederholen wollte, stiess ich zunächst auf eine neue Erscheinungsweise des Organstromes. Ich fand ihn nämlich an mehreren Organpraeparaten regelmässig positiv in der dorsalen, dagegen regelwidrig negativ in der ventralen Hälfte der

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. II. S. 14.

Digitized by Google

Säulen. Da der Fisch aus den kalten Becken des Aquariums rasch in wärmeres Wasser versetzt worden war, glaubte ich anfangs an eine Störung durch Hydrothermoströme. Ich musste aber diese Meinung aufgeben, als Fisch VI, den ich am 30. December tödtete, nachdem er über vierundzwanzig Stunden bei mir in Wasser von 17°5 gehalten worden war, dieselbe Erscheinung zeigte, nur mit dem Unterschiede, dass diesmal die dorsale Hälfte der Säulen negativ wirkte. Ich schritt nun wieder zu Messungen und erhielt

im Bogen 1	(md')	− 0.0021	Raoult
» » 2	(mD)	− 0.0012	»
» » 3	(mv')	+ 0.0067	»
» » 4	(mV)	+ 0.0057	»
» » 5	$(v_{,}d_{,})$	+ 0.0029	»
» » 6	(VD)	+ 0.0029	»

Zunächst ist zu bemerken, dass, wie in der ersten Reihe und in dieser $mV < mv'$, diesmal auch $mD < md'$ ausfiel, weil nämlich jetzt auch am Rücken die Hautstromkraft von der Organstromkraft sich abzog; ferner dass die Kraft in den Bögen 5 und 6 wegen der entgegengesetzten Wirkung beider Säulenhälften kleiner war als die der stärkeren Hälfte, wenn auch $v_{,}d_{,}$ etwas $<$, VD etwas $>$ 0.0045 hätte sein müssen, statt dass beide nur, und ununterschiedlich, 0.0029 betrugen.

Um aus unseren Zahlen x zu bestimmen, darf man nicht so verfahren, wie oben, wo wir δ, den Zuwachs der Organstromkraft durch die Verlängerung der Säulenstrecken beim Übergange von md' zu mD, mv' zu mV, wegen der merklich gleichen Wirksamkeit beider Hälften der Säulen, an Bauch und Rücken gleich setzen konnten. Nimmt man aber an, dass die ganze eine Hälfte der Säulen positiv, die ganze andere negativ wirkte, so kann man folgendermaassen verfahren.

Heisse δ_d der Zuwachs am Rücken, δ_v der am Bauche, so hat man zur Bestimmung von x, δ_d, δ_v die drei Gleichungen:

$$- 0.0021 - \delta_d + x = - 0.0012,$$
$$+ 0.0067 + \delta_v - x = + 0.0057,$$
$$\delta_v = - \delta_d \frac{67}{21},$$

woraus sich ergeben

$$\delta_d = 0.00024, \delta_v = 0.00131,$$

und, je nachdem man x aus der ersten oder zweiten der es enthaltenden, wegen der Beobachtungsfehler nicht völlig mit einander stimmenden Gleichungen berechnet:

$x = 0.000924$ oder $= 0.000869$, im Mittel $= 0.000896$.

Digitized by Google

Das Längenverhältniss der positiv und der negativ wirksamen Säulenabschnitte genauer anzugeben, wäre kaum ausführbar gewesen; die Gewinnung besserer Zahlen muss überhaupt, sofern sie der Mühe werth ist, der Zukunft vorbehalten bleiben. Vorläufig scheint es, als sei die elektromotorische Kraft der Haut an den Winterfischen bedeutend (etwa viermal) kleiner als an den Sommerfischen, was leicht möglich ist.

Sowohl der Richtung wie der Grössenordnung der Wirkung nach verhält sich also beim Zitterrochen die Haut elektromotorisch wie beim Zitteraal; der Richtung nach sicher auch so beim Zitterwelse, und wahrscheinlich ist auch die Grösse der Kraft hier von derselben Ordnung wie bei den beiden anderen Fischen (s. oben S. 694). Diese Wirkung kann auf dreierlei Art aufgefasst werden.

Erstens liegt es nahe zu fragen, ob man nicht darin auf einen Potentialunterschied zwischen Längs- und Querschnitt der Säulen gestossen sei, da vielleicht die Haut einen unwirksamen leitenden Überzug über den natürlichen Querschnitt der Säulen vorstellt, ähnlich wie die sehnigen Ausbreitungen über dem natürlichen Muskelquerschnitt. Diese Meinung wird dadurch widerlegt, dass man zwischen der Seitenfläche der Säulen und einem künstlichen Querschnitt keine in Betracht kommende Wirkung erkennt, keine merkliche Veränderung des Organstromes beim Rücken der einem solchen Querschnitt nahen Thonspitze auf den Querschnitt selber.

Die zweite Vermuthung ist, dass die Haut mit dem zur Ableitung dienenden Material und dem Organ eine Flüssigkeitskette bildet, beim Zitteraal nach dem Schema:[1]

Physiologischer Thon	Organ + Organ	Haut + Haut mit Flusswasser benetzt	Thon,

beim Zitterrochen nach dem Schema:

Physiologischer Thon	Organ + Organ	Haut + Haut mit Seewasser benetzt	Thon,

und beim Zitterwelse nach dem Schema:

Hühnereiweiss	Organ + Organ	Haut + Haut mit Flusswasser benetzt	Hühnereiweiss.

Es kann auffallen, dass die Dazwischenkunft des Seewassers, vollends des alkalisch reagirenden Hühnereiweisses statt des mit phy-

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 265.

Digitized by Google

siologischer Chlornatriumlösung angekneteten Thones nicht ansehnlichere Unterschiede der Wirkung bedingt. Doch müsste man, um hier sicher zu urtheilen, erst die chemische Reaction der Zitterrochenhaut studiren, und auch Versuche mit zuleitenden Flüssigkeiten von mehr ausgesprochenem elektrochemischen Charakter anstellen.

Die dritte Vermuthung ist, dass die Haut selbständig elektromotorisch wirkt, wie, nach meiner Entdeckung,[1] die Haut der nackten Amphibien. Auch diese Annahme hat mancherlei gegen sich. Erstens wäre die Richtung der Kraft die umgekehrte, da bei den Amphibien die Haut von aussen nach innen wirkt. Zweitens wäre sie über elfmal kleiner als dort, wo die Hautstromkraft vielmehr von der Ordnung der Muskel- und Nervenstromkraft gefunden wird.[2] Drittens wurden bisher bei keinem der untersuchten Fische, unter denen auch schuppenlose waren, wie der Aal, Hautströme beobachtet.[3] Viertens schien mir beim Zitterrochen die elektromotorische Wirksamkeit der Haut die des Organs zu überdauern, was mehr zu einer Flüssigkeitskette passen würde. Fünftens gelang es mir nicht, an abgelösten Stücken Haut eine elektromotorische Wirkung von bestimmter Richtung und Grösse zwischen äusserer und innerer Fläche zu beobachten. Ich verfuhr dabei wie einst Hr. Rosenthal mit der Froschhaut:[4] in zwei aufeinandergelegte Glimmerblätter schlug ich Fenster mit dem Locheisen, legte die Haut dazwischen, und presste die Glimmerblätter zwischen die Thonschilde der Zuleitungsbäusche so ein, dass einerseits nur Bauch-, andererseits nur Rückenfläche der Haut den Thon berührte. Es ist zu sagen, dass bei diesem Versuche die Haut nicht mehr frisch war, und durch Trockniss wie durch häufiges Anfassen des Fisches gelitten haben mochte. Inzwischen scheint der Erfolg im Verein mit den übrigen Gründen doch sehr gegen selbständige elektromotorische Wirkung der Haut zu sprechen.

Um zwischen den beiden letzteren Auffassungen zu entscheiden, wären Versuche nöthig wie die, durch welche ich die elektromotorische Wirkung der Froschhaut feststellte.[5] Leider stossen sie hier auf grosse Schwierigkeiten. Das Ablösen hinreichend grosser Stücke unversehrter Haut, welches beim Frosch durch die unter der Haut liegenden Lymphräume begünstigt wird, ist am Zitterrochen nicht wohl ausführbar. Ich versuchte daher an den beiden ersten Winterfischen (V und VI)

---

[1] Monatsberichte der Akademie. 1851. S. 380; — Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. II. S. 9 ff.

[2] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 261.

[3] Untersuchungen über thierische Elektricität. A. a. O. S. 16. 17.

[4] Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w. 1865. S. 309.

[5] Untersuchungen über thierische Elektricität, a. a. O.

Digitized by Google

Ströme durch ungleichzeitiges Anlegen von Bäuschen zu beobachten, welche mit gesättigter Chlornatriumlösung getränkt waren. Beim Frosch und anderen nackten Amphibien erhält man dabei stets einen starken Strom von der jüngeren zur älteren Berührungsstelle in der Haut, weil durch deren Anätzung ihre in der Haut von aussen nach innen gerichtete elektromotorische Kraft vermindert, ja vernichtet wird. Ich stellte die Versuche am Schwanz der Rochen an, den ich mit einem Stück Rückenwirbelsäule und Körperscheibe hoch oben amputirt hatte. Natürlich fehlte es nicht an Strömen, doch hatten sie bald die eine, bald die andere Richtung, verschwanden auch öfter nicht bei fortgesetztem Anliegen beider Bäusche, so dass nichts darauf zu geben war, um so weniger, als theils aus dem Inneren der Körpertheile, theils von den benachbarten Wundflächen her Täuschungen drohten. Die Stärke der Ströme mit der beim Frosch zu vergleichen, hätte keinen Sinn gehabt; Kraftmessungen sind durch die Vergänglichkeit der Wirkungen ausgeschlossen.

Die ganze Angelegenheit ist nicht sehr wichtig, und hat schwerlich Bezug auf das elektromotorische Vermögen des Zitterrochen- und des Zitteraal-Organs; vielmehr ist zu vermuthen, dass auch bei anderen Fischen die Haut sich schwach positiv gegen elektromotorisch unwirksame innere Theile verhält, nur dass es dort an solchen Theilen fehlt, welche, wie die Organpraeparate, nur aus Haut und einem elektromotorisch unwirksamen oder nach bekanntem Gesetze schwach wirksamen Gewebe bestehen. Ob die beim Zitterwels beobachtete Positivität der Haut etwas zur Begründung der von Prof. Fritsch aufgestellten Hypothese beitragen könne, nach welcher das Organ dieses Fisches aus Schleimzellen der Haut entstanden wäre,[1] muss dahingestellt bleiben. Immerhin bildet die Erforschung der Hautungleichartigkeiten ein nothwendiges Glied in der Untersuchung des Organstromes, und die Möglichkeit, diese beiden Wirkungen von einander zu trennen, wo bis vor Kurzem noch jede Wirkung zweifelhaft, ja in Abrede gestellt war, zeugt wenigstens von der Überlegenheit unserer Versuchsweisen.

§. III. *Über Polarisation des Organs durch Wechselströme.*

Die wichtigsten Fragen über das elektrische Organ knüpfen sich augenblicklich an dessen Verhalten beim Hindurchsenden fremder homodromer oder heterodromer Ströme, in Betreff erstens der hinter-

[1] Monatsberichte u. s. w. 1881. S. 1154; — Archiv für Physiologie u. s. w. 1882. S. 66.

Digitized by Google

bleibenden Polarisationen, zweitens der scheinbar irreciproken Leitung des Organs. Giebt es relativ positive Polarisation des Organs, oder ist sie nichts als die allmählich in den Organstrom auslaufende Nachwirkung eines Schlages? Leitet das Organ irreciprok, oder entsteht nur der Anschein solcher Leitung durch absolut positive, zum homodromen Strom sich addirende Polarisation, was auch der letzteren Ursache und Bedeutung sei?

Zur Entscheidung der ersten Frage hatte ich schon früher Organpraeparate mit Wechselströmen tetanisirt, in der Meinung, dass, wenn die absolut positive Polarisation Nachwirkung des Schlages wäre, sie nach kurzem Tetanus mit grösster Stärke auftreten müsste. Ich bediente mich des Schlitteninductoriums mit gewöhnlicher Einrichtung, auf dessen ganz mit Stäben gefüllter primärer Rolle die secundäre Rolle ganz aufgeschoben war. Die Enden dieser Rolle wurden mit den beiden Klemmen der Polarisationswippe verbunden, welche sonst die Enden des Säulenkreises aufnehmen.[1] Die Feder des Inductoriums spielte, und sobald die Wippe nach doppelter Öffnung des Bussolkreises den secundären Kreis doppelt schloss, trafen die in letzterem inducirten Ströme das Praeparat. Beim Zurückfallen der Wippe erwartete ich unter allen Umständen stärkste absolut positive Polarisation, erhielt aber nach 5″ langem Tetanisiren nur schwache Polarisation in dem Sinne, als seien die Öffnungsschläge allein vorhanden, nämlich absolut und relativ positive Polarisation bei homodromen, absolut positive und relativ negative Polarisation bei heterodromen Öffnungsschlägen.[2] Das Ergebniss konnte nicht für entscheidend gelten, sofern die Versuche im Winter 1883—84 am letzten Fisch und am zweiten Tage angestellt wurden, wo das Organ nicht mehr gehörig leistungsfähig war; eben deshalb konnten sie damals nicht wiederholt werden.

Als im Sommer darauf neue Zitterrochen eintrafen, nahm ich bei erster Gelegenheit den Faden dieser Untersuchung wieder auf. Auch die zu den nächstfolgenden Versuchen verwendeten Praeparate liessen zu wünschen übrig, denn sie stammten von dem zuerst angelangten, im Opisthotonus befindlichen Fische her (s. oben S. 691), und abermals waren seit dem Tode 24—27 Stunden verflossen, doch gaben

[1] In Fig. 151 auf Taf. VI der 2. Abth. 2. Bds. der Untersuchungen über thierische Elektricität sind es die, zu welchen die mit s_1 und s_4 bezeichneten Drähte hingehen.

[2] Vergl. I. S. 228. Hier steht Z. 19 v. o. durch einen Schreibfehler, dass die Wippe statt des Säulenkreises den primären Kreis des Inductoriums schloss. Diese bei einer früheren Gelegenheit (diese Berichte 1883, S. 366) geübte Art, einen Tetanus von bestimmter Dauer mittels der Wippe zu erzeugen, war selbstverständlich hier ausgeschlossen, da die secundäre Rolle eine Nebenschliessung zur Bussole abgegeben hätte.

Digitized by Google

sie noch kräftigen Organstrom, als untrügliches Zeichen erhaltener Leistungsfähigkeit.

Um unter einfacheren Verhältnissen zu arbeiten als das vorige Mal, begann ich damit, am Schlitteninductorium die gewöhnliche Einrichtung mit der Helmholtz'schen zu vertauschen, jedoch ohne die gewünschte Congruenz des zeitlichen Verlaufes des Schliessungs- und Öffnungsschlages zu erreichen, was in Wirklichkeit bei etwas strengeren Anforderungen nicht so leicht ist, wie in der Theorie. Aus Gründen, welche sich meinen Formeln[1] entnehmen lassen, war jetzt der Schliessungsschlag der kürzere stärkere, der Öffnungsschlag der längere schwächere. Demgemäss spielte der Schliessungsschlag jetzt die Rolle, wie früher der Öffnungsschlag: war er homodrom, so folgte 5″ langem Tetanus starke absolut und relativ positive, war er heterodrom, schwache absolut positive, relativ negative Polarisation. Erstere Wirkung nahm bei öfterem Wechsel der Richtungen sehr schnell ab.

Nun ersetzte ich aber das Inductorium durch die schon öfter, zuletzt in der Abhandlung 'Über secundär-elektromotorische Erscheinungen u. s. w.' von mir erwähnte Saxton'sche Maschine, welche einst Oertling für Dove baute, aus dessen Nachlass ich sie für das physiologische Institut erwarb.[2] Die Drehscheibe wurde von der Maschine entfernt, und deren Achse durch einen Schnurlauf mit dem Wirtel eines Wassermotors verbunden, der den Anker siebenmal in der Secunde drehte. Der Pachytrop stand auf 'Physiologisch'. Mit den Federn 1 und 2 auf Walze I, 9 auf Walze II lieferte jede Umdrehung zwischen den Ständern C und D[3] zwei gleiche und entgegengesetzte Extraströme von unerträglicher Stärke bei subjectiver Prüfung mit Handhaben. Die Enden der Rollen der Maschine wurden anstatt der Enden des inducirten Kreises des Inductoriums mit der Wippe verbunden. Indem diese während des Ganges der Maschine ihren Hin- und Hergang vollzog, liess sich die polarisirende Wirkung einer Reihe wahrhaft congruenter Wechselströme auf das Organ studiren. Die etwaige Fernwirkung der Maschine auf die Bussole konnte bei der stetigen Rotation des Ankers durch das Spiel der Wippe nicht verändert werden, doch wurde noch besonders darauf geachtet, dass wirklich keine Änderung stattfand.

Ich wendete folgweise die 1″- und die 5″-Scheibe der Polarisationswippe an, auch tetanisirte ich nach der Uhr 30, 45, 120″ lang. Der Erfolg war sehr einförmig. Gleichviel wie die Enden

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 233 ff.

[2] Diese Berichte, 1883. Bd. I. S. 360.

[3] Vergl. die Abbildung in Poggendorff's Annalen u. s. w. 1842. Bd. LVI. Taf. II. Fig. 1.

Digitized by Google

der rotirenden Rollen mit Rücken- und Bauchfläche der Praeparate verbunden wurden, und gleichviel wie lange der Tetanus dauerte, ich bekam nichts zu sehen als absolut positive Polarisation, an frischen Praeparaten von solcher Stärke, dass bei 5000 Windungen in 30^{mm} Abstand vom Magnetspiegel und bei $\varepsilon = n$ die Scale aus dem Gesichtsfelde verschwand, dann schwächer und schwächer, wie denn an manchen Praeparaten die Wirkung auch von vornherein sehr schwach war. Absolut negativ ward sie nie. Der einzige Unterschied, den längere Dauer des Tetanus mit sich zu bringen schien, betraf die Nachhaltigkeit der homodromen Polarisation. Je länger tetanisirt worden war, um so schneller verschwand sie.

Staunenswerth war es, wie die Organpraeparate die gewaltigen Schläge ertrugen, zu deren Abstufung denn auch keine Veranstaltung getroffen wurde; man merkte ihnen gleichsam an, dass sie vom Handwerk seien, gewohnt, selber solche Schläge zu ertheilen.

Es hält nicht schwer, die Ergebnisse beim Tetanisiren mit congruenten Wechselströmen zu verstehen. Zunächst ist klar, dass, sobald congruente Schläge sich in abwechselnder Richtung und in gleichen Zeitabständen folgen, das Umkehren der Verbindungen der Maschine mit dem Praeparat illusorisch ist, und in Wahrheit keinerlei Änderung hervorbringt. Bei beiden Anordnungen hat man es mit einer gleichbeschaffenen Reihe abwechselnd homodromer und heterodromer Ströme zu thun. Für das Praeparat ist es gleichgültig, ob die homodromen Ströme bei der Stellung des Ankers im Azimuth 90°, die heterodromen bei der im Azimuth 270° entstehen, oder umgekehrt. Nach unseren Voraussetzungen erzeugen die homodromen und die heterodromen Ströme gleich starke negative Polarisation, und diese Polarisationen, welche übrigens wegen der Kürze der Schläge wohl keine grosse Höhe erreichen, heben einander auf. Ausser der relativ negativen Polarisation erzeugen aber die homodromen Ströme absolut und relativ positive Polarisation, die heterodromen, wiederum nach unseren Voraussetzungen, keine oder nur spurweise relativ positive, absolut negative Polarisation, so dass die absolut positive Polarisation durch die homodromen Ströme fast oder ganz rein, unter günstigen Umständen mit grosser Kraft zum Vorschein kommt. Nur worauf das schnellere Sinken der homodromen Polarisation nach längerem Tetanisiren mit congruenten Wechselströmen beruht, bleibt im Dunkeln.

Digitized by Google

§. IV. *Es wird versucht, die negative Polarisation durch die ausgesonderten Schliessungsschläge eines Inductoriums mit der durch die ausgesonderten Öffnungsschläge zu vergleichen.*

Um über die secundär-elektromotorischen Erscheinungen am elektrischen Organ bei ungleichem Verlauf der Wechselströme etwas sicherer urtheilen zu können, wäre es zweckmässig, zuerst noch die Frage zu beantworten, welche Ströme bei gleicher darin sich abgleichender Elektricitätsmenge stärker negativ polarisiren, die längeren schwächeren Schliessungs- oder die kürzeren stärkeren Öffnungsschläge. Dies müsste sich dadurch entscheiden lassen, dass man ein Organpraeparat in heterodromer Richtung abwechselnd der ausgesonderten Reihe der Schliessungs- und der der Öffnungsschläge des Inductoriums aussetzte. Bei dieser Gelegenheit bemerkte ich, dass ich, bei meinen Versuchen über innere Polarisation feuchter poröser Leiter überhaupt, diesen scheinbar so einfachen und doch so lehrreichen Versuch anzustellen versäumt hatte, daher ich beschloss, jetzt zugleich diese Lücke auszufüllen. Mit Hülfe von Dove's Disjunctor schien dies leicht ausführbar.

Dieser Apparat, der nach seinem Tode gleichfalls in den Besitz des physiologischen Institutes überging,[1] besteht aus drei Paaren kupferner Räder auf gemeinschaftlicher gläserner Achse, um welche sie durch Drehung gegeneinander verstellbar sind. Die beiden Räder jeden Paares sind mit einander leitend verbunden; die drei Paare, welche *A*, *B*, *C* heissen mögen, durch die Achse von einander isolirt. Das eine Rad jeden Paares taucht mit verquicktem Rande stetig in eine Quecksilberrinne. Der Rand des anderen hat acht kupferne und acht gläserne Sectoren von gleicher Länge, und an seinem Umfange schleift eine kupferne Feder.

Man lässt das eine Paar, *A*, den primären Kreis schliessen und unterbrechen. Indem man eines der anderen Paare, etwa *B*, in den secundären Kreis schaltet und es um eine halbe Sectorbreite so gegen *A* verstellt, dass seine Feder auf Glas steht, wenn die von *A* auf Glas geräth, wird nur die Reihe der Schliessungsschläge durchgelassen. Verstellt man auch *C* gegen *A* um eine halbe Sectorbreite, jedoch so, dass seine Feder auf Glas steht, wenn die von *A* auf Metall geräth, so wird nur die Reihe der Öffnungsschläge durchgelassen. Man kann aber dasselbe noch einfacher erreichen, indem man ausser dem Paare *A*

[1] Ich hatte schon früher einmal durch Dove's Güte zu ähnlichem Zweck mit demselben Apparat gearbeitet. Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. 1. 1849. S. 405.

Digitized by Google

nur ein zweites Paar, *B* oder *C*, anwendet, und das eine Mal die Räder in dem einen, das andere Mal in dem anderen Sinne sich drehen lässt.

In meinen Versuchen wurde die Drehung zunächst wieder durch den Wassermotor bewirkt, dessen Wirtel mit einer Schnurscheibe an der Disjunctor-Achse verbunden war. Der Wechsel im Sinne der Drehung wurde dadurch hervorgebracht, dass der Schnurlauf das eine Mal ungekreuzt, das andere gekreuzt verlief. Die Entfernung des Disjunctors vom Wassermotor war so gross gewählt, dass durch die Kreuzung der Pese kein merklicher Unterschied ihrer Spannung entstand. Die Zahl der Schläge betrug 44 in der Secunde.

Die Aussonderung der einen und der anderen Reihe von Schlägen geschieht freilich nur mit der Sicherheit, mit welcher auf stetige Berührung schleifender Federn zu rechnen ist. Doch schien diese Stetigkeit in genügendem Maasse vorhanden zu sein. Denn als ich bei ausgeschlossenen Öffnungsschlägen mich mit Handhaben in den Kreis der secundären Rolle schaltete, welche der primären bis auf ein oder zwei Centimeter genähert war, hatte ich eine ganz gleichmässige Empfindung, da doch, wenn die den primären Kreis schliessende Feder gehüpft hätte, mir jede Öffnung als heftiger Schlag bemerklich geworden wäre.

Mit diesen Mitteln hoffte ich nun, wie gesagt, leicht zu erfahren, wie die innere Polarisation feuchter poröser Körper, und die zunächst mit ihr vergleichbare negative Polarisation des elektrischen Organs, weiterhin vielleicht der Muskeln und Nerven, bei beständiger Elektricitätsmenge von der Abgleichungszeit abhängt. Die Polarisationswippe wurde in den secundären Kreis geschaltet, und die Reihe der Schläge 5″ lang dem Polarisationsobject durch die mit Thonschilden versehenen gewöhnlichen Zuleitungsgefässe zugeführt. Als Polarisationsobjecte sollten dienen balkenförmige Fliesspapierbäusche, Weissbuchenholz, Bimsstein, Dachziegel von den üblichen Dimensionen, d. h. 50^{mm} lang und von einem Quadratcentimeter Querschnitt. Das Fliesspapier war mit destillirtem Wasser getränkt, Holz, Bimsstein und Ziegel bis zum Untersinken darin gesotten.[1] In demselben, bezüglich der Induction secundären, der Polarisation primären Kreise befand sich wie gewöhnlich die Bussole (*P*), mit 53 Windungen in 20^{mm} Abstand vom Spiegel. Ein zweites Paar Zuleitungsgefässe mit Keilbäuschen, deren mit physiologischem Thon verwahrte Schneiden dem Polarisationsobject anlagen, stellte, gleichfalls in gewohnter Weise, die Enden der Bussole (*S*) vor.

[1] Vergl. Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. II. S. 430 ff.

Digitized by Google

Im ersten Anlauf schienen die Schliessungsschläge an negativ polarisirender Wirkung die Öffnungsschläge zu übertreffen. Doch stellte sich alsbald heraus, dass darauf nichts zu geben war. Bei richtigem Gange der Versuche hätte nämlich an der Bussole (*P*) die Ablenkung durch die Schliessungsschläge der durch die Öffnungsschläge merklich gleich sein müssen. Es zeigte sich aber, dass stets die Schliessungsschläge bei weitem stärkere Ablenkungen erzeugten. Da ich mich zuerst gewöhnlicher Schlitteninductorien bediente, an deren secundären Rollen keine besonderen Maassregeln zur Isolirung der Windungen von einander getroffen sind, fasste ich den Verdacht, dass sich im Inneren der Rollen ein Funkencanal gebildet habe, in welchem bei der Öffnungsinduction die hochgespannte Elektricität überspränge, anstatt den Weg durch das Polarisationsobject und die Bussole (*P*) einzuschlagen. Um unter einfacheren Verhältnissen zu arbeiten, liess ich das Polarisationsobject und die damit in Verbindung stehenden Zuleitungsgefässe fort, und ersetzte sie durch eine oder zwei Widerstandsrollen aus einem Stöpselrheostat, welche einen Widerstand von beziehlich 60 und 120 S. E. darboten. An Stelle der gewöhnlichen Inductorien nahm ich ein Ruhmkorff'sches Inductorium von Siemens und Halske, und da dessen Schläge, auch mit nur zwei Bunsen'schen Chromsäure-Elementen im primären Kreise, den Bussolen Gefahr zu drohen schienen, zog ich die primäre Rolle aus der secundären zum Theil heraus, so dass ich die Wirkung abstufte, wie am Schlitteninductorium. Im Inneren der secundären Rolle sprangen an diesem Apparat sicher keine Funken mehr über; bei der Länge der Leitung, welche nothwendig war, damit die Fernwirkungen des Inductoriums auf die Bussolen verschwänden, war es dagegen sehr schwer, allen Funken und Seitenentladungen ein Ende zu machen. Nachdem alle Leitungen aus dick mit Guttapercha überzogenem Draht hergestellt waren, schien dies in befriedigendem Maass erreicht zu sein. Es zeigte sich aber auch hier, dass die Öffnungsschläge an Bussole (*P*) viel schwächer ausfielen als die Schliessungsschläge, und zwar war der Unterschied um so grösser, je tiefer die primäre Rolle in die secundäre geschoben wurde; ja bei einer gewissen Stärke der Induction wurde sie Null, und darüber hinaus kehrte sie sich um, so dass die Öffnungsschläge den Spiegel in derselben Richtung ablenkten, wie die Schliessungsschläge, nur viel schwächer und sehr unregelmässig.

Nun argwöhnte ich, dass in der Bussolrolle selber Funken übersprängen, obschon ich nicht verstand, wie dabei verkehrte Ablenkungen stattfinden konnten. Um indess ganz sicher zu gehen, ersetzte ich die gewöhnliche Thermorolle der Bussole durch eine solche, welche aus mit Guttapercha bekleidetem Drahte gewickelt war, aber der Er-

Digitized by Google

folg blieb der nämliche: nach wie vor erzeugten die ausgesonderten Öffnungsschläge eine verschwindend kleine Ablenkung im Vergleich zu der durch die Schliessungsschläge, und bei grösserer Stärke der Induction kehrte sich erstere Ablenkung um, d. h. die Öffnungsschläge wirkten scheinbar im selben Sinne wie die Schliessungsschläge. Dass die Öffnungsinduction dabei in voller Stärke vor sich ging, bewiesen die Funken in jeder irgendwo angebrachten Unterbrechung, und die Seitenentladungen, wenn einem entblössten Theile der Leitung Gelegenheit dazu geboten wurde.

Einzelne Schliessungs- und Öffnungsschläge, bei stillstehendem Disjunctor mittels eines Schlüssels im primären Kreise erzeugt, bewirkten ganz regelmässige Ausschläge von gleicher Grösse zu beiden Seiten des Nullpunktes, und was das Merkwürdigste war, als statt des Disjunctors der WAGNER'sche Hammer oder der FOUCAULT'sche Quecksilber-Unterbrecher in den primären Kreis gebracht wurden, hielten sich die Schliessungs- und Öffnungsschläge das Gleichgewicht so vollkommen, wie nur zu erwarten war.

Da man dabei den Spiegel im Takte der Unterbrechungen zittern sah, entstand die Vermuthung, dass das Verschwinden der durch die Öffnungsschläge auf den Spiegel erzeugten Wirkung an die grössere Zahl der Unterbrechungen geknüpft sei, welche am Disjunctor bei seiner Drehung durch den Wassermotor geschahen. Ich liess deshalb einen Gehülfen den Disjunctor erst langsam, dann schneller und schneller mittels der daran befindlichen Schnurscheibe drehen, wobei sich herausstellte, dass in der That bei langsamem Drehen die Öffnungsschläge noch regelmässig wirkten, bei schnellerem Drehen aber schwächer und schwächer, bis ihre Wirkung sich umkehrte. Wurde solche Einrichtung getroffen, dass beide Schläge durchgingen, so überwogen stets die Schliessungsschläge, um so stärker, je schneller gedreht wurde.

Jetzt war nur noch die Frage, ob die am Disjunctor bei grosser Umdrehungsgeschwindigkeit hervortretende Unregelmässigkeit dieser Vorrichtung eigen sei, oder bei rascherer Aufeinanderfolge von Schliessung und Öffnung, als der WAGNER'sche Hammer oder der FOUCAULT'sche Unterbrecher sie gestatten, auch sonst sich zeigen würde. Ich brachte in den primären Kreis des RUHMKORFF'schen Inductoriums die Unterbrechungsfeder eines gewöhnlichen Schlittenapparates, welche nach einer älteren Bestimmung von Hrn. VON HELMHOLTZ 150—300 mal in der Secunde den Kreis öffnet, und ferner eine auf Ut_2 abgestimmte Unterbrechungs-Stimmgabel von KÖNIG in Paris, welche also 256 einfache Schwingungen in der Secunde vollzieht, oder 128 Mal den Kreis öffnet. Allein auch mit diesen Hülfsmitteln erhielt ich, so gut wie mit dem WAGNER'schen Hammer und mit dem FOUCAULT'schen Unter-

Digitized by Google

brecher, regelmässige Wirkungen, obschon die Aufeinanderfolge der Schliessungs- und Öffnungsschläge eine viel schnellere war, als am Disjunctor, der höchstens 45 Öffnungsschläge in der Secunde lieferte (s. oben S. 705).

Damit war ausgemacht, dass in Folge eines unerklärlichen Umstandes der Disjunctor über eine gewisse, schwer zu bestimmende und innezuhaltende Geschwindigkeit hinaus nicht vermag, Reihen ausgesonderter Schliessungs- und Öffnungsschläge zu liefern, in denen dieselbe Elektricitätsmenge sich abgleicht. Die nächste Aufgabe wäre, jenem Umstande weiter nachzuspüren und herauszubringen, was aus den grossen, in den Öffnungsschlägen des Inductoriums unter hoher Spannung fortgetriebenen Elektricitätsmengen werde, welche hier spurlos zu verschwinden scheinen. Diese Ermittelung ist unentbehrlich, um für Theorie und Ausführung eines so wichtigen Apparates wie der Disjunctor die Grundlage zu gewinnen, weshalb ich auch glaubte, diese Versuchsreihe, trotz ihres unerfreulichen Ergebnisses, nicht vorenthalten zu sollen.

Man frägt vielleicht, warum ich, nach unverrichteter Sache am Disjunctor, nicht versuchte, die negative Polarisation durch einen einzigen Schliessungs- und Öffnungsschlag zu vergleichen, wie sie nach Obigem und nach sonstigen Erfahrungen ja gut zu erhalten sind. Natürlich liegt dies nahe, und ich behalte mir vor auf diesen Plan zurückzukommen. Es wird aber gar nicht leicht zu bewerkstelligen sein, dass in beiden Fällen der Bussolkreis dieselbe Zeit nach dem polarisirenden Schlage geschlossen wird. Auch mit langsam gedrehtem Disjunctor müsste zuletzt das Ziel zu erreichen sein, freilich nicht ohne weitere Vorkehrungen, um die Zahl der das Polarisationsobject treffenden Schläge zu regeln, und ausserdem, wie im Fall der einzelnen Schläge, gleichmässige Schliessung des Bussolkreises nach dem letzten Schlage zu bewirken.

Dies Alles erfordert eine besondere Untersuchung, zu der mir augenblicklich die Musse fehlt. Was die Frage betrifft, wie die negative Polarisation im elektrischen Organe sich bei Schliessungs- und Öffnungsschlägen gestalte, so müssen wir uns vorläufig mit der einfachsten Annahme begnügen, dass sie der Elektricitätsmenge proportional, also bei beiden Schlägen die nämliche sei.

Digitized by Google

§. V. *Fortgesetzte Erörterung der Ergebnisse über Polarisation des Organs durch Wechselströme.*

Unter der zuletzt ausgesprochenen Voraussetzung im Verein mit der unzweifelhaften Thatsache, dass bei homodromer Richtung kurze starke Stromstösse stärkere absolut und relativ positive Polarisation erzeugen, als längere schwächere Ströme, lässt sich auch der Erfolg beim Polarisiren des Organs durch Wechselströme von Inductorien leicht erklären. Dann heben sich nämlich auch hier, wie bei den congruenten Wechselströmen der Saxton'schen Maschine, die relativ negativen Polarisationen in beiden Richtungen auf; da die heterodromen Schläge keine oder nur verschwindende relativ positive Polarisation erzeugen, bleiben nur die homodromen absolut positiven Polarisationen übrig, und diese fallen stärker aus bei homodromen starken kurzen als bei ebenso gerichteten schwachen langen Schlägen.

Eine andere Frage ist es, wie viel diese Versuche zur Entscheidung beigetragen haben, ob die homodrome absolut positive Polarisation nur Nachwirkung eines Schlages, oder eine selbständige Erscheinung sei. So wie ich es mir gedacht hatte, ist diese Entscheidung nicht herbeigeführt. Ich hatte übersehen, dass zwar die relativ negativen Polarisationen durch beide Ströme einander aufheben können, nicht aber, nach meiner eigenen Annahme, die relativ positiven, da, wenn es überhaupt dergleichen im Organ giebt, der heterodrome Strom sie nicht oder nur spurweise erzeugt. Es war also ein Fehlschluss, wenn ich darauf rechnete, dass das Tetanisiren an sich keine Polarisation hinterlassen würde, so dass eine dadurch erzeugte absolut positive Wirkung nunmehr ohne Weiteres als Nachwirkung von Schlägen aufzufassen sein würde. Wenn die beobachteten Erfolge für unsere Frage etwas bedeuten, sprechen sie eher im entgegengesetzten Sinne. Nach der Polarisationstheorie, um mich kurz so auszudrücken, lassen sich die Erscheinungen, wie man sah, unschwer deuten; bei der Nachwirkungstheorie weiss man nicht recht, woher bei heterodromer Richtung der stärkeren kürzeren Schläge die schwache absolut positive Polarisation rühre. Denn es ist schwer sich vorzustellen, dass, wenn einmal ein Schlag ausgelöst wird, er nicht unabhängig von der Stärke der Reizung sollte die Höhe erreichen, welche der Leistungsfähigkeit des Organes entspricht; und eben so wenig wahrscheinlich scheint es, dass die negative Polarisation durch kurze schnelle Schläge die durch lange schwache übertreffen solle. Nach Analogie der Polarisation metallischer Elektroden wäre eher das Gegentheil zu erwarten. Dies ist der Punkt, in welchem uns der im vorigen Paragraphen vergeblich erstrebte erfahrungsmässige Anhalt fehlt.

Digitized by Google

§. VI. *Vergebliche Versuche, durch heterodrome Ströme relativ positive Polarisation zu erzeugen.*

Bei dem Erwägen dieser Verhältnisse fiel mir auf, dass ich einen Versuchsweg, wenn auch nicht unbetreten gelassen, doch noch nicht bis zur letzten Grenze verfolgt hatte, welcher möglicherweise hier zum Ziele führen könnte. Wir haben nämlich wohl als Erfahrungssatz hingestellt, dass in den Versuchen mit Säulenströmen am Zitterwels, Zitteraal und Zitterrochen noch nie relativ positive Polarisation durch den heterodromen Strom gesehen wurde, aber ausdrücklich auf deren Wahrnehmung gerichtete Versuche bisher nicht unternommen. Diese müssten sich vorsetzen, die Organpraeparate mit möglichst starken und zugleich flüchtigen heterodromen Schlägen zu treffen. Gelänge es, in dieser Art relativ positive, absolut negative Polarisation zu beobachten, so wäre an deren Dasein wohl nicht mehr zu zweifeln, da man nicht füglich Umkehr der Schlagrichtung des Organs annehmen wird.

Zunächst blieb ich noch bei kurz geschlossenen galvanischen Strömen. Ich hatte zwar schon früher (I. S. 240, Reihe 19 und 20) vergeblich den Strom von fünfzig Grove kurze Zeit durch Organpraeparate gesandt; vielmehr hatte sich bei homodromer Richtung öfter ein negativer Vorschlag blicken lassen, bei welchem es schwer war sich etwas zu denken. Die Schliessungszeit betrug 0″.0629; ich wählte jetzt eine zwanzigmal kürzere.

4. Torp. — Frisch. — OS + 0.0078

SZ 0″.00315

L	S	↓	−54; −35	↑	+45; +15	↓	−14
	P	↓	13.5; 13	↑	21; 20.5	↓	15.

Der Misserfolg konnte nicht deutlicher sein. Jetzt setzte ich meine Hoffnung auf Inductionsschläge.

Die oben angewendete Saxton'sche Maschine bot gute Gelegenheit zu solchen Versuchen. Sie besitzt ein Paar an den angeführten Stellen beschriebener Ypsilonförmiger Federn, welche die Wechselströme der Maschine in gleichgerichtete verwandeln, so dass mit diesen Federn bei sieben Umdrehungen in der Secunde vierzehn Extraströme sich in derselben Richtung folgten. Während die Maschine im Gange war, wurde deren Kreis kürzere oder längere Zeit — 0″.031, 0″.098, 1″.024 — durch das Organpraeparat geschlossen. Bei nur 0″.031 Schliessungszeit hing es vom Zufall ab, ob gerade ein Extrastrom in diesen Zeitraum fiel, bei 0″.098 musste dies schon sicher der Fall sein, und es konnten zwei Ströme zur Wirkung gelangen. Die Versuche wurden

Digitized by Google

in diesem Winter an dem fünften und sechsten Fisch angestellt, an jenem am zweiten Tage, an diesem in vergleichsweise frischem Zustande. Die Organpraeparate zeigten zwischen Bauch- und Rückenhaut meist verkehrten Organstrom; sie stammten von denselben Organen wie die Praeparate, deren eine Hälfte negativ, die andere positiv wirkte (s. oben S. 696. 697). Der Erfolg der Versuche war wenig befriedigend. Bei der ganz kurzen Schliessung blieb, wie zu erwarten, öfter jede Wirkung aus. Bei homodromer Richtung der Ströme zeigte sich schwache absolut und relativ positive, bei heterodromer meist sehr viel stärkere absolut positive, relativ negative Polarisation. Beispiel:

6. Torp. — Frisch. — OS −0.0027. — 2'-Per.

SZ 0″031 SZ 1″024

↓ −220 ↑ +18 ↓ −210 ↑ +60 ‖ ↓ −430 ↑ ?; +10 ↓ −295.

Der primäre Strom wurde nicht beobachtet.

Der Saxton'schen Maschine liess ich ein Schlitteninductorium grösserer Art folgen, in dessen primärem Kreise sich eine Säule aus zwei grossen Bunsen'schen Chromsäure-Elementen befand. Die Feder des Wagner'schen Hammers war entfernt; an seine Stelle trat der oben beschriebene Disjunctor, der so eingerichtet war, dass er nur die Öffnungsschläge hindurchliess, deren aber 37 in der Secunde lieferte, von welchen also die Wippe in o″031 einen oder zwei auffing. Soviel sich nach der Spannung im secundären Kreis urtheilen liess, übertrafen die einzelnen Schläge bei weitem die der Saxton'schen Maschine. Der Erfolg war im Wesentlichen derselbe, es erschien keine relativ positive heterodrome Polarisation.

6. Torp. — Frisch. — OS +0.0065.

SZ 0″0031

↓ −500+x; −370 ↑ +155; +355.

Im letzten Falle sind vermuthlich zwei Schläge durchgegangen. Von den oben in §. IV beschriebenen Störungen beim Gebrauch des nur auf Öffnungsschläge eingerichteten Disjunctors bemerkte ich bei diesen Versuchen, welche vor jenen angestellt wurden, noch nichts. Auf alle Fälle würden sie den hier erhaltenen verneinenden Erfolg nicht erklären.

Auch mit dieser Abweisung wollte ich mich nicht zufrieden geben, sondern ich beschloss, jetzt noch die Wirkung eines einzigen Öffnungsschlages des ungeschwächten Ruhmkorff'schen Inductoriums zu prüfen. Die Polarisationswippe konnte dazu nicht dienen, vielmehr musste eine eigene Wippe gebaut werden, welche gestattete, unmittelbar nach Öffnung des primären Kreises und des Hindurchganges des Schlages durch das Organpraeparat auch den secundären Kreis zu öffnen, welcher

Digitized by Google

eine Nebenschliessung zum Bussolkreise dargestellt hätte, und letzteren zu schliessen. Wegen der Seitenentladungen, welche bei der gewöhnlichen Anordnung sich von den dem Praeparat anliegenden Keilbäuschen über die Zuleitungsgefässe und weiterhin verbreitet und möglicherweise störende Polarisationen hinterlassen hätten, wagte ich auch nicht, die Schliessung des Bussolkreises an zwei zwischen den Zuleitungsgefässen und der Bussole gelegenen Stellen des Bussolkreises vorzunehmen, sondern richtete es so ein, dass durch dieselbe Bewegung, welche erst den primären, dann den secundären Kreis öffnete, die Thonspitzen zweier mit der Bussole verbundenen unpolarisirbaren Leitungsröhren dem Praeparat zur Aufnahme des Polarisationsstromes angelegt wurden.

Auf eine in Holzlagern wagerecht drehbare gläserne Achse sind aufgesteckt vier Korke. Kork *I* trägt einen kupfernen Bügel, der bei der Ausgangsstellung der Wippe durch Eintauchen in zwei Quecksilbernäpfe den primären Kreis des Inductoriums schliesst, in welchem drei grosse Bunsen'sche Elemente thätig sind. Die Korke *II* und *III* tragen jeder eine unpolarisirbare Leitungsröhre, deren Thonspitze zunächst noch über dem Organpraeparate in der Luft schwebt. Kork *IV* trägt wieder einen kupfernen Haken, dessen eines Ende in einen Quecksilbernapf als eines Ende der secundären Rolle taucht, während sein anderes Ende mit dem anderen Ende der Rolle dauernd, aber beweglich verknüpft ist. Bei Drehung der gläsernen Achse aus der Ausgangsstellung öffnet sich der primäre Kreis, während der secundäre noch geschlossen ist. Der Schlag durchfährt das Praeparat, welchem er durch verquickte Zinkplatten in Zinksulphatlösung, und durch mit Thonschilden verwahrte Zinkbäusche zugeführt wird. Unmittelbar darauf öffnet sich auch dieser Kreis, und wieder unmittelbar darauf treffen die Thonspitzen das Praeparat. An der ränderirten Holzscheibe, die zum Drehen der Achse dient, sind zwei Anschläge angebracht, deren einer die Ausgangsstellung, der andere die Stellung der Wippe bestimmt, bei welcher die Thonspitzen gerade das Praeparat berühren.

Natürlich überzeugte ich mich vorher an einem Thonphantom an Stelle des Praeparates, dass der Durchgang des Schlages keine merkliche Wirkung auf die Bussole übte; nur eine Spur negativer Polarisation im Thone gab sich zu erkennen. Sodann compensirte ich den beim Anlegen der Spitzen an das wirkliche Praeparat etwa hervortretenden Organstrom, so dass beim Wiederanlegen der Spitzen, nachdem sie abgehoben gewesen waren, keine in Betracht kommende Ablenkung erfolgte. Die Funken im primären Kreise wurden durch den Fizeau'schen Condensator vermindert. Die Leitung von der secundären Rolle aus war wieder durchweg mit Guttapercha-Drähten hergestellt. An der Bussole *(S)* befanden sich 5000 Windungen auf Null.

Digitized by Google

Trotz der Gefahren, welche so gewaltige Elektricitätsbewegungen in der Nähe einer empfindlichen Bussole mit sich brachten, ging der Versuch ohne jede Störung vor sich. Er wurde zuerst an der seit dem October im Aquarium gehaltenen Torpedo angestellt. Sie schlug nur auf heftige Reizung. Die Praeparate zeigten aber noch angemessenen Organstrom. Der Erfolg des Versuches war abermals verneinend. Es gelang nicht, durch den heterodromen Öffnungsschlag des Inductoriums relativ positive Polarisation zu erhalten, sondern die beobachtete Polarisation war relativ negativ, absolut positiv. Da aber auch der homodrome Schlag meist relativ negative, nur schwächere Polarisation gab, so war es klar, dass die Leistungsfähigkeit des Organs für den Zweck nicht genügte, und dass der Versuch an einem frischen Fisch wiederholt werden musste.

Dies geschah denn auch vor Kurzem an der erst in diesem Frühjahr angelangten achten Torpedo, welche sich in verhältnissmässig gutem Zustande befand. Allein der Erfolg blieb im Wesentlichen derselbe. Der homodrome Schlag erzeugte jetzt absolut und relativ positive Polarisation weit über die Grenzen der Scale hinaus, und der heterodrome gleichfalls über deren Grenzen hinausreichende absolut positive, relativ negative Polarisation; auch hinterblieben sehr allmählich schwindende Wirkungen in demselben Sinne. In dem Maasse, wie bei öfterer Wiederholung des Versuches die Leistungsfähigkeit sank, verminderte sich die Heftigkeit der Erscheinungen, und es kam zum gewohnten Bilde absolut und relativ positiver Ausschläge durch die homodromen, relativ negativer, absolut positiver Ausschläge durch die heterodromen Inductionsströme. Beispielsweise erhielt ich mit 5000 Windungen in 20^{mm} Abstand:

$$\downarrow -85 \uparrow +360 \downarrow -57 \uparrow +135.$$

Aber nie erzeugten die heterodromen Schläge relativ positive Polarisation.

Es war immer noch die Möglichkeit da, dass letztere, obschon vorhanden, durch relativ negative Polarisation verdeckt werde. Obschon die Öffnungsschläge des Inductoriums, bei Anwendung des Condensators, nur von sehr kurzer Dauer sind, wollte ich doch, um Nichts unversucht gelassen zu haben, auch noch Entladungsschläge der Leidener Flasche anwenden. Dazu diente dieselbe Wippe, wie für die RUHMKORFF'schen Öffnungsschläge. In einer ersten Versuchsreihe, an derselben siebenten Torpedo, die so lange aufbewahrt worden war, entlud Prof. CHRISTIANI die an der HOLZ'schen Maschine geladene Flasche durch das Praeparat, und ich brachte die Thonspitzen in Berührung damit sobald ich den Funken gehört hatte. Die

Digitized by Google

Praeparate waren vielleicht zufällig besser als die den Inductionsschlägen ausgesetzt gewesenen; beispielsweise erhielten wir:

$$\downarrow -448 \uparrow +55 \downarrow -11 \uparrow +48.$$

Doch war es klar, dass die Versuche an einem leistungsfähigeren Thiere wiederholt werden mussten.

Natürlich geschah dies an der jüngst geopferten achten Torpedo zusammen mit dem erneuten Versuche am Inductorium. Diesmal war folgende Vorkehrung getroffen. Ein fünfter Kork am freien Ende der gläsernen Achse der Wippe trug einen rechtwinklig gebogenen starken Messingdraht, dessen einer Schenkel eine Verlängerung der Achse darstellte, und mit der einen verquickten Zinkplatte leitend und beweglich verbunden war, welche dem Organpraeparat den Schlag zuführen sollte. Der andere zur Achse senkrechte Schenkel endete in einen geschlossenen Ring. Die geladene Flasche wurde so gelagert, dass ihre äussere Belegung mit der anderen Zinkplatte leitend verbunden war. Durch Drehung der Achse zwischen den Anschlägen an der ränderirten Scheibe kam der Ring dem Knopfe der inneren Belegung so nahe, dass der Funke übersprang, und der Schlag das Praeparat durchfuhr, kurze Zeit ehe die Thonspitzen es erreichten. In dieser Reihe wurde die Leidener Flasche (von 565 Quadratcentimetern Belegung) am Conductor einer gewöhnlichen Elektrisirmaschine geladen, was durch Regeln der Zahl der Umdrehungen der Scheibe eine grössere Gleichmässigkeit, und eine mehr sichere Abstufung der Ladung gewährte, als das Laden mit der Influenzmaschine.

Die Versuche gelangen ganz vorzüglich, ohne jedoch das gesuchte Ergebniss zu liefern. Zuerst lud ich die Flasche so stark wie möglich, mit fünfzig Umdrehungen der Scheibe, und die durch die Entladung erzeugten Polarisationen — absolut und relativ positiv durch den homodromen, absolut positiv und relativ negativ durch den heterodromen Schlag — erreichten eine unbeschreibliche Heftigkeit: es dauerte viele Minuten, bis das Ende der Scale wieder im Gesichtsfeld erschien. Ich ging dann aber allmählich bis auf fünf, ja zwei Umdrehungen, oder auch nur eine herunter, und immer noch erfolgten, durch die jetzt vergleichsweise nur schwachen Schläge, die Polarisationen mit grosser Stärke und vollkommener Regelmässigkeit. Beispielsweise erhielt ich mit fünf Umdrehungen:

$$\uparrow +270 \downarrow -470 \uparrow +125 \downarrow -250.$$

Von heterodromer positiver Polarisation war nichts zu sehen.

Ich brauche nicht zu sagen, dass alle Maassregeln getroffen waren, um unmittelbare Wirkungen der Flaschenschläge auf die Bussole

Digitized by Google

auszuschliessen, und dass ein Thonphantom an Stelle des Praeparates höchstens eine verschwindende Spur negativer Polarisation zeigte.

Weiter bin ich hier nicht gegangen, und glaube auch nicht, dass auf diesem Wege noch ein anderes Ergebniss zu erreichen sei. Wir werden aber unten (§. XV) einen, leider bisher nur einmal geglückten Versuch kennen lernen, in welchem der heterodrome Strom doch wirklich relativ positive, absolut negative Polarisation geliefert hat.

§. VII. *Die scheinbare Irreciprocität der Leitung im elektrischen Organ wächst mit der Stromdichte.*

In der Ersten Mittheilung schloss ich die Erörterung über die Natur der homodromen, absolut und relativ positiven Polarisation mit den Worten: »Noch eine Versuchsweise liegt sehr nahe, welche unter gewissen Bedingungen hier zum Ziele führen könnte: man braucht nur zu beobachten, ob auch bei längerer Schliessungszeit der homodrome Strom seine Überlegenheit bewahrt. Ist dies der Fall, so kann die positive Polarisation nicht einerlei mit dem Schlage sein, denn dieser kann bei längerem Hindurchgang eines beständigen Stromes durch das Organ doch nur im Augenblick der Schliessung« — vielleicht auch der Öffnung — »sich zum Säulenstrom hinzufügen. Ich habe nun in der That auch bei 1″, 5″, ja 20″ Schliessungszeit jene Überlegenheit noch gesehen (Reihe 8, 15, 16, 25); allein die Versuche dieser Art werden erst dann beweiskräftig, wenn die Hypothese von einem irreciproken Widerstande des Organes völlig beseitigt ist« (I. S. 228. 229).

Dass man auch bei noch viel längerer Schliessung den homodromen Strom überwiegen sieht, ist ausser Frage. Der Erfolg wird dadurch getrübt, dass einerseits das Praeparat durch Erwärmung besser leitend wird, andererseits die negative Polarisation den Strom schwächt; doch erhält man auch bei minutenlangem Schliessen der Ströme mit der Hand Reihen, in welchen die Überlegenheit des homodromen Stromes durch alle Hindernisse hindurch, wenn gleich nur schwach, immer noch deutlich sich ausspricht. Solche Reihen werden später mitgetheilt werden (s. unten §. XII). In diesem Sinne sprechen auch Dr. Sachs' Beobachtungen am Zitteraal-Organ.[1]

So lagert sich uns die Frage, ob das Organ wirklich oder nur scheinbar irreciprok leite, hier quer in den Weg, und wir müssen vor allen Dingen suchen, über diesen Punkt in's Klare zu kommen.

[1] Untersuchungen u. s. w. S. 218; — I. S. 224.

Digitized by Google

Das Erste, was sich darbietet, ist die sehr auffällige Abhängigkeit der Erscheinung von der Stromdichte, wie sie beispielsweise in folgendem Versuche sich zeigt.

Ich sandte die Öffnungsschläge des Schlitteninductoriums, dessen primäre Rolle mit Stäben gefüllt war, von Hautfläche zu Hautfläche durch das Praeparat, welches in gewohnter Art auf der dreieckigen Platte zwischen den Thonschilden der Zuleitungsgefässe ruhte. In demselben Kreise befand sich die Bussole. Die Schläge, durch Öffnen des Quecksilberschlüssels erzeugt, trafen, durch eine Pohl'sche Wippe umgekehrt, das Praeparat abwechselnd in homodromer und heterodromer Richtung. RA in folgender Tabelle ist der Abstand der secundären von der primären Rolle; die Zahlen sind die Ausschläge an der Bussole, deren Gewinde bei der sehr verschiedenen Stärke der Schläge in verschiedene Entfernung vom Spiegel gebracht werden musste, reducirt auf 5000 Windungen in 20^{mm} Abstand.

5. Torp. — Frisch. — OS + 0.0031.

RA = 0	↑	501	↓	215	↑	501	↓	215	↑	453	↓	215	↑	477	↓	191		
RA = 10^{cm}			↓	25	↑	28	↓	27	↑	28	↓	27	↑	27				
RA = 15^{cm}					↑	7	↓	7	↑	7	↓	7						
RA = 0					↑	453	↓	227.										

Im Mittel der gleichbedeutenden Zahlen verhalten sich die heterodromen zu den homodromen Ablenkungen

für RA = 0 :: 212.3 : 477.0 :: 100 : 224.7
» » = 10^{cm} :: 26.33 : 27.66 :: 100 : 105.1
» » = 15^{cm} :: 7 : 7 :: 100 : 100.0.

Es kann danach kein Zweifel sein, dass erstens die Erscheinung für die angewendeten Mittel erst bemerkbar wird, wenn die Stromstärke eine gewisse Schwelle überschreitet, und dass zweitens die Irreciprocität mit der Stromstärke wächst. Indem man den Versuch mit Praeparaten von verschiedenem Querschnitt anstellt, überzeugt man sich drittens, dass es sich dabei nicht um die Stromstärke, sondern, wie zu erwarten, um die Stromdichte handelt. Viertens geht aus den obigen Zahlen auch schon hervor, dass innerhalb des davon umfassten Bereiches die Irreciprocität langsamer wächst als die Stromdichte. Nimmt man, was später gerechtfertigt werden wird (s. unten §. XIII), als Maass der Irreciprocität den Unterschied der homodromen und der heterodromen Stromstärke bei gleichem Querschnitt, dividirt durch die homodrome Stromstärke, so findet man die Irreciprocität

Digitized by Google

$$\text{bei } 10^{cm}\text{ RA}, = \frac{1.33}{27.66} = 0.0481,$$

$$\text{» } 0^{cm}\text{ » }, = \frac{264.7}{477.0} = 0.5549,$$

statt $= 0.8293$, wie es sein müsste, wenn die Irreciprocität der Stromdichte proportional wäre. Es ist wohl kaum zu bezweifeln, dass die Irreciprocität bezogen auf die Stromdichte sich asymptotisch einer festen Grenze nähern werde.

§. VIII. *Die scheinbare Irreciprocität der Leitung im elektrischen Organ hat ihren Sitz in jeder Querscheibe des Praeparates und wächst mit der Länge der durchströmten Säulenstrecke.*

Demnächst überzeugte ich mich, dass der Unterschied in der Stärke der Ströme nicht bloss sichtbar wird, wenn man sie von der einen mit Haut überzogenen Polfläche der Praeparate zur anderen führt, sondern auch zwischen beliebigen Punkten der Seitenflächen der Praeparate, und zwar um so stärker, je weiter von einander entfernt die Punkte liegen.

Wieder leitete ich die durch Öffnen des Quecksilberschlüssels erzeugten Öffnungsschläge des Schlitteninductoriums durch Praeparat und Bussole, doch wurde, dem Zweck des Versuches gemäss, das Praeparat diesmal nicht von Hautfläche zu Hautfläche durchströmt, sondern an der Seitenfläche mit den Thonspitzen der unpolarisirbaren Röhren zuleitend berührt, welche statt der Zuleitungsgefässe sich mit der Bussole im Kreise der secundären Rolle des Inductoriums befanden. Diese war ganz über die mit Stäben gefüllte primäre Rolle geschoben; an der Bussole befanden sich 5000 Windungen in 100^{mm} Abstand vom Spiegel.

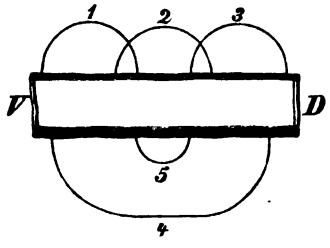


Fig. 2.

In Fig. 2 bedeuten die Bögen den durch secundäre und Bussol-Rolle gebildeten Kreis. Das Praeparat stammte von dem Tages zuvor getödteten fünften Fisch; die Organstromkraft betrug anfangs $+0.0072$.

Bei der Lage (1) der Thonspitzen erhielt ich

$$\uparrow 42 \downarrow 12 \uparrow 42 \downarrow 15^{sec};$$

bei der (2)

$$\uparrow 38 \downarrow 19 \uparrow 38 \downarrow 20^{sec};$$

endlich bei der (3)

$$\uparrow 40 \downarrow 22 \uparrow 40 \downarrow 22^{sec}.$$

Digitized by Google

Danach kann kein Zweifel sein, dass die irreciproke Leitung, was auch ihre Ursache sei, nichts mit der Haut zu thun habe, wie übrigens schon daraus folgte, dass ich sie zuerst an den Zitterwels-Praeparaten beobachtet hatte, wo die Haut nur Nebenschliessung bildete.

Man könnte aber noch meinen, dass ihr Sitz oberflächlich sei, dass sie auf einem nach Art des äusseren secundären Widerstandes nur an den Berührungsstellen der Thonspitzen mit den Seitenflächen des Praeparates sich entwickelnden Widerstande beruhe. Von vorn herein ist dies sehr unwahrscheinlich, da sie sichtlich mit der Stromdichte, nicht der Stromstärke, wächst; da sie schon bei so flüchtigen Schlägen bemerkt wird, wie die Öffnungsschläge der Inductorien; da die Dazwischenkunft der Haut an ihrer Erscheinungsweise nichts ändert; endlich da, wenn eine der Spitzen, die positive oder die negative, Sitz eines besonderen Widerstandes wäre, dies ebenso gut bei homodromem, wie bei heterodromem Strome der Fall sein müsste.

Jene Vorstellung wäre aber vollends unmöglich, wenn es sich zeigte, dass die Irreciprocität mit der Länge der durchströmten Säulenstrecke wächst. Dies ist nun in der That der Fall.

Die lange Organstrecke (4) gab nämlich

$$\uparrow 32 \downarrow 12 \uparrow 32 \downarrow 13^{ec}$$

die kurze (5)

$$\uparrow 37 \downarrow 29 \uparrow 37 \downarrow 29^{ec}.$$

Nimmt man dazu die Zahlen der mittellangen Strecken (1, 2, 3), so findet man im Mittel aller zusammengehörigen Zahlen das Verhältniss des homodromen zum heterodromen Strom in der langen Strecke wie

$$100 : 39.1,$$

in der mittellangen wie

$$100 : 45.8,$$

in der kurzen wie

$$100 : 78.4,$$

also um so grösser, je länger die durchflossene Strecke. Die folgenden Zahlen, welche eines der auffallendsten Beispiele von Irreciprocität bieten, wurden am zweiten Tage an der siebenten Torpedo, bei kleinerem (nicht verzeichnetem) Abstand der Bussolrolle erhalten:

Lange Strecke.

$$\uparrow 217 \downarrow 28 \uparrow 160 \downarrow 30$$

Kurze Strecke.

$$\uparrow 176 \downarrow 155 \uparrow 176 \downarrow 155$$

Lange Strecke.

$$\uparrow 165 \downarrow 14 \uparrow 165 \downarrow 22.$$

Digitized by Google

Das Verhältniss der Stromstärken mit der langen Strecke ist wie

$$100 : 13.3,$$

mit der kurzen wie

$$100 : 88.1.$$

Man könnte einwenden, dass die grössere Irreciprocität bei grösserer Länge nur dadurch vorgetäuscht werde, dass alsdann das Praeparat einen grösseren Theil des Gesammtwiderstandes des Kreises ausmache. Der geringe Unterschied zwischen der homodromen Stromstärke bei langer und bei kurzer Strecke zeigt zwar schon, dass der Widerstand der Praeparate, unstreitig wegen desjenigen der Thonspitzen, keineswegs einen grossen Theil des Gesammtwiderstandes bildete. Doch wäre es zweckmässig, einen so wichtigen Punkt, wie das Wachsthum der Irreciprocität mit der Länge der durchflossenen Strecke gegen jeden Zweifel zu sichern.

Die Vorstellung, dass die Irreciprocität der Leitung durch den Gesammtwiderstand des Kreises beeinflusst werde, setzt voraus, dass sie ausgedrückt werden könne durch einen additiven Term im Nenner der die heterodrome Stromstärke vorstellenden Ohm'schen Formel. Dieser Term heisse der Irreciprocitäts-Term. Nach unseren Zahlen scheint er mit der Länge der durchflossenen Strecke zu wachsen. Ist der hiergegen erhobene Einwand begründet, so müssen die Erscheinungen mathematisch darstellbar sein, auch wenn der Term von der Länge der durchflossenen Strecke unabhängig gesetzt wird.

Zunächst entsteht hier die Frage wie die Abhängigkeit der Irreciprocität von der Stromdichte aufzufassen sei. Sicher lässt sich diese Frage nicht beantworten. Doch scheint das Richtigste, die Irreciprocität mit der homodromen Stromdichte wachsen zu lassen, und zwar erlaubt uns der schon hervorgehobene geringe Unterschied der homodromen Stromstärken bei langer und bei kurzer Strecke den Irreciprocitäts-Term dieser Stromstärke ohne grossen Fehler einfach proportional zu setzen, anstatt ihn, dem Ergebniss des vorigen Paragraphen gemäss, langsamer als sie wachsen zu lassen. Alsdann können wir folgendermaassen weiter verfahren. An Stelle des Inductionsschlages denken wir uns ein ihm gleichwerthiges Stück von der kleinen Dauer t aus einem beständigen Strom ausgeschnitten, dem die elektromotorische Kraft E zu Grunde liegt. Es seien sodann:

R der Widerstand des die secundäre Rolle des Inductoriums und die Bussole enthaltenden Kreises von Thonspitze zu Thonspitze;

σ der specifische Widerstand des der Länge nach durchströmten Organs, abgesehen vom irreciproken Widerstande, oder bei homodromem Strom;

Digitized by Google

l die Länge der langen,
k die der kurzen Organstrecke;
q der Querschnitt des Praeparates;[1]
I_l, I_k die homodrome,
$I_{,l}, I_{,k}$ die heterodrome Stromstärke, beziehlich bei langer und bei kurzer Strecke;
$\sigma l/q$, $\sigma k/q$ die Widerstände beziehlich der langen und der kurzen Strecke bei homodromem Strome; endlich
$I_l c/q$, $I_k c/q$, wo c eine Constante, die Irreciprocitäts-Terme beziehlich für die lange und die kurze Strecke.

Dann haben wir

$$I_l = \frac{Et}{R + \frac{l\sigma}{q}}, \quad I_k = \frac{Et}{R + \frac{k\sigma}{q}},$$

$$I_{,l} = \frac{Et}{R + \frac{l\sigma}{q} + \frac{I_l c}{q}}, \quad I_{,k} = \frac{Et}{R + \frac{k\sigma}{q} + \frac{I_k c}{q}} \ldots . (a)$$

Hier ist der irreciproke Widerstand von den Dimensionen der durchflossenen Strecke nur insofern abhängig gemacht, als die homodrome Stromdichte, welcher der Irreciprocitäts-Term proportional gesetzt ist, von jenen Dimensionen abhängt. Nach unseren Beobachtungen muss nun, abgesehen vom verschiedenen Zeichen von I und $I_,$,

$$\frac{I_l}{I_{,l}} > \frac{I_k}{I_{,k}},$$

d. h. es muss

$$\frac{R + \frac{l\sigma}{q} + \frac{I_l c}{q}}{R + \frac{l\sigma}{q}} > \frac{R + \frac{k\sigma}{q} + \frac{I_k c}{q}}{R + \frac{k\sigma}{q}}$$

oder

$$(qR + k\sigma) I_l > (qR + l\sigma) I_k \ldots . (b)$$

sein. Dies ist unmöglich, da für $R = 0$ oder mittlere Werthe von R die linke Seite Factor für Factor die kleinere ist, und da, wenn man alle Widerstände gegen R verschwinden lässt, höchstens Gleichheit

[1] In der Ersten Mittheilung (S. 221—223) setzten wir bei ähnlichen Betrachtungen den Querschnitt $= 1$. Es würde die Ausdrücke vereinfachen und am Ergebniss nichts ändern, wenn wir auch hier so verführen, doch bleiben die Formeln durchsichtiger, wenn der Querschnitt an gehöriger Stelle erscheint. Übrigens vernachlässigen wir den Umstand, dass in unseren Versuchen der Strom nicht von Querschnitt zu Querschnitt, sondern von einer seitlich angelegten Thonspitze zur anderen das Praeparat durchdrang.

Digitized by Google

beider Seiten erreicht wird. Man kommt folglich nicht aus mit einem von der Länge der durchflossenen Strecke unabhängigen Irreciprocitäts-Term.

Setzt man dagegen in (*a*) statt $(l\sigma + I_l c)/q$, $(k\sigma + I_k c)/q$ beziehlich $\left(\sigma + \frac{I_l c}{q}\right) l/q$, $\left(\sigma + \frac{I_k c}{q}\right) k/q$, d. h. behandelt man den irreciproken Widerstand wie einen der Stromdichte proportionalen Zuwachs des specifischen Widerstandes bei homodromem Strome, so erhält man statt (*b*) die Ungleichheit

$$(qR + k\sigma)\, l\, I_l > (qR + l\sigma)\, k\, I_k \ldots . (c).$$

Diese ist für $R = 0$ freilich auch noch unmöglich, da sie dann auf $I_l > I_k$ sich reducirt. Für ein grosses R aber, wie das, mit welchem wir es zu thun haben, nähert sie sich der wirklich bestehenden Ungleichheit $l > k$; und damit kann für bewiesen gelten, dass die Irreprocität, alles Übrige gleichgesetzt, mit der Länge der durchflossenen Organstrecke wächst.

§. IX. *Durch Einführung eines additionellen Widerstandes lässt sich die Frage, ob der Anschein irreciproker Leitung im Organ auf Polarisation oder Leitung beruhe, nicht entscheiden.*

Wir gingen im Vorigen von der Voraussetzung aus, dass die irreciproke Leitung im Organ ausdrückbar sei durch einen additiven Term im Nenner der Ohm'schen Formel für die heterodrome Stromstärke. Dies Verfahren wird sich künftig rechtfertigen lassen, wie es sich auch soeben als für unseren Zweck tauglich erwies; für jetzt dürfen wir nicht vergessen, dass wir noch immer vor der Frage stehen, ob die irreciproke Leitung auf ungleichem Widerstand in beiden Richtungen, oder auf Polarisation beruhe. Als der sicherste Weg, diese Frage zu beantworten, erscheint beim ersten Blick der schon in der früheren Mittheilung (S. 220) erwähnte Versuchsplan, im primären Kreise einen so grossen Widerstand neben dem des Organpraeparates einzuführen, dass letzterer dagegen verschwände. Wenn dann auch der Unterschied der beiden Ströme verschwände, während der der Polarisationen bestehen bliebe, wäre der Ursprung des Unterschiedes aus verschiedenem Widerstande erwiesen. In einem Versuche der Art, den ich mit einem langen und engen Rohre voll physiologischer Steinsalzlösung als additionellem Widerstand anstellte, verschwand in der That der Unterschied der Stromstärken in beiden Richtungen; da aber wegen gesunkener Leistungsfähigkeit auch der

Digitized by Google

der Polarisationsströme fehlte, konnte daraus kein sicherer Schluss gezogen werden. In den Versuchen des vorigen Paragraphen blieb die scheinbare Irreciprocität der Leitung bestehen, obschon der Widerstand des Praeparates gegen den des übrigen Kreises nur klein war. Indessen verschwand er doch nicht, und die Polarisation wurde nicht beobachtet, so dass man aus jenen Beobachtungen nicht etwa schliessen darf, dass die Irreciprocität auf Polarisation beruhe.

Ich habe jetzt mehrere Versuche nach dem in Rede stehenden Plane mit scheinbar gutem Erfolge durchgeführt. Da Hydrowiderstände sich schlecht abstufen und schätzen lassen, ersetzte ich das Rohr mit Steinsalzlösung durch zwei Stöpselrheostaten von Siemens und Halske, deren jeder einen Widerstand von 10000 S. E. besitzt, und deren Rollen inductionsfrei gewickelt sind, was möglicherweise hier nicht ohne Bedeutung war. Durch Schliessen und Öffnen eines zu den Rheostaten als Nebenschliessung angebrachten Vorreiberschlüssels wurde deren Widerstand nach Belieben ausgeschlossen oder eingeschaltet. Ich leitete die Versuche so, dass ich durch das Praeparat abwechselnd den Strom von wenigen Grove ohne den grossen additionellen Widerstand, und den von vielen Grove mit diesem Widerstand sandte, jedesmal wiederum abwechselnd in homodromer und heterodromer Richtung, wobei die Zahl der Grove und der additionelle Widerstand so gewählt wurden, dass der Strom ohne Widerstand den mit Widerstand nicht zu sehr übertraf. So entstanden Reihen wie folgende, in welchen die Notation jetzt keiner Erläuterung mehr bedarf. An der Bussole (P) befanden sich 50, an der (S) 5000 Windungen auf Null.

I.

2. Torp. — Frisch. — L 19.^{mm} — OS + 0.0128. — 1′-Per.

SZ 0″.076.4

X	S	↓ −410	↑ +155	↓ −210	↑ +20	‖	XXX	↑ +59	↓ −32	↑ +29	↓ −10	‖
	P	114	143	115	141			75	74	78	77.5	

Ohne additionellen Widerstand. Mit Widerstand.

X	↓ −63	↑ +9	↓ −51	↑ +8
	118	146	118	149.

Ohne Widerstand.

II.

Neues Praeparat. — OS + 0.0224. — 1′-Per.

Dieselbe Schliessungszeit.

X	S	↑ +100	↓ −92	↑ +141	↓ −31	‖	XXX	↑ +80	↓ −55	↑ +52	↓ −37	‖
	P	187	146	184	148			82	80	82	81.5	

Ohne Widerstand. Mit Widerstand.

X	↑ +57	↓ −57	↑ —	↓ −34
	184	156	188	157.5.

Ohne Widerstand.

Digitized by Google

III.

7. Torp. — Zweiter Tag. — OS verkehrt, — 0.0031. — 1′-Per.

Dieselbe Schliessungszeit.

X	S	↑	+ 88	↓	− 35	↑	+ 70	↓	− 65	XI.	↑	+ 39	↓	− 63	↑	+ 15	↓	− 77
	P	↑	134	↓	189	↑	119	↓	94		↑	92	↓	88	↑	90.5	↓	89.5

Ohne Widerstand. Mit Widerstand.

X	↑	+ 26	↓	− 42	↑	{ − Spur / + 7	↓	− 38
	↑	105	↓	95.5	↑	104.5	↓	94.5.

Ohne Widerstand.

Diese Reihen erfüllen hinlänglich nahe die gestellte Bedingung. Trotz der reichlich fortbestehenden Polarisation, welche dem homodromen Strom zu gute kommt, dem heterodromen entgegentritt, verwischt der additionelle Widerstand fast vollständig den Unterschied der beiden Ströme. Danach scheint es bewiesen, dass die irreciproke Leitung auf Widerstand beruht. Leider zeigt nähere Betrachtung, dass auch diesmal die Anschauung nicht ausreichte, und dass abermals der Versuchsplan nicht vermag zwischen Polarisation und Widerstand zu entscheiden.

Wir nennen, wie zum Theil schon früher,

I die Stärke des homodromen,

$I_,$ des heterodromen Stromes;

P die Constante, welche mit der Stromdichte multiplicirt, für die Einheit der Länge der durchflossenen Strecke, die elektromotorische Kraft der homodromen absolut und relativ positiven Polarisation misst;

Π die entsprechende Constante für die durch beide Ströme bewirkte relativ negative Polarisation;

R den Widerstand des die Säule und die Bussole enthaltenden Kreises, ausschliesslich des Widerstandes der Säule selber;

n die kleine,

N die grosse Zahl von Grove'schen Elementen;

G die elektromotorische Kraft,

r den Widerstand des einzelnen Elementes;

W den additionellen Widerstand;

σ den specifischen Widerstand des Organs beim Durchströmen der Länge nach in beiden Richtungen;

l die Länge der durchflossenen Strecke, d. h. hier, wenn wir den Widerstand der Haut mit zu R rechnen, des Praeparates selber; endlich

q dessen Querschnitt.

Dann haben wir, bei kleiner Zahl der Grove und ohne additionellen Widerstand

Digitized by Google

$$I = \frac{nG - l \cdot \frac{I}{q}(\Pi - P)}{nr + R + \frac{l\sigma}{q}} \quad \ldots\ldots (d)$$

$$I_{,} = \frac{nG - l \cdot \frac{I_{,}}{q}\Pi}{nr + R + \frac{l\sigma}{q}} \quad \ldots\ldots (e)$$

Wie schon in der Ersten Mittheilung, S. 221—223, sind hier beide Polarisationen der Stromdichte proportional gesetzt. Selbstverständlich sind sie auch der Länge des Praeparates proportional.

Mit der Aufstellung obiger Formeln ist nun die Frage, ob auf diesem Wege zwischen den beiden Möglichkeiten entschieden werden könne, schon verneint. Denn G. S. Ohm selber hat vor mehr als fünfzig Jahren, als es sich um die ähnliche Frage nach dem Dasein eines Übergangswiderstandes neben der Polarisation der Elektroden handelte, darauf aufmerksam gemacht, dass in Ausdrücken wie (*d*) und (*e*) die Polarisation nur scheinbar anders eingehe als die Widerstände, dass sie also auch zu einem additionellen Widerstand in dieselbe Beziehung trete wie die constanten Widerstände, und von diesen durch Einführung eines additionellen Widerstandes nicht unterschieden werden könne.

In der That man findet

$$I = \frac{nG}{nr + R + \frac{l}{q}(\sigma + \Pi - P)}, \qquad I_{,} = \frac{nG}{nr + R + \frac{l}{q}(\sigma + \Pi)}$$

und wenn man kürzehalber setzt:

$$nr + R + \frac{l}{q}(\sigma + \Pi) = \Lambda_n$$

$$I = \frac{nG}{\Lambda_n - \frac{lP}{q}}, \qquad I_{,} = \frac{nG}{\Lambda_n},$$

$$I - I_{,} = \frac{nGlP}{\Lambda_n (q\Lambda_n - lP)} \quad \ldots\ldots (f).$$

Dieser Ausdruck ist endlich und positiv, so lange $q\Lambda_n > lP$; $q\Lambda_n = lP$ würde I unendlich machen, und $q\Lambda_n < lP$ dem heterodromen Strom die Oberhand verschaffen. Durch Einführung des additionellen Widerstandes und Vertauschen von n mit N wird (*f*)

Digitized by Google

$$I - I_{,} = \frac{NGlP}{(\Lambda_N + W)\,(q\,(\Lambda_N + W) - lP)}.$$

Für ein sehr grosses W nähert sich dieser Ausdruck dem Werthe

$$I - I_{,} = \frac{NGlP}{qW^2},$$

d. h. der Null, und somit stellen diese Formeln, in welchen der irreciproke Widerstand ausgelassen und nur die Polarisation berücksichtigt ist, den Thatbestand, soweit er vorliegt, genügend dar.

Nicht anders gestaltet sich das Ergebniss, wenn man die positive Polarisation P, statt I proportional, davon unabhängig setzt, was mehr der Hypothese entspricht, wonach sie nur Nachwirkung eines ausgelösten Schlages wäre; denn in diesem Falle kommt einfach

$$I - I_{,} = \frac{lP}{\Lambda_n} \text{ ohne,}$$

$$\text{und } I - I_{,} = \frac{lP}{\Lambda_N + W} \text{ mit}$$

additionellem Widerstand und vielen Grove. Der erste Ausdruck ist positiv, der zweite nähert sich für wachsende W der Null.

Folglich ist es nach den bisherigen Beobachtungen, trotz allem Anschein, nicht nöthig, zur Erklärung des Thatbestandes irreciproken Widerstand anzunehmen. So unwahrscheinlich es ist, dass die absolut und relativ positive Polarisation durch den homodromen Strom eine Verstärkung dieses Stromes im Vergleich zum heterodromen im Verhältniss von 100 : 13.3 bewirken könne (s. oben S. 719), die gewünschte Entscheidung ist auf diese Weise nicht herbeizuführen, und wir müssen sie in einem anderen Gebiet von Erfahrungen suchen.

§. X. *Maassbestimmungen über den Leitungswiderstand des elektrischen Organs vom Zitterrochen.*

Ganz abgesehen von allen nebenher daran sich knüpfenden Fragen, war es natürlich von grossem Interesse, Etwas über die Leitung des Organs im Vergleich zu der anderer Gewebe zu ermitteln. Das dabei zu befolgende Verfahren war durch die Versuche gegeben, welche ich 1871 über den Widerstand des Froschmuskels, der physiologischen Steinsalzlösung und des damit angekneteten Thones angestellt hatte,[1] wobei ich mich des zuerst von Hrn. Ranke angewendeten Kunstgriffes

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 373 ff.

Digitized by Google

bediente, die Gewebe, Flüssigkeiten u. d. m. in Glasröhren von gleichen Dimensionen einzuschliessen, um ihnen prismatische Gestalt, gleiche Länge und gleichen Querschnitt zu ertheilen.[1] Hinsichtlich der Einzelheiten der Methode verweise ich auf die damals gegebene Beschreibung. Um aber diese verständlicher zu machen, und weil bei aller Einfachheit der Apparat sich für unsere Zwecke doch sehr gut bewährt hat, bilde ich ihn hier in Fig. 3 nachträglich in etwas vervollkommneter Gestalt ab.

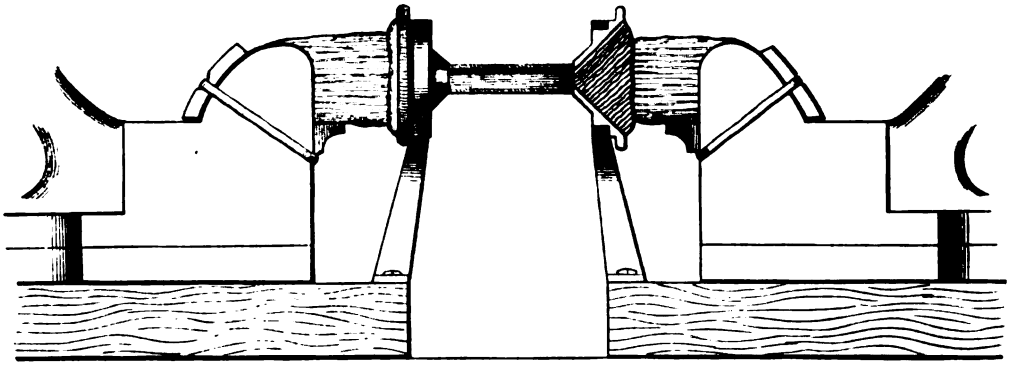


Fig. 3. — $^2/_3$ der nat. Grösse.

Der neue Apparat unterscheidet sich in einigen Punkten von meinem ursprünglichen Modell. Unwesentlich ist, dass die Trichter, die mit physiologischem Thon gefüllt die Grundflächen des die Gewebe u. d. m. enthaltenden Rohres mit den Zuleitungsbäuschen verbinden, statt aus Guttapercha aus Kammmasse bestehen, und von stark lackirten messingenen Ständern getragen werden; von grösserer Bedeutung, dass der Durchmesser ihrer Mündung die Dicke der Bäusche nur wenig übertrifft, daher die Seite ihrer Kegel nur noch 12.5^{mm} lang ist. Dadurch wird ihr Widerstand um einen nicht unbeträchtlichen, und insofern schädlichen Theil vermindert, als es wünschenswerth ist, dass der Widerstand der übrigen Leitung gegen den des Leiters, dessen Widerstand bestimmt werden soll, möglichst klein sei. Leicht erkennt man in der Figur, zwischen den Bäuschen der gewöhnlichen Zuleitungsgefässe, links den im Aufriss, rechts den im Durchschnitt gezeichneten Trichter mit der ihn erfüllenden Thonmasse, und zwischen den Trichtern eingeklemmt das Widerstandsrohr.

Die früher angewendeten Rohre, von 25^{mm} Länge und 4.6^{mm} lichtem Durchmesser, passen gerade für den *M. gracilis* eines Frosches von 22^{cm} zwischen Nasenspitze und längster Zehe, was jetzt hier zu Lande eine sicher zu beschaffende mittlere Grösse ist.[2] Ich war noch im

[1] Joh. Ranke. Tetanus. Eine physiologische Studie. Leipzig 1865. S. 44.

[2] Über secundär-elektromotorische Erscheinungen u. s. w. Diese Berichte, 1883. Bd. I. S. 355.

Digitized by Google

Besitz dieser nämlichen Rohre; es fand sich, dass sie auch für Organpraeparate die geeignete Länge und Weite hatten. Um diese in sie einzuführen, so dass sie die Rohre strotzend ausfüllten, zog ich einen Faden durch die Rücken- oder Bauchhaut des Praeparates, und an dem Faden das Praeparat in das Rohr. Etwa überstehende Enden wurden abgeschnitten. Manchmal unterstützte ich das Eindringen des Praeparates in das Rohr durch Saugen. Dabei begegnete es mir, das Praeparat durch das Rohr hindurchzusaugen, und in den Mund zu bekommen. Zu meinem Erstaunen fand ich das Organ ganz fade schmeckend, ohne eine Spur des Salzgeschmackes, den ich nach Boll's Angabe über den *Liquor cerebrospinalis* des Zitterrochen erwartete.[1]

Nach Boll's Schätzung sind im Leben die Gewebe von Torpedo mit einer 2.5procentigen Salzlösung durchtränkt, so dass erst eine Chlornatriumlösung von diesem Gehalt sich 'physiologisch' zu ihnen verhält. Nach Hrn. Léon Fredericq enthält das Blut von *Octopus vulgaris* und *Astacus marinus* etwa viermal mehr Salze als das von Säugern. Ich vermuthete danach, dass die Gewebe von Seethieren, insbesondere von Seefischen, salzreicher seien als die von Süsswasserthieren, und dass sie demgemäss auch besser leiten würden. Dann würden sie von den Stromcurven, mit welchen ein Zitterrochen-Schlag die See um sie her erfüllt, stärker getroffen, als wenn sie nur den Salzgehalt von Süsswasserthieren hätten; denn diese Curven verdünnen sich in einem in die See getauchten schlechter leitenden Körper.[2] Dass dem Zitterrochen selber mit besserer Leitung seines Organs gedient sein müsse, schien vollends einzuleuchten. Aber die Dinge verhalten sich anders.

Zunächst stellte sich heraus, dass die Gewebe von Seefischen nicht merklich salzreicher sind als die von Süsswasserfischen. Hrn. Atwater's und Hrn. König's Tabellen liess sich schon nicht mit Sicherheit grösserer Salzreichthum der Seefische entnehmen, und das Zitterrochen-Organ selber lieferte Hrn. Weyl nur wenig mehr Asche, als das Muskelfleisch von Flussfischen enthält (I. S. 203).[3] Hr. Fredericq aber hatte, was mir entgangen war, schon zur Zeit meiner Ersten Mittheilung das von ihm bei wirbellosen Seethieren erkannte Verhalten bei Seefischen — *Trachinus spec., Solea vulgaris, G. Aeglefinus,* einem Hai — vermisst, und war dazu gelangt, in dieser Unabhängigkeit des Salzgehaltes der Fische von dem des Mittels, in welchem sie leben,

[1] Monatsberichte der Akademie. 1875. S. 710; — Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w. 1875. S. 463 Anm.

[2] Untersuchungen u. s. w. S. 133. 415.

[3] Vergl. auch Almén, in Maly's Jahresbericht über die Fortschritte der Thier-Chemie. Bd. VII. 1877. S. 308.

Digitized by Google

einen Fortschritt ihrer Organisation über die der Wirbellosen zu erblicken.[1] Boll, welcher nur nach dem Geschmack des *Liquor cerebrospinalis* urtheilte, ist vielleicht durch den von Frerichs und Städeler entdeckten Gehalt des Gewebesaftes der Rochen an Harnstoff getäuscht worden.[2]

Wie dem auch sei, das Zitterrochen-Organ, weit entfernt, besonders gut zu leiten, leitet nicht einmal so gut wie der Länge nach durchströmter Froschmuskel. Im Folgenden bezeichnen die durch Indices unterschiedenen i die Anzahl der Scalentheile, um welche der Öffnungsschlag des Schlitteninductoriums bei ganz mit Stäben gefüllter primärer und ganz aufgeschobener secundärer Rolle, durch 5000 Windungen in 100^{mm} Abstand den eben aperiodischen Spiegel ablenkte, wenn die den Indices entsprechenden Widerstände sich zwischen den Thonkegeln befanden. Wie früher ist i_o die Ablenkung ohne Widerstand zwischen den Kegeln; i_{lg}, i_{lw}, i_{sw} sind die Ablenkungen mit dem Rohre beziehlich voll dreiviertelprocentiger Steinsalzlösung, voll Leitungswasser und voll Seewasser, i_m ist die Ablenkung mit dem Rohre voll Froschmuskelfleisch, endlich i_{ho} und i_{he} sind die Ablenkungen mit dem beziehlich homodrom und heterodrom durchströmten Organ im Rohr. w_o, w_{lw}, w_{sw}, w_m, w_{ho} und w_{he} sind die entsprechenden specifischen Widerstände, auf den der dreiviertelprocentigen Steinsalzlösung, w_{lg}, als Einheit bezogen.

Eine erste Versuchsreihe wurde im vorigen Sommer an der zweiten Torpedo, am dritten Tage, noch mit dem ursprünglichen Apparat angestellt, der mir zu den 1871 beschriebenen Versuchen gedient hatte. Die drei Organpraeparate, deren Widerstand bei homodromer und heterodromer Stromrichtung bestimmt wurde, zeigten den Organstrom in richtigem Sinne und von ansehnlicher Stärke. Im Mittel von fünf wenig von einander abweichenden Bestimmungen nach beiden Richtungen ergab sich

$$i_o = 66.7\,,\quad i_{lg} = 49.2^{sc}$$

In diesem Zustand, ohne Rohr, oder mit dem Rohr voll physiologischer Steinsalzlösung, zeigte der Apparat keine merkliche Irreciprocität der Leitung.

Von den Organpraeparaten gaben:

$$\text{I.}\quad i_{ho} = 36.0\,,\ldots\ldots\ i_{he} = 31.0\,,$$
$$\text{II.}\quad i_{ho} = 31.2\,,\ldots\ldots\ i_{he} = 23.0\,,$$
$$\text{III.}\quad i_{ho} = 29.0\,,\ldots\ldots\ i_{he} = 8.8.$$

---

[1] Bulletins de l'Académie royale des Sciences ... de Belgique. 3me Série. t. IV. No. 8. Août 1882. p. 209.

[2] Erdmann's und Werther's Journal für praktische Chemie. 1858. Bd. LXXIII. S. 48.

Digitized by Google

Daraus finden sich, $w_{lg} = 1$ gesetzt, nach der Formel

$$w_{ho} : w_{he} : w_{lg} :: \frac{1}{i_{ho}} - \frac{1}{i_o} :: \frac{1}{i_{he}} - \frac{1}{i_o} : \frac{1}{i_{lg}} - \frac{1}{i_o}$$

I. $w_{ho} = 2.397, \ldots w_{he} = 3.238,$
II. $w_{ho} = 3.199, \ldots w_{he} = 5.342,$
III. $w_{ho} = 3.655, \ldots w_{he} = 18.50.$

Dies höchst auffallende Ergebniss veranlasste mich nochmals den Widerstand des Froschmuskels im Vergleich zur physiologischen Salzlösung, wie auch bei gleicher Gelegenheit den des künstlichen Seewassers des Berliner Aquariums zu bestimmen, welches bei 22.75° C. ein specifisches Gewicht von 1.0250 besass, also scheinbar etwas mehr als bei Gelegenheit von Prof. Christiani's Bestimmung der Leitungsfähigkeit von Seewasser.[1] Diesmal war $i_o = 60.9^{sc}$, $i_{lg} = 48.0^{sc}$; i_m fand sich = 40.0, $i_{mo} = 56.5^{sc}$, woraus sich ergaben

$$w_m = 1.9383, \quad w_{mo} = 0.3202.$$

Ich hatte w_m früher (1871) = 1.9045 gefunden; der Unterschied beträgt $\frac{1}{57}$; auf eine genauere Übereinstimmung ist bei derartigen Bestimmungen kaum zu rechnen.

Eine zweite Versuchsreihe der Art unternahm ich an der dritten Torpedo am zweiten Versuchstage. Ich übergehe die beobachteten Ablenkungen, und theile sogleich die daraus berechneten, auf den specifischen Widerstand der physiologischen Salzlösung als Einheit bezogenen specifischen Widerstände von drei weiteren homo- und heterodrom durchströmten Praeparaten mit, welche kräftigen Organstrom zeigten.

IV. $w_{ho} = 3.5983, \ldots\ldots w_{he} = 13.5517$
V. $w_{ho} = 3.3741, \ldots\ldots w_{he} = 6.2752$
VI. $w_{ho} = 3.7781, \ldots\ldots w_{he} = 6.2752.$

Bei der gleichen Gelegenheit bestimmte ich den Widerstand des Leitungswassers w_{lw} zu 37.955. Es war von Interesse zuzusehen, wie diese Bestimmungen des See- und des Leitungswassers zu den im Zitteraal-Buche a. a. O. mitgetheilten passen würden, welche Prof. Christiani mittels eines anderen Verfahrens gewann. In Prof. Christiani's Versuchen leitete das Leitungswasser 126.57 Mal schlechter als das Seewasser des Aquariums. Unsere Zahlen geben

$$0.3202 : 37.955 = 1 : 118.52;$$

ein näheres Zusammentreffen ist unter solchen Umständen kaum zu verlangen.

[1] Untersuchungen u. s. w. S. 413.

Digitized by Google

Wie man sieht, leitet das Organ auch in homodromer Richtung, wo es besser leitet, erheblich, bis zu zweimal, schlechter als Froschmuskel parallel der Faser, und 7.5 bis 12 Mal schlechter als das Seewasser des Aquariums. Mit dem Seewasser aus dem Mittelmeere, welches fast 150 Mal besser leitet als Leitungswasser, würde das Verhältniss noch ungünstiger sein. In heterodromer Richtung aber leitet das Organ sogar 20 bis 58 Mal schlechter als Seewasser.

Entsprechende, ziffermässige Bestimmungen für die quere Leitung des Organs zu erhalten, erlaubt unser Verfahren nicht. Dass das elektrische Organ in querer Richtung völlig reciprok leite, habe ich schon vor langer Zeit am Zitterwelse gezeigt, wo man bequem Streife des Organs senkrecht auf die Schlagrichtung schneiden kann. Jetzt versuchte ich am Zitterrochen-Organ aber wenigstens zu ermitteln, wie die quere Leitung im Allgemeinen zur homo- und heterodromen sich verhalte. Ich schnitt aus dem Organ möglichst gleichmässig dicke quadratische Scheiben, an denen ein Rand von Rücken-, der gegenüberliegende von Bauchhaut, die beiden Seitenränder von Seitenflächen der Säulen gebildet waren, und sandte Inductionsschläge hindurch bald vom Bauch zum Rücken, bald vom Rücken zum Bauch, bald in querer Richtung vom einen Seitenrand zum anderen. In homodromer Richtung erfolgten beispielsweise 80.7, in heterodromer 22.5, in querer Richtung in jedem Sinne 99^{sc}. Es konnte der Verdacht entstehen, dass der Anschein besserer Leitung in querer Richtung davon herrühre, dass die Haut am Rücken- und Bauchrand der Scheibe den Widerstand bei Durchströmung der Länge nach vergrössere. Als ich aber die Seitenränder mit Hautstücken überzog, und durch diese hindurch ihnen den Strom zuführte, erfolgten immer noch 95^{sc} Ausschlag; nach Entfernung der künstlichen Hautbekleidung ebensoviel, dagegen homodrom jetzt nur noch 75, heterodrom 18^{sc}. Danach scheint es, als leite das Organ in querer Richtung sogar besser als in homodromer, doch betrachte ich dies Ergebniss, wegen der Mangelhaftigkeit der Versuchsweise, noch nicht als sicher.

§. XI. *Abhängigkeit des irreciproken Widerstandes und des Widerstandes des Organs überhaupt vom Lebenszustande.*

Die geringe Leitungsgüte des Organs und deren Irreciprocität sind an das Leben geknüpft. Wurde das Rohr mit Säulen gefüllt, welche zu beiden Enden herausragten, und mehrere Minuten in siedendes Wasser getaucht, wobei das Organ saure Reaction annimmt, so blieb es trotz

Digitized by Google

der durch das Sieden bewirkten Schrumpfung der Säulen mit Organ gefüllt. Dass gesottenes Organ besser als lebendes leite, gab ich schon früher an (I. S. 224. 225). Ich kann jetzt hinzufügen, dass sein Widerstand erstens in beiden Richtungen völlig derselbe wird, zweitens dass er (nach der Abkühlung) kleiner ist als der kleinste Widerstand des Organs in homodromer Richtung, ja kleiner als der der physiologischen Salzlösung. Auf diesen als Einheit bezogen fand ich ihn nur noch = 0.9294.

Ähnlich, nur selbstverständlich in langen Zeiträumen, verlaufen die Dinge am freiwillig absterbenden Organ. Auch hier nähern sich der homodrome und der heterodrome Widerstand der Gleichheit, und es sinkt der homodrome Widerstand. Natürlich eignet sich das abgestorbene Organ, besonders im mehr vorgeschrittenen Zustand der Fäulniss, nur schlecht zu Praeparaten, welche in das Widerstandsrohr hineingezogen werden sollen. Die daraus dargestellten Praeparate haben, wie ich schon vor langer Zeit bemerkte (I. S. 206), die Neigung, zwischen der derberen Rücken- und Bauchhaut, welche ihre Polflächen überzieht, zu sanduhrähnlicher Gestalt zu zerfliessen. Doch gelingt es bei einiger Geduld, Bestimmungen wie folgende zu erhalten.

Fünfundfünfzig Stunden nach dem Tode reagirte das bei niederer Temperatur aufbewahrte Organ der siebenten Torpedo nicht deutlich sauer. Es roch schon ammoniakalisch, wahrscheinlich also war die Säure durch das von der Umsetzung des Harnstoffes in den Geweben herrührende kohlensaure Ammonium neutralisirt, wie denn auch an den Muskeln nur stellenweise saure Reaction nachgewiesen werden konnte. Die Praeparate wirkten schwach in homodromem Sinne, doch war dies schwerlich Organstrom, eher eine durch im Inneren des Organs zufällig sich berührende saure und alkalische Flüssigkeit erzeugte elektromotorische Wirkung. An einem ersten Praeparat ergab sich

$$w_{ho} = 2.968, \ldots w_{he} = 3.231.$$

Die Irreciprocität betrug also nur noch 8 Procent der homodromen Stromstärke. An einem anderen Praeparat aber wurde sie unmittelbar darauf ganz vermisst, und der nach beiden Richtungen gleiche Widerstand war nur noch

$$w_{ho} = w_{he} = 2.317.$$

Am folgenden Tage, 76 Stunden nach dem Tode bei deutlicher Fäulniss, konnte vollends kein Unterschied der homodromen und heterodromen Leitung mehr wahrgenommen werden, und ich fand an zwei Praeparaten

$$w_{ho} = w_{he} = 1.0826\,; = 0.8553.$$

Digitized by Google

Im letzteren Fall also war der Widerstand kleiner als der der physiologischen Salzlösung, ja als der des gesottenen Praeparates.

Es fragt sich, woher die bedeutenden Schwankungen im heterodromen Widerstand des Organs herrühren mögen. Wahrscheinlich sind die grössten dafür gefundenen Zahlen die richtigsten, und die kleineren Werthe beruhen auf einer doppelten Ursache. Erstens ist das quetschende Hineinziehen der Säulen in das Widerstandsrohr unstreitig schon an sich ein deren Leistungsfähigkeit schädigendes Verfahren. Zweitens kann es nicht fehlen, dass dabei die Platten zum Theil, wenn nicht sämmtlich, mehr oder weniger schief sich lagern, da dann der an die senkrechte Richtung des Stromes gegen die Platten gebundene heterodrome Widerstand nothwendig sinkt.

Es wäre wünschenswerth gewesen, auch noch die Leitungsgüte anderer Gewebe des Zitterrochen, insbesondere seiner Muskeln, zu bestimmen. Allein erstens habe ich am Zitterrochen bisher keinen Muskel gefunden, der sich einigermaassen als regelmässiger Muskel nach Art einiger Oberschenkelmuskeln des Frosches, des Sartorius des Hundes und anderer mehr, gebrauchen liesse. Dann hatte ich im Anfang der Versuche an jedem Fische stets noch wichtigeren Fragen mein Augenmerk zuzuwenden, und in den wenigen Fällen, wo ich dazu kam, an den Muskeln experimentiren zu wollen, traf ich sie schon mehr oder minder leistungsunfähig, ja zum Theil sauer reagirend an. Dies ist auch der Grund, weshalb ich über die elektromotorische Kraft der Zitterrochen-Muskeln noch nichts zu sagen weiss.

§. XII. *Die Leitung des elektrischen Organs bei Untersuchung mittels beständiger Ströme.*

Was das elektrische Organ betrifft, so scheint nach Obigem nun doch kein Zweifel mehr daran sein zu können, dass es irreciprok leite. Giebt es keine solche Leitung, so ist man gezwungen, der absolut und relativ positiven, homodromen Polarisation unter Umständen die Kraft von zwanzig Grove'schen Elementen zuzuschreiben (I. S. 218. 219. 223). Wenn solche Kraft die Ursache der Überlegenheit des homodromen Stromes wäre, wie sollte man verstehen, dass selbst in homodromer Richtung das Praeparat schlechter leitet als physiologische Salzlösung, ja als Froschmuskel? Man kann nicht behaupten, dass es an sich so schlecht leite, dass trotz jener ungeheuren homodromen Kraft nur eine so kleine Stromstärke zu Stande kommt, denn dafür ist wieder die heterodrome Leitungsgüte auch im schlimmsten Falle

Digitized by Google

nicht klein genug. Dazu tritt noch, dass, wenn die Überlegenheit des homodromen Stromes auf Polarisation beruhte, es nicht zu begreifen wäre, wie beim Absterben, beim Todtsieden des Organs, die Leitungsgüte für beide Ströme gleich wird und dabei absolut zunimmt, so dass sie sogar die der physiologischen Salzlösung übertrifft. Das Wegfallen einer gleichsinnigen elektromotorischen Kraft kann nicht Schwächung des Stromes zur Folge haben.

Es scheint, wie gesagt, unmöglich, sich dem Gewicht dieser Gründe zu entziehen, und das Dasein der irreciproken Leitung im elektrischen Organ wird von hier ab als gesichert anzusehen sein. Doch steht unserer Vorstellung von dieser merkwürdigen Eigenschaft des Organs noch eine ansehnliche Wandlung bevor.

Ich erinnerte mich nämlich jetzt, dass ich diese sonst allem Anschein nach beweiskräftigen Versuche nur mit Inductionsschlägen ausgeführt hatte. Es fiel mir auf, dass in den oben S. 715 erwähnten Beobachtungsreihen, in denen der Strom Grove'scher Säulen längere Zeit durch die Praeparate geschlossen wurde, die Überlegenheit des homodromen Stromes zwar bemerkbar blieb, jedoch bei weitem nicht so stark sich geltend machte, wie in den Versuchen mit Inductionsschlägen oder mit kurz dauernden Säulenströmen. Der Verdacht stieg mir auf, dass die Irreciprocität der Leitung, ausser von der Dichte, auch noch vom zeitlichen Verlaufe des Stromes abhänge, und so fand es sich in der That.

An Stelle der secundären Rolle in den vorigen Versuchen wurde die Grove'sche Säule unmittelbar in den Kreis der Bussole aufgenommen, auf deren Spiegel nur 45 Windungen aus passender Entfernung wirkten. Die Säule wurde mittels des Quecksilberschlüssels aus freier Hand beliebig lange nach der Uhr oder auch nur kurze Zeit mittels der oben S. 693 Anm. erwähnten Vorrichtungen geschlossen. Erforderlichenfalls wurde sie mit der secundären Rolle des Inductoriums vertauscht, welche ganz auf die mit Stäben gefüllte primäre Rolle aufgeschoben war. Die Praeparate lagen auf der dreieckigen Glasplatte, mit Bauch- und Rückenhaut zwischen den Thonschilden der Zuleitungsgefässe. In den folgenden Versuchsreihen bedeutet 'Langer Schluss', dass die Säule so lange geschlossen gehalten wurde, wie es ohne zu grosse Störungen durch Erwärmung, Polarisation u. d. m. möglich war. Alle Ablenkungen sind auf die Grösse reducirt, die sie mit den 45 Windungen auf Null gehabt hätten.

Digitized by Google

Erste Reihe.

6. Torp. — Frisch.

Grove'sche Säule.

Langer Schluss.

I ↑ 223 ↓ 223 ↑ 223.

Es giebt sich keine Irreciprocität der Leitung kund.

Langer Schluss.

V ↓ 1128 ↑ 1159 ↓ 1140 ↑ 1177.

Sichere, wenn auch schwache Irreciprocität.

Langer Schluss.

XX ↑ 4439 ↓ 4658 ↑ 5098 ↓ 4927.
— 219 — 440 + 171.

Die Störung durch Erwärmung des Praeparates und der Thonschilde macht sich bemerkbar, so dass die Irreciprocität deutlich erst in der Reihe der Unterschiede hervortritt.

Inductionsschläge.

↑ 15 ↓ 3; 3 ↑ 15; 15.

Man sieht, dass das Praeparat, sobald nur kurzdauernde Schläge es treffen, die Irreciprocität der Leitung in vollem Maass offenbart.

Grove'sche Säule.

Langer Schluss.

XX ↑ 4756 ↓ 4781 ↑ 4903 ↓ 4890
— 25 — 122 + 13.

Wieder zeigt sich die Irreciprocität nur in der Reihe der Unterschiede.

SZ o″·0310

XX ↓ 86 ↑ 95 ↓ 84 ↑ 95.

Bei kurzem Schlusse tritt sie sofort klar hervor, wenn auch minder ausgesprochen als mit Öffnungsschlägen.

Langer Schluss

XX ↓ 3927 ↑ 4318 ↓ 4207 ↑ 4634.

Trotz den Nebenwirkungen zeigt sie sich diesmal bei langem Schlusse, auch ohne die Reihe der Unterschiede aufzustellen.

Das Praeparat während der ganzen Versuchsreihe unverrückt.

Zweite Reihe.

6. Torp. — Zweiter Tag.

Grove'sche Säule.

SZ o″·0310[1] Langer Schluss SZ o″·0310

I ↑ 2.55 ↓ 1.45 ↑ 2.61 ↓ 1.34 ‖ ↑ 30 ↓ 29 ↑ 30 ↓ 30.5 ‖ ↑ 2.66 ↓ 1.48 ↑ 2.58 ↓ 1.85.

Also selbst mit nur Einem Grove zeigt sich unter günstigen Umständen Irreciprocität der Leitung bei kurzem Schlusse, bei langem ist sie nur sehr schwach ausgeprägt, wie sie denn im entsprechenden Versuch der ersten Reihe ganz vermisst wurde.

---

[1] Hier wurden, statt 45 Windungen auf Null, 5000 in 30^{mm} Entfernung angewandt. Die Ausschläge sind im Verhältniss von 45/5000 verkleinert und auf den Rollenabstand Null reducirt (vergl. I. S. 235).

Digitized by Google

	SZ 0″.0310					Langer Schluss			
V	↑ 20	↓ 17	↑ 19.5	↓ 15	‖	↑ 878	↓ 866	↑ 902	↓ 866
	SZ 0″.0310					Langer Schluss			
XX	↑ 115	↓ 95	↑ 120	↓ 95	‖	↑ 5073	↓ 5415	↑ 7073	
						— 342	— 1658.		

Die Erwärmung des Praeparates verhindert weitere Beobachtung; die irreciproke Leitung macht sich trotzdem in der Reihe der Unterschiede bemerkbar.

Diesen Versuchen schliesst sich als gleichbedeutend auch der letzte (25.) Versuch des Anhanges zur Ersten Mittheilung an. Hier wurde die Stromstärke in Kreise der durch ein Praeparat geschlossenen zwanziggliederigen Säule, und zugleich in einer zum Praeparat angebrachten Nebenschliessung beobachtet. Bei kurzer Schliessung war die Irreciprocität sehr stark; dauerte die Schliessung eine Secunde, so war sie schon ungleich schwächer.

§. XIII. *Vom Gesetz und Wesen der irreciproken Leitung im elektrischen Organ.*

Hiernach kann kein Zweifel sein, dass die Irreciprocität der Leitung bei kurzem Kettenschlusse, vollends bei Öffnungsschlägen eines Inductoriums, ungleich stärker hervortritt, als bei längerem Schlusse, und dass die Maassbestimmungen des §. X, sofern sie auf heterodrome Leitung im Organ sich beziehen, nur für Öffnungsinductionsschläge gelten. Folgendermaassen lässt sich nunmehr die doppelte Abhängigkeit der irreciproken Leitung von Stromdichte und -Dauer versinnlichen.

In Fig. 4 sieht man vom Nullpunkt aus nach links und vorn sich erstrecken die Δ-Axe der Stromdichten, nach rechts und vorn die T-Axe der Schliessungszeiten. Die von einander unabhängigen Abscissen auf beiden Axen sind willkürlich abgemessen. Als Ordinaten sind auf den Punkten der T-Δ-Ebene aufgetragen die homodromen Widerstände W und die heterodromen Widerstände R. Der homodrome Widerstand ist von Stromdichte und -Dauer unabhängig, die ihn darstellenden Ordinaten haben also überall die willkürlich gewählte gleiche Höhe Ow_1, und ihre Köpfe liegen sämmtlich in der, der T-Δ-Ebene parallelen Ebene $w_{1,2,3,4}$. Der heterodrome Widerstand ist unterhalb der Stromdichte Δ_4 vom homodromen Widerstande nicht merklich verschieden, die Irreciprocität hier scheinbar gleich Null. Ob sie es wirklich sei, ist nicht ausgemacht, denn ich habe leider versäumt, die Versuche mit schwachen Öffnungsschlägen bei höherer Empfindlichkeit der Bussole zu wiederholen, da sich dann vielleicht ein bei der oben S. 728 angewendeten Empfindlichkeit unwahrnehmbarer Unterschied herausgestellt

Digitized by Google

hätte. Wie dem auch sei, einstweilen sagen wir, dass bei Δ_s eine Schwelle stattfindet, unterhalb welcher für gewisse Beobachtungsmittel

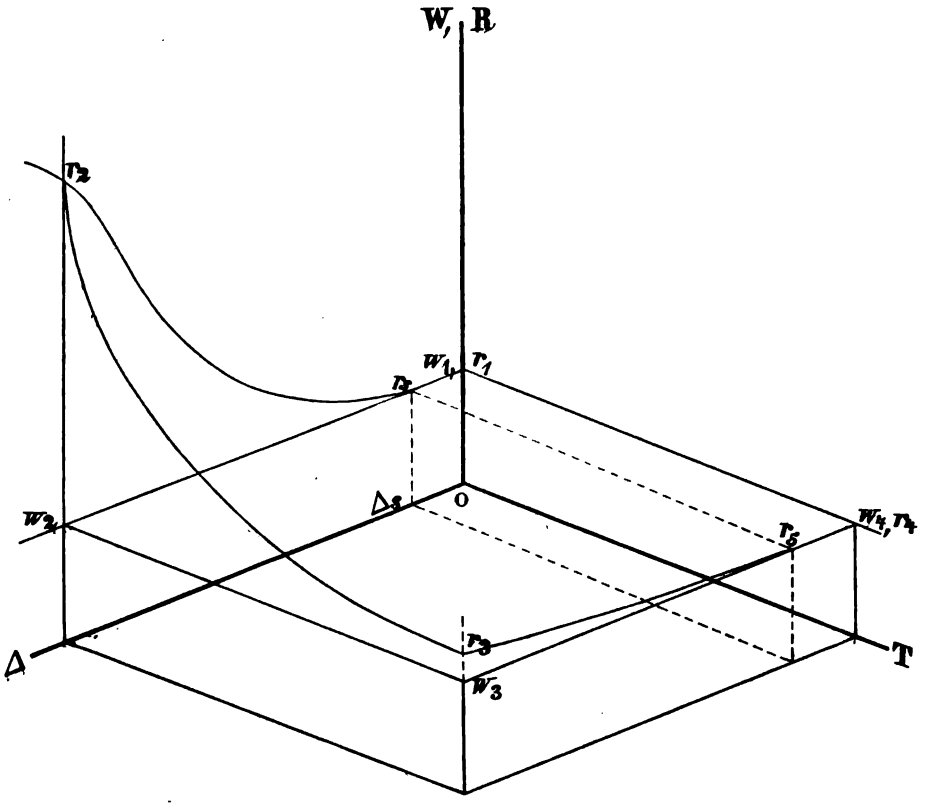


Fig. 4.

die Köpfe der die heterodromen Widerstände darstellenden Ordinaten in dem Stück $r_{1,2,3,4}$ der der T-Δ-Ebene parallelen Ebene $w_{1,2,3,4}$ zu liegen scheinen. Über diese Schwelle hinaus aber wird der heterodrome Widerstand um so grösser, je grösser die Dichte und je kleiner die Schliessungszeit. Um so höher also erheben sich mit wachsender Dichte und mit abnehmender Schliessungszeit die Köpfe der Ordinaten r über die Ebene $w_{1,2,3,4}$, so dass sie in der verwickelt gekrümmten Fläche $r_{1,2,3,4}$ liegen. Es ist anzunehmen, dass der heterodrome Widerstand mit wachsender Stromdichte einer Grenze sich nähere (s. oben S. 717); dies wird durch den, zuletzt gegen die Axe der Dichten concaven Verlauf der Curve des heterodromen Widerstandes für verschwindend kleine Schliessungszeit ausgedrückt. Ebenso nähert er sich wohl mit wachsender Schliessungszeit einer unteren Grenze, so dass die Curve $r_{2,3}$ sich asymptotisch einer der Axe der Zeiten parallelen Geraden anschliesst: worüber aber noch unten etwas zu bemerken sein wird.

Digitized by Google

Damit ist das Gesetz der Erscheinung im Grossen und Ganzen erkannt. Die Art, wie wir oben S. 716. 717 die Irreciprocität formulirten, erscheint nun wohl hinlänglich gerechtfertigt. Über die Ursache der Erscheinung ist es für jetzt unmöglich sich eine befriedigende Vorstellung zu bilden. Bei einem im Inneren eines porösen feuchten Leiters auftretenden, mit der Stromdichte wachsenden Widerstande wird man zunächst an etwas dem von mir beschriebenen inneren secundären Widerstand[1] Ähnliches denken. Doch ist kaum eine wahre Analogie zwischen beiden Erscheinungen vorhanden. Zwar hat der innere secundäre Widerstand mit dem heterodromen Widerstand im elektrischen Organ das gemein, dass Siedhitze ihn vernichtet. Aber abgesehen davon, dass er bisher nur an lebendem Pflanzengewebe erkannt wurde, ist er unabhängig von der Stromrichtung: zu seiner Entwickelung bedarf er längeren Schlusses, und ist er einmal entwickelt, längerer Zeit zu seinem Verschwinden, während im Gegentheil der heterodrome Widerstand im ersten Augenblick am stärksten vorhanden mit längerer Dauer des Stromes sinkt, und dann doch bei erneutem kurzem Schlusse wieder in voller Höhe sich zeigt.

Es scheint vielmehr als habe man sich zu denken, dass der heterodrome Strom, sobald seine Dichte einen gewissen Werth, den Schwellenwerth, im Praeparat übersteigt, auf einen besonderen Widerstand stösst, zu dessen Besiegung eine gewisse Zeit gehört. So würde es sich erklären, dass bei kurzen Stromstössen die Irreciprocität der Leitung stark hervortritt, bei längerer Dauer der Ströme nur noch vergleichsweise wenig davon übrig bleibt.

Vielleicht sogar beruht das geringe Maass von Irreciprocität bei stetiger Strömung auf etwas Anderem, als die starke Irreciprocität bei Stromstössen. Denn eine schon in der Ersten Mittheilung, S. 223, gemachte Bemerkung darf jetzt hier nicht vergessen werden. Weil an dem Dasein der homodromen positiven Polarisation nicht zu zweifeln ist, muss sie auch dann noch als Mitursache der scheinbar irreciproken Leitung angesehen werden, wenn diese wirklich auf einen in beiden Richtungen ungleichen Widerstand zurückgeführt wird. Bei langem Schlusse wird die Irreciprocität aber so gering, dass der Grund fortfällt, aus welchem wir beim ersten Anblick deren Erklärung allein durch Polarisation für unwahrscheinlich hielten, nämlich die ungeheure, auf viele Grove sich belaufende Kraft, die wir der Polarisation zuschreiben mussten. Bei langem Schlusse beträgt der Unterschied der Stromstärken, soweit die Störungen durch Erwärmung u. d. m. es zu beurtheilen erlauben, nur noch wenige Procent, so dass bei zwanzig

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 90 ff. 116 ff.

Digitized by Google

Grove'schen Gliedern im Kreise zur Erklärung der Irreciprocität eine Polarisationskraft von keinem vollen Grove genügen würde. Sollte diese Ansicht von der Sache sich bestätigen, so wäre also die Irreciprocität der Leitung gänzlich an die Kürze der Stromstösse gebunden. Die Curve $r_{2,3}$ in Fig. 4 müsste mit der Geraden $w_{2,3}$ verschmelzen, anstatt sich einer über ihr verlaufenden Parallelen anzuschliessen.

Dass die Mechanik der irreciproken Leitung im Längenelement der Säulen gänzlich im Dunkeln bleibt, braucht nicht gesagt zu werden. Mit dem über irreciproke Leitung in galvanischen und Inductions-Kreisen Bekannten, welches sich in Prof. Christiani's Buch[1] zusammengestellt findet, lässt sich hier nichts anfangen. Als wahrscheinlich können wir hinstellen, dass nicht Nerven, Gefässe, Bindesubstanzen es sind, denen diese Eigenschaft zukommt, sondern die elektrische Platte selber. Von der Boll'schen Strichelung kann sie nicht abhangen, weil, abgesehen davon, dass man nicht begreift wie dies der Fall sein sollte, die Zitterwels-Platten an beiden Flächen gestrichelt sind.[2] Da Absterben und Siedhitze der Irreciprocität ein Ende machen, scheint es, als müsse sie mit der Function der Platte irgend etwas zu schaffen haben. In der Ersten Mittheilung, S. 219, versuchte ich die schlechtere heterodrome Leitung dadurch zu erklären, dass der heterodrome Strom die etwaigen elektromotorischen Molekeln schwer, oder überhaupt nicht, so zu drehen vermag, dass ihr positiver Pol nach der negativen, beim Zitterrochen nach der Bauch-Fläche des Organs hinsieht. Mit dieser Vermuthung scheint es auf den ersten Blick zu stimmen, dass am abgestorbenen Organ, in welchem die hypothetischen Molekeln zu wirken aufgehört haben, die Widerstände nach beiden Richtungen gleich werden. Es entsteht aber die Schwierigkeit, dass sie zugleich abnehmen, so dass sie kleiner werden, als im Leben der kleinere von beiden. Wenn die elektromotorischen Molekeln vermöge der verschiedenen elektrochemischen Natur ihrer Pole bei der elektrolytischen Leitung in der Art in Betracht kämen, wie nach der Grotthuss'schen Theorie aus elektropositiven und -negativen Stoffen zusammengesetzte Molekeln, müsste ja im Gegentheil das abgestorbene Organ in beiden Richtungen schlechter leiten, als das lebende in heterodromer Richtung. An die Auskunft ist doch nicht zu denken, dass das Organ an sich, ohne die durch elektromotorische Molekeln geleistete Hülfe, so schlecht leite, wie bei heterodromer Durchströmung im Leben, und dass durch Leichenveränderung, Säurebildung u. d. m. es dann besser leite, als im Leben homodrom durchströmt.

[1] Beiträge zur Electricitätslehre. Über irreciproke Leitung electrischer Ströme u. s. w. Berlin 1876.

[2] Untersuchungen u. s. w. S. 291. 391. 392.

Digitized by Google

§. XIV. *Teleologie der irreciproken Leitung im elektrischen Organ.*

Schon wiederholt wurde in diesen Studien daran erinnert, wie die älteren Physiker und Physiologen, von Volta und Nicholson bis zu Faraday und Valentin, bei Erklärung der Wirkungen der Zitterfische nicht glaubten ohne isolirende Scheidewände auskommen zu können, die sie sich seitlich um die Organe angebracht oder im Augenblick des Schlages entstehend dachten. Die erste Frucht meiner Bemühungen auf diesem Gebiete war vor mehr als vierzig Jahren die Beseitigung dieses Irrthums. Aus histologischen Gründen bezweifelte ich Dasein, ja Möglichkeit solcher Hüllen, und zuerst nur theoretisch, später durch schematische Versuche, bewies ich, dass auch ohne isolirende Hüllen Vervielfältigung der elektromotorischen Elementarwirkung im umgebenden leitenden Mittel stattfinde, wenn gleich solche Säulenbildung als unvollkommen zu bezeichnen sei.[1]

Jetzt erfahren wir, dass in den elektrischen Organen eine Art der Leitung herrscht, zu welcher bisher nirgend ein Seitenstück bekannt ist. Jede neue Eigenschaft dieser wunderbaren Gebilde muss Aufmerksamkeit schon insofern erregen, als sich daran die Hoffnung knüpft, einen Blick in deren elektrischen Mechanismus zu erlangen. Die irreciproke Leitung interessirt nun aber ganz besonders noch dadurch, dass sie für das Organ Ähnliches leisten zu müssen scheint, wie isolirende Hüllen, ja dasselbe Ziel wohl gar noch vollständiger erreicht. Je weniger es uns gelang, diese Eigenschaft an sich mit einigem Verständniss zu durchdringen, um so erfreulicher muss es jetzt erscheinen, sie in der Oekonomie des Zitterfisch-Schlages, so zu sagen, eine nicht unwichtige Rolle übernehmen zu sehen. Folgende Betrachtung macht diese Rolle einsichtlich.

Man denke sich zuerst eine einzelne Säule des Zitterrochen-Organes von einer unendlichen leitenden Masse umgeben. Wir sehen vorläufig ab von allen Unterschieden des gewöhnlichen und des irreciproken Widerstandes, und von Polarisation, und stellen uns die Säule stetig wirksam vor. Es ist nicht schwer, das System von Stromcurven im Allgemeinen zu entwerfen, mit welchem die Säule den Raum erfüllt. Zunächst ist dies System selbstverständlich symmetrisch um die Axe der Säule vertheilt. Ferner ist es ebenso symmetrisch in Bezug auf die zur Axe senkrechte, sie hälftende Ebene. Um uns leichter zu verständigen, heisse diese Ebene die quere Mittel-

[1] Vorläufiger Abriss einer Untersuchung über den sogenannten Froschstrom und über die elektromotorischen Fische. Poggendorff's Annalen u. s. w. 1843. Bd. LVIII. S. 25 ff.; — Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 678 ff.; — Untersuchungen u. s. w. S. 259. 284. 300.

Digitized by Google

ebene, das positive Rückenende der Säule gelegentlich das obere, das negative Bauchende das untere.

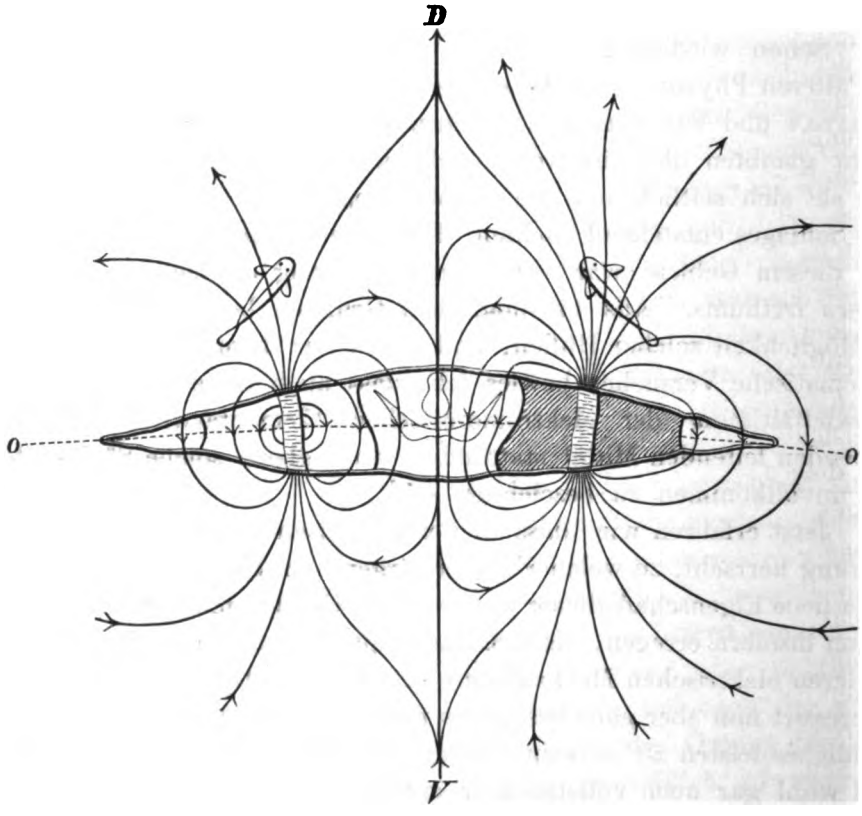


Fig. 5.

Stromcurven brechen aus der positiven Rückenfläche der Säule und auch aus Punkten der Seitenflächen oberhalb der mittleren Querebene hervor. Alle Curven schneiden senkrecht die quere Mittelebene *00*, welche in der That die isoëlektrische Fläche von der Spannung Null ist. Die aus der Seitenfläche kommenden Curven kehren unterhalb der queren Mittelebene auch wieder zur Seitenfläche ein, die von Punkten der Rückenfläche ausgehenden zu entsprechenden Punkten der Bauchfläche. Die Verlängerung der Axe selber ist eine Stromcurve, die sich in der Unendlichkeit verliert. Im Inneren der Säule findet dergestalt eine Strömung vom Bauche zum Rücken statt, näher der Axe dieser fast parallel, näher den Seitenflächen nach oben und nach unten zu auseinanderweichend, so dass die Curven die Seitenfläche schneiden. Man sieht in Fig. 5 linker Hand, durch einen gleich zu erwähnenden Umstand verzerrt, den Durchschnitt des äusseren Curvensystems mit der Transversalebene des Fisches um eine allein wirksam gedachte Säule entworfen.

Digitized by Google

Denkt man sich in der unendlichen leitenden Masse neben der ersten Säule eine zweite ganz gleiche Säule, ihre Axe der Axe jener parallel, ihre Rücken- und Bauchfläche in derselben Ebene, also auch die zu beiden Säulen gehörigen queren Mittelebenen zusammenfallend, so erfüllt die zweite Säule den Raum mit einem dem ersten ganz gleichen Systeme von Curven. Die den beiden Systemen angehörigen Stromfäden setzen sich in einem beliebigen Flächenelement des Raumes, gemäss dem Princip der Superposition der Ströme,[1] nach dem Parallelepiped der Kräfte zusammen. Ebenso verhält es sich mit einer dritten, vierten, $n$ten Säule. Verschwinden die Entfernungen der Säulen von einander und ihre Maasse gegen die Entfernung des betrachteten Flächenelementes, so wird die Dichte des Stromes im Element durch Hinzufügung der zweiten Säule verdoppelt, der dritten verdreifacht, der $n$ten ver-n-facht. Bei grösserer Nähe des Flächenelementes wird die Dichte des Stromes darin langsamer und in sehr verwickelter Art mit dem Anbringen neuer Säulen wachsen, stets aber mit deren Zahl steigen. Da übrigens jede Säule für alle anderen einen Theil des äusseren Raumes darstellt, wird jede von einem Theil der Stromfäden der anderen, meist heterodrom getroffen, und die Componenten der fremden Ströme ziehen sich innerhalb der Säule von denen des eigenen Stromes der Säule ab. Dies ist, was ich das Princip der unvollkommenen Säulenbildung nenne, und so wird verständlich, wie auch ohne isolirende Hüllen eine Vervielfältigung der Elementarwirkung in elektrischen Organen möglich sei.

Die weitere Betrachtung wird vereinfacht durch die Bemerkung, dass, da der Zitterrochen zwei symmetrisch gelegene Organe besitzt, es genügt, gleichzeitig in jedem Organ eine symmetrisch gelegene Säule in's Auge zu fassen. Für den von diesen beiden Säulen erregten Strömungsvorgang wird die in's Unendliche ausgedehnte Sagittalebene *VD* des Fisches eine Strömungsfläche. Wir können sie uns folglich, ohne etwas am Vorgang zu ändern, isolirend denken, oder auch den unendlichen leitenden Raum in dieser Ebene hälften, und wir brauchen nur zu untersuchen, was in dessen einer Hälfte geschieht.

Nach Obigem ist es klar, dass die sämmtlichen übrigen Säulen eines Organs von den Stromfäden der einen darin betrachteten Säule heterodrom durchsetzt werden, wie dies in Fig. 5 links von der Sagittalebene dargestellt ist. Fasst man einen Theil des äusseren Raumes in's Auge, etwa das in der Figur sichtbare Fischchen, so bilden für die das Fischchen treffenden Stromfäden die übrigen Strom-

[1] Vergl. Helmholtz in Poggendorff's Annalen u. s. w. 1853. Bd. LXXXIX. S. 212 ff.

Digitized by Google

fäden eine Nebenschliessung. Je schlechter diese leitet, um so stärker wird das Fischchen getroffen. Es wird folglich stärker getroffen, wenn man sich das Organ mit Ausnahme der einen gerade betrachteten Säule isolirend denkt, wie es in der Figur rechts von der Sagittalebene dargestellt ist, indem die Schraffirung isolirende Beschaffenheit bedeuten soll. Alsdann können die von den Randpartien der Rückenfläche und der oberen Hälfte der Seitenfläche der Säule ausgehenden Stromfäden sich nicht mehr durch die nächstbenachbarten Säulen zu den entsprechenden Punkten unterhalb der mittleren Querebene begeben, welche beiläufig hier zu einer mittleren Querfläche verbogen sein wird, sondern sie sind zu dem Umweg um die Ränder des Organes gezwungen. So haben sie einen ungleich grösseren Widerstand zu überwinden, und in demselben Maasse bilden sie für die das Fischchen treffenden Stromfäden schlechtere, d. h. weniger schwächende Nebenschliessung. Isolirende Beschaffenheit des Organes wird also die Wirkung der einen leitend und elektromotorisch wirksam gedachten Säule auf einen Theil des äusseren Raumes verstärken.

Zu demselben Ergebniss führt die Bemerkung, dass durch isolirende Beschaffenheit des Organes die Dichte der von jener Säule erregten Strömung rings um das Organ vermehrt werde, wie dies in der Figur erhellt, wenn man die Einschränkung der mittleren Querfläche beachtet, welche rechts als Folge der Isolation erscheint.

Bedingung für die Zulässigkeit dieser Schlüsse ist allein, dass der Widerstand der Säule nicht gegen den des äusseren Raumes verschwinde. Diese Bedingung ist beim Zitterrochen um so sicherer erfüllt, als, wie wir sahen, das Organ, wenn am besten, immer noch erheblich schlechter leitet, als Seewasser.

Das Organ isolirt nun zwar nicht, allein die von uns erkannte irreciproke Leitung leistet, wie bemerkt, hier Ähnliches wie völlige Isolation. Die Stromfäden, auf deren Ablenkung in schlechter leitende Bahnen es ankommt, sind sämmtlich, wo sie das Organ treffen, vorwiegend heterodrom. Sie stossen also im Organ auf einen Widerstand, der praktisch dasselbe bewirkt, wie wenn das Organ isolirte. Vermöge der irreciproken Leitung findet das merkwürdige Verhalten statt, dass jede Säule ihren eigenen, homodromen Strom vergleichsweise gut leitet, den heterodromen Stromfäden aller übrigen Säulen aber den Weg versperrt, und da dies für alle Säulen gilt, so werden jene Stromfäden im Wesentlichen ebenso zu dem Umwege um die Ränder des Organs gezwungen, als wenn das Organ aus nicht leitendem Stoff bestände. Der Strom aller Säulen, mithin der Gesammtstrom des Organs, nimmt in Folge davon im äusseren Raum an Dichte oder an physiologischer Wirkung zu.

Digitized by Google

Die so herbeigeführte Verstärkung des Schlages ist jedenfalls bedeutender, als die, welche sich aus der von den älteren Forschern vermissten isolirenden Beschaffenheit der seitlich das Organ bekleidenden Fascien ergeben würde, denn diese hätte nur die Ströme zwischen Punkten der Seitenflächen der Randsäulen abgeschnitten, nicht aber die heterodromen Stromfäden in ihrem Verlauf durch das Organ selber gestört. Sogar der isolirenden Beschaffenheit der Hülle der einzelnen Säulen ist die bestehende Einrichtung überlegen, denn solche Beschaffenheit würde zwar die Ströme zwischen Punkten der Seitenflächen aller Säulen nöthigen, ihren Weg der Säule entlang zu nehmen, sie würde aber der Rückkehr der Ströme von der Rücken- zur Bauchfläche auf kürzestem Wege durch die benachbarten Säulen nichts in den Weg stellen. Bei der Dünne der Bindegewebescheiden der Säulen fällt übrigens der durch sie, statt durch die äussere leitende Masse, sich abgleichende Theil der Strömung nicht in's Gewicht, so wenig wie der, welcher Nerven und Blutgefässen folgt. Ganz besonderen Nutzen muss die Irreciprocität der Leitung den niedrigen Randsäulen des Organs bringen, in welchen die vereinten heterodromen Stromfäden der um zwei Drittel höheren medialen Säulen den eigenen homodromen, um ebenso viel schwächeren Strom sonst vielleicht grossentheils aufheben würden.

Bemerkt zu werden verdient, dass bei der Annahme zum Schlage sich ordnender dipolar elektromotorischer Molekeln in der elektrischen Platte, alles hier Gesagte ebenso gut auf die einzelne Molekel, wie auf die ganze Säule sich anwenden lässt. Bei dem verschwindenden Querschnitt der homodromen Strombahn in der Molekel fehlt es ihr, trotz der Kürze dieser Bahn, nicht an dem nothwendigen Widerstande, um die obigen Schlüsse auch für sie gerechtfertigt erscheinen zu lassen.

Durch die Irreciprocität der Leitung muss das die beiden Organe umgebende System von Stromcurven, von dessen Gestaltung in einer die Organe ungefähr hälftenden transversalen Ebene ich auf S. 199 der Ersten Mittheilung eine Vorstellung zu geben versuchte, nothwendig abgeändert werden; ich getraue mich aber noch nicht, Bestimmteres darüber zu äussern. Nur Eins ist sicher: der zwischen den medialen Rändern beider Organe liegende Theil des Thieres, namentlich sein Centralnervensystem, wird nicht bloss nach wie vor auf der Bahn der stärksten Strömung sich befinden, sondern sogar von noch dichteren Stromcurven getroffen werden. Bei der nun doch feststehenden Immunität des Zitterrochen gegen elektrische Schläge (I. S. 198. 199) kann es auf den Unterschied nicht ankommen.

Das hier vom Zitterrochen Gesagte passt im Wesentlichen auch auf Zitteraal und Zitterwels. Beim Zitterwels zuerst erkannte ich die

Digitized by Google

irreciproke Leitung des Organs, und in Dr. Sachs' Versuchen am Zitteraal fehlt es nicht an Spuren davon. Auch bei diesen Thieren wird die Undurchgängigkeit des Organs für heterodrome Ströme Verstärkung der Wirkung auf äussere Punkte zur Folge haben. Doch wird sie am meisten dem Zitterrochen zu statten kommen, da dieser Fisch wegen der guten Leitung des Seewassers gegen die elektrischen Süsswasserfische sehr im Nachtheil sich befindet.

Schon früher gelang es mir, bei den elektrischen Fischen überraschende Beispiele jener organischen Zweckmässigkeit aufzudecken, welche auch den strengen Anhänger mechanischer Causalität immer auf's Neue in Erstaunen setzen. Ich zeigte, wie die Gestalt der elektrischen Organe des Zitterrochen einerseits, des Zitteraales und Zitterwelses andererseits dem verschiedenen Leitvermögen von See- und Süsswasser angepasst sei;[1] wie beim Wachsthum des Zitteraales und des Zitterrochen die Organe ihre Gestalt gerade in dem Sinne ändern, wie Süss- und Seewasser es erheischen;[2] wie auch die elektromotorischen Kräfte beider Fische allem Ermessen nach ungefähr so sich verhalten, wie die Widerstände von Süss- und von Seewasser;[3] wie die positive Polarisirbarkeit des Organes durch schnell vorübergehende Stromstösse geeignet sei den Schlag zu verstärken, die negative durch Tetanisiren den Zweck erfülle, dass eine neue Entladung nahezu wieder von Null anhebe.[4] Ich bewies die den elektrischen Fischen und ihrer Brut unentbehrliche Immunität gegen elektrische Schläge. Endlich die merkwürdigen Wagner'schen Nervenbüschel im Organ des Zitterrochen schienen die Wirkung haben zu können, dass alle von der nämlichen Primitiv-Nervenfaser innervirten elektrischen Platten möglichst gleichzeitig in Thätigkeit treten.[5] Nur in Einem Punkte verstanden wir die Anordnung der Zitterrochen-Organe nicht: die an die Sagittalebene grenzende Gegend des äusseren Raumes über dem Rücken des Thieres schien uns, obwohl gerade am meisten des Schutzes bedürftig, fortificatorisch gesprochen, ein todter Winkel sein zu müssen (I. 200. 201). Diesem Übelstand ist nun unstreitig durch die irreciproke Leitung bis zu einem gewissen Grade abgeholfen.

Wie dem auch sei, das Beispiel innerer Zweckmässigkeit, auf welches wir jetzt geführt wurden, übertrifft an Sinnigkeit, so zu sagen, alle jene früheren weitaus. Es hätte gewiss des tiefsten Nachdenkens eines guten Kopfes bedurft, um auf den Einfall zu kommen,

---

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 696.
[2] Untersuchungen u. s. w. S. 14 ff.; — Archiv für Physiologie. 1883. S. 252.
[3] Untersuchungen u. s. w. S. 411 ff.
[4] Untersuchungen u. s. w. S. 220.
[5] Untersuchungen u. s. w. S. 293.

Digitized by Google

jede Säule für ihren eigenen Schlag zu einem so guten Leiter zu machen, wie die sonstigen Eigenschaften thierischer Gewebe es gestatten, für den Strom aller anderen Säulen aber vergleichsweise zu einem Nichtleiter. Nicht am wenigsten witzig erscheint dabei, dass, da der Schlag der Zitterfische schnell vorübergeht, das Organ auch nur kurze Stromstösse irreciprok leitet. Was hätte es ihm genützt, wäre es auch für beständige heterodrome Ströme zu einem vollkommenen Nichtleiter geworden?[1]

§. XV. *Die positive Polarisation in ihrer Abhängigkeit von der Dichte des polarisirenden Stromes. Ein Fall von relativ positiver Polarisation durch den heterodromen Strom.*

Durch Feststellung der irreciproken Leitung ist für die Untersuchung der Polarisationserscheinungen im elektrischen Organ wenigstens nach Einer Richtung hin eine bisher vermisste Grundlage gewonnen. Wir brauchen nicht mehr der relativ positiven Polarisation durch den homodromen Strom eine offenbar ganz sinnlose Stärke und eine mit ihrer späteren Nachhaltigkeit im Widerspruch stehende ebenso maasslose Flüchtigkeit in den ersten Augenblicken nach Öffnung der polarisirenden Kette zuzuschreiben. Daraus, dass auch bei längerem Schluss der homodrome Strom den heterodromen übertrifft, dürfen wir nun aber freilich nicht den Schluss ziehen, den wir in der Ersten Mittheilung, S. 228. 229, für den Fall in Aussicht nahmen, dass es keine irreciproke Leitung gebe. Es giebt solche Leitung, folglich kann von ihr jene Überlegenheit herrühren, folglich beweist letztere noch nicht, dass die positive Polarisation und der Schlag verschiedene Vorgänge sind.

Vor Allem schien es geboten, die Abhängigkeit der absolut positiven Polarisation von der Stromdichte genauer festzustellen, über

[1] In geschichtlicher Beziehung sei daran erinnert, dass merkwürdigerweise schon einmal die irreciproke Leitung mit dem Schlag der Zitterfische in Verbindung gebracht worden ist. Den ältesten bekannten Fall irreciproker Leitung boten P. ERMAN's unipolare Leiter, die Flamme, Seife, Eiweiss, andere thierische Stoffe in einem gewissen Grade der Trockniss dar. »Noch frage man mich nicht,« sagt er in seiner etwas wunderlichen Sprache, »ob ich wohl am Ende zu glauben vermag, dass die erwähnte »isolirende Eigenschaft der unipolaren Leiter... mit dem Mechanismus der Spontaneität »der vorzugsweise sogenannten elektrischen Thiere einen denkbaren Zusammenhang »habe. Ich kann diese Frage zur Zeit nicht beantworten, aber gestehen will ich, dass »ihre Lösung mein Augenmerk bei dieser Untersuchung war.« (GILBERT's Annalen der Physik. 1806. Bd. XXII. S. 44. 45.)

Digitized by Google

welche es mir am Schluss der Ersten Mittheilung noch an planmässigen Versuchen fehlte. Ich habe jetzt dergleichen in der Art angestellt, dass ich durch ein und dasselbe Praeparat einen Stromstoss von stets derselben Dauer, aber ausgehend von einer Grove'schen Säule schickte, deren Gliederzahl von I bis L wuchs und wieder abnahm. Die folgenden Zahlen geben ein Bild von dem Erfolge.

I.

4. Torp. — Frisch. — OS + 0.0102. — 1'-P.

SZ 0''0764

	I	V	X	XX	XXX	L	XXX	XX	X	V	I	XX	XXX	L
S	+ 500 + x	500 + x	250	250	—	315	125	41	10	− 3	0	+ 60	+ 43	+ 173
P	3.5	20	38	87	148	322	152	78	35	18	2.5	78	173	319.

Das, wie der starke Organstrom bekundet, sehr leistungsfähige Praeparat schlägt sichtlich die beiden ersten Male, durch den Strom von nur Einem Grove erregt, und zeigt von da ab mit der Stromdichte regelmässig steigend und wieder sinkend, absolut und relativ positive Polarisation. Bei dreissig Gliedern findet eine Störung statt, welche aber die Brauchbarkeit der ganzen Reihe sonst nicht beeinträchtigt.

II.

Alles sonst wie in Reihe I. — OS + 0.0341.

	I	V	X	XX	XXX	L	X
S	+ 3; + 3	− 5; − 3 + 19; + 10	− 13 + 22	− 7 —	− 13 + 9	− 17 + 15	+ 238	− 12
P	3.5	15.5; 15	32	64	97	178	267	34

Die zweite Reihe habe ich vorzüglich deshalb hergesetzt, weil sie das oben S. 715 erwähnte, bisher freilich alleinstehende, aber doch scheinbar unanfechtbare Beispiel absolut negativer, relativ positiver Polarisation durch den heterodromen Strom bietet. Das Auftreten dieser Polarisation ist um so bedeutungsvoller, als dem relativ positiven Hauptausschlag ein relativ negativer Vorschlag voraufgeht. Dies lässt schliessen, dass die relativ positive heterodrome Polarisation stets vorhanden ist, nur verdeckt durch die homodrome, relativ negative Polarisation.

Die erste Reihe zeigt in voller Ausprägung die Erscheinungen, wie sie in der Ersten Mittheilung, S. 227. 228, in allgemeinen Ausdrücken geschildert wurden. Sie scheint der Annahme einer vom Schlage verschiedenen absolut und relativ positiven Polarisation durch den homodromen Strom das Wort zu reden. Doch fehlt es noch an einem ganz zuverlässigen Beweise für die Richtigkeit der einen oder

Digitized by Google

der anderen Auffassung, wie als Ersatz für den im §. VI vergeblich angestrebten Erfolg öftere Wiederkehr des in der zweiten Reihe sich kundgebenden Verhaltens ihn liefern würde.

§. XVI. *Von der doppelsinnigen Leitung in den elektrischen Nerven des Zitterrochen.*

In den Versuchen der Ersten Mittheilung war über anderen Ermittelungen eine Frage unbeantwortet geblieben, welche zwar längst entschieden, doch nicht zu oft zum Gegenstand erneuter Prüfung gemacht werden kann: die Frage nach der doppelsinnigen Leitung in den elektrischen Nerven, deren rein centrifugale Beschaffenheit sie zu einem unschätzbaren Versuchsgegenstande für diesen Zweck macht. Der erste Versuch, den ich an dem ersten Fisch (dem im Opisthotonus befindlichen) im vorigen Sommer anstellte, galt dieser Frage.

Mit 10000 Windungen auf Null liess sich der schwache Strom der elektrischen Nerven sehr schön beobachten: stets gab sich die in der Ersten Mittheilung hervorgehobene stärkere Negativität des peripherischen Querschnittes zu erkennen. So erhielt ich an der ersten, kranken Torpedo von den Nerven

		I (links)	II	I (rechts)
mit peripherischem	Querschnitt	+ 0.00718	+ 0.00822	+ 0.00568
» centralem	Querschnitt	— 0.00508	— 0.00568	— 0.00409
	Unterschied	+ 0.00209	+ 0.00254	+ 0.00159

in Raoult: Zahlen, welche sich den in der Ersten Mittheilung angeführten vollkommen anreihen. Bei späterer Gelegenheit versuchte ich auch nachzuweisen, dass die elektromotorische Kraft des zwischen zwei Querschnitten der elektrischen Nerven aufsteigenden Stromes — er mag der Axialstrom heissen — proportional der Länge des Nervenstückes wächst, doch gelang mir dies noch nicht mit der wünschenswerthen Regelmässigkeit. Bei der Beobachtung des Axialstromes zwischen Längsschnittspunkten des unversehrten Nerven, die ich gleichfalls versuchte (vergl. I. S. 231), stiess ich auf die Schwierigkeit, dass, da die elektrischen Lappen ausgestanzt worden waren, die Negativität des oberen Querschnittes sich vorwiegend geltend machte. Man wird den Versuch an der nicht ihrer elektrischen Lappen beraubten Torpedo anstellen müssen, nur dass es dabei schwer sein wird, Störungen durch freiwillige oder reflectorisch ausgelöste Schläge zu vermeiden.[1]

[1] Nächstens erscheint im Archiv für Physiologie eine in der physikalischen Abtheilung des physiologischen Instituts ausgearbeitete Abhandlung von Hrn. Dr. M. MENDELSSOHN, welche den Axialstrom an verschiedenen rein centrifugal oder centripetal wirkenden Nerven verfolgt.

Digitized by Google

Ich tetanisirte nun die Nerven der ersten Torpedo, an welchen bei dieser Gelegenheit die obigen Zahlen gewonnen wurden, mit dem Schlitteninductorium in Helmholtz'scher Anordnung. Die primäre Rolle war mit Stäben gefüllt; die Schläge wurden dem Nerven durch die Thonspitzen der unpolarisirbaren Röhren zugeführt. Die secundäre Rolle musste bis auf 30^{mm} genähert werden, um gute Schwankung im Betrage von 7—10^{sc} zu bekommen. Wiederholt wurde die Schwankung an demselben Nerven sowohl bei ab- wie bei aufsteigender Richtung der Reizung beobachtet, und so diese wichtige Lücke ausgefüllt.

Die Störungen, welche sich in den entsprechenden Versuchen der Ersten Mittheilung dargeboten hatten, traten dabei nur einmal hervor. Ähnliche Beobachtungen machte neuerlich auch Hr. Ewald Hering an Ischiadnerven vom Frosche,[1] so dass die Sache mit der Function der elektrischen Nerven wohl nichts zu thun hat, sondern darauf hinausläuft, dass durch die neuen Methoden an den früher nur in grossen Umrissen skizzirten Erscheinungen jetzt mancher feinere Zug erkennbar wird. Mit einem Thonphantom statt des Nerven blieb jede Wirkung beim Tetanisiren aus.

Darauf wurde an den elektrischen Nerven desselben Fisches auch noch der Elektrotonus beobachtet. Die Versuche wurden ganz wie bei der ersten Gelegenheit geleitet (I. S. 234). Wie schon Prof. Christiani, sah auch ich nunmehr anelektrotonische und katelektrotonische Zuwachse nach beiden Richtungen sich ausbreiten, eine Beobachtung, die ich das erste Mal versäumt hatte, weil meine Aufmerksamkeit durch unerklärt gebliebene Störungen in Anspruch genommen war, welche sich mir, wie schon vorher Prof. Christiani darboten. Auch jetzt machten sie sich wieder bemerkbar. Es erfolgten Elektrotonuszuwachse in falscher Richtung; nach Durchschneiden des Nerven blieben Wirkungen in richtigem Sinne und von ansehnlicher Stärke zurück. Weitere Versuche müssen über die Bedeutung dieser Unregelmässigkeiten entscheiden.

§. XVII. *Von den secundär-elektromotorischen Erscheinungen an den elektrischen Nerven des Zitterrochen.*

An den elektrischen Nerven des zweiten Fisches suchte ich die Frage nach ihrem secundär-elektromotorischen Verhalten zu beant-

[1] Beiträge zur allgemeinen Nerven- und Muskelphysiologie. 15. Mittheilung. Über positive Nachschwankung des Nervenstromes nach elektrischer Reizung. In den Wiener Sitzungsberichten, 1884, Bd. LXXXIX. S. 137 ff.

Digitized by Google

worten. Man erinnert sich aus der Abhandlung über die secundär-elektromotorischen Erscheinungen der Muskeln und Nerven, dass an den hinteren Wurzeln der Rückenmarksnerven vom Frosch die positive Polarisation durch den aufsteigenden Strom sehr regelmässig die durch den absteigenden übertrifft. Bezeichnet man die physiologische Wirkungsrichtung der Wurzeln auch hier als homodrom, die entgegengesetzte als heterodrom, so erfolgt also die positive Polarisation in homodromer Richtung stärker als in heterodromer. Dagegen ist an den vorderen Wurzeln der entsprechende Unterschied nicht so deutlich, und wenn er anfangs sich zeigt, verwischt er sich bald, d. h. die positive Polarisation im homodromen, hier absteigenden Sinne übertrifft nicht merklich oder nicht dauernd die im heterodromen, hier aufsteigenden Sinne.[1] Bei der grossen Schwierigkeit, welche für diese Versuche an den Wurzeln aus der letzteren Kürze und Zartheit erwächst, erschien es in hohem Grade wünschenswerth, diese Versuche an den elektrischen Nerven zu wiederholen, welche allem Ermessen nach rein, oder fast rein centrifugal, von einer Länge und Dicke erhalten werden, wie sie in der dem physiologischen Versuche bisher zugänglich gewordenen Thierwelt sonst nicht vorkommen. Ich gab in der Ersten Mittheilung, S. 230, an, dass sie leicht in einer Länge von 3—4^{cm} unverzweigt darstellbar seien, habe sie aber jetzt bis zu 55^{mm} lang, bei 2.5^{mm} Dicke, vor mir gehabt.

Die Nerven kamen in eine Rinne zu liegen, welche mit dem Dreikanter in ein nachmals gefirnisstes Stück Kork gefeilt war. An die beiden Querschnitte stiessen die Thonschilde der Zuleitungsbäusche des Säulenkreises. Die Thonspitzen der unpolarisirbaren Leitungsröhren lagen als Enden des Bussolkreises symmetrischen, den beiden Querschnitten nahen Längsschnittspunkten an. Dabei gab sich der Axialstrom mit einer Kraft von 0.00125 bis 0.00212, den oben S. 747 verzeichneten Unterschieden möglichst genau entsprechend, regelmässig zu erkennen. An der Bussole (*S*) befanden sich 10000 Windungen auf Null, an der Bussole (*P*) 50 Windungen in 20^{mm} Abstand. Ich erhielt folgende Zahlen:

2. Torp. — Frisch. — 1′-P.

SZ 0″.0154 SO″.0764

P	V	↓	−	X	↓	+ 2	XXX	↓	+ 4.5	↑	+ 9	↓	+ 5	↑	+ 7	‖ ↓	+ 12.5	↑	+ 10	↓	+ 9	↑	+ 15
S			1.5			5			18		18.5		18		18		82		83		83		82.5

Nur noch halbe Länge des Nerven. SZ 1″.024

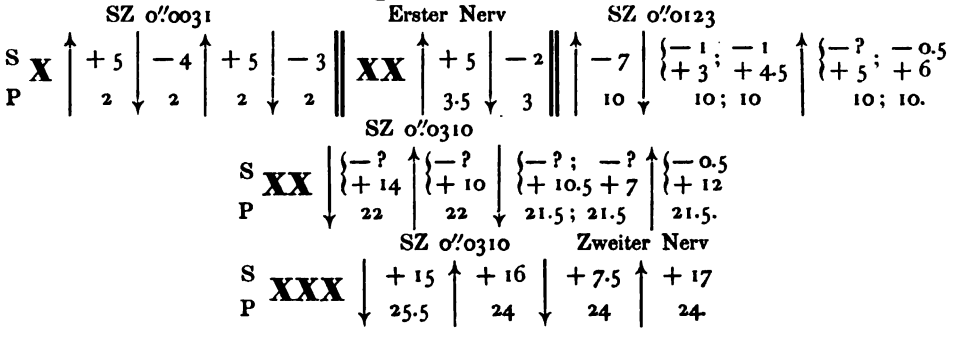
‖	↑	+ 14	↓	+ 10; 6	↑	+ 10; 9.5	‖	↓	− 20	↑	− 17	↓	− 20	↑	− 20
		162		164; 162.5		162; 163.5			1171		1079		1171		1063.

[1] Diese Berichte, 1883, Bd. I. S. 382—387.

Digitized by Google

Da mit der halben Nervenlänge die Stärke des primären Stromes sehr nahe verdoppelt erschien (162.8 statt 165.2), war nicht etwa (ein Verdacht, den man hätte fassen können) die Stromdichte wegen des grossen Querschnittes des Nerven kleiner als in den Versuchen an sensiblen Wurzeln vom Frosch. Eine mehr entschiedene Verneinung der gestellten Frage konnte der Versuch nicht ertheilen. Doch liess ich mich dadurch von erneuten Bemühungen nicht abhalten, die jedoch keinen anderen Erfolg hatten. Diesmal wurden an der Bussole (*S*) 20000 Windungen im Abstand Null gebraucht.

4. Torp. — Frisch. — 1'-P.



Nach Beendigung dieser Versuchsreihe stellte sich heraus, dass an einer Stelle des Säulenkreises die Leitung schadhaft war; es war derselbe Fehler, welcher die oben S. 746 verzeichnete Störung verursacht hatte. Doch scheint es nicht, als ob dies im Geringsten dazu beitragen könne, das abermals vollständig verneinende Ergebniss abzuschwächen, und bei der Mannigfaltigkeit der versuchten Combinationen von Stromdichten und Schliessungszeiten ist kaum zu erwarten, dass spätere Erfolge Etwas an dem jetzigen Ergebniss ändern werden. Doch wird es Schuldigkeit sein, sich noch nicht dabei zu beruhigen, und besonders auch die Prüfungen auf andere Nerven von möglichst vollkommener physiologischer Gleichartigkeit ihrer Fasern auszudehnen.

Digitized by Google

34. Eine Bestimmung des Ohms.

Von Prof. F. Himstedt
in Freiburg i. B.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 23. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 30. Juli.)

Durch die von der Grossherzoglich Badischen Regierung für eine absolute Widerstandsmessung bewilligten Mittel bin ich in den Stand gesetzt worden, eine Ohmbestimmung nach der von mir kürzlich veröffentlichten Methode[1] auszuführen, und bitte ich um die Erlaubniss, der Königlichen Akademie im Folgenden die Resultate meiner Messungen in Kürze mittheilen zu dürfen.

Bei der erwähnten Methode werden an demselben Galvanometer die constanten Ablenkungen des Magneten beobachtet, welche hervorgebracht werden das eine Mal durch n in der Secunde das Galvanometer passirende Inductionsströme gleicher Richtung, das andere Mal durch einen constanten Strom, dessen Stärke ein bekannter Bruchtheil des inducirenden Stromes ist. Bezeichnen wir die beobachteten Ablenkungswinkel mit α_1 und α_2, so findet sich, wie a. a. O. näher ausgeführt ist, der gesuchte Widerstand r aus der Gleichung

$$\text{I.} \qquad r = n \cdot V \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1},$$

in welcher V das Potential der benutzten Inductionsrollen auf einander bezeichnet. Nimmt man für die inducirende Rolle ein Solenoid mit nur einer Drahtlage, gegen dessen Länge der Radius desselben, sowie die Dimensionen der inducirten Rolle nur klein sind, so wird

$$V = 4\pi^2 R^2 K \cdot b \cdot (1 + 2a),$$

folglich

$$\text{II.} \qquad r = 4\pi^2 R^2 K \cdot b \cdot n(1 + 2a) \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Hierin bezeichnet R den Radius des Solenoids, K die Zahl der Windungen auf der Längeneinheit, b die Gesammtzahl der Windungen,

[1] Wied. Ann. Bd. 22 S. 281. 1884.

Digitized by Google

aus welchen die Inductionsrolle besteht, und $2a$ ein Correctionsglied, das die Einwirkung der Endflächen des Solenoids zum Ausdruck bringt. Bei den nachfolgend beschriebenen Versuchen war der Werth von $2a$ stets kleiner als 0.03, so dass für die Bestimmung von r nur die genaue Messung der Grössen R, b, n, K und $\mathrm{tg}\,\alpha_2/\mathrm{tg}\,\alpha_1$ in Frage kommt.

Die Vortheile dieser Versuchsanordnung bestehen darin, dass die Zahl der zu messenden Grössen eine verhältnissmässig sehr kleine ist, und dass alle die Grössen in Wegfall kommen, bei deren Bestimmung die erforderliche Genauigkeit anerkannter Maassen nur schwer zu erreichen ist. Ich rechne hierher: die Constanten resp. Variationen des Erdmagnetismus und des Stabmagnetismus, den Inductionscoefficienten resp. die Windungsflächen von Drahtspulen mit vielen Lagen übereinander, den Reductionsfactor eines Galvanometers, Trägheitsmoment und logarithmisches Decrement schwingender Magnete und besonders auch die genaue Bestimmung des Widerstandes von Kupferdrähten, welche oft nicht einmal alle in demselben Zimmer sich befinden und deren Temperatur immer nur angenähert aus der Temperatur der umgebenden Luft gefunden werden kann.[1]

Alle Längenmessungen der folgenden Arbeit sind bezogen auf einen Maassstab, den Hr. Geh. Regierungsrath Foerster die Güte hatte in der Normal-Aichungs-Commission in Berlin mit dem Normalmeter vergleichen zu lassen. Die Zeitmessungen sind ausgeführt mit einem Schiffs-Chronometer von Bröcking, dessen Gang durch Zeitbestimmungen controlirt wurde.

Das Solenoid ist auf eine vielfach verleimte Walze aus Holz gewickelt, wie solche in den Orchestrions verwendet werden. Dieselbe ist im Jahre 1868 angefertigt und im Mai vorigen Jahres nochmals abgeschliffen und auf der Drehbank polirt. Der Durchmesser derselben wurde auf drei verschiedene Arten bestimmt, die so gewählt waren, dass sie zugleich ein Urtheil darüber ermöglichten, ob der Querschnitt der Walze mit genügender Annäherung ein Kreis und ob ebenso die ganze Walze ein Cylinder war. Es wurden

1. mittels einer Mikrometerschraube an dreizehn über die Länge der Walze gleichmässig vertheilten Punkten je sechs Durchmesser desselben Querschnitts verglichen mit der Länge[2] eines Glasstabes von 23.3264^{cm}. Für den Durchmesser wurde gefunden:

der kleinste Werth	der grösste Werth	im Mittel
23.3193^{cm}	23.3286^{cm}	23.3248^{cm},

[1] Vergl. hierüber Rotti, Nuov. cim. Ser. 3. Vol. XV, Determinazione della resistenza elettrica di un filo in misura assoluta.

[2] Die Länge dieses Glasstabes wurde in der Normal-Aichungs-Commission in Berlin bestimmt.

Digitized by Google

2. wurden an dreizehn aequidistanten Punkten die Umfänge durch umgelegte Papierstreifen gemessen. Hieraus ergab sich für den Durchmesser

der kleinste Werth	der grösste Werth	im Mittel
23.3186^{cm}	23.3252^{cm}	23.3229^{cm},

3. wurde der Durchmesser berechnet aus der Länge des aufgewickelten Drahtes. Bei der Wickelung wurde gleichzeitig die Drahtdicke mittels Mikroskop mit Ocularmikrometer an 332 Punkten gemessen und gleich 0.0472^{cm} gefunden.

Für den Durchmesser der Walze ergab sich:

$$D = 23.3262^{cm}.$$

Die Messungen Nr. 2 wurden nach der Wickelung wiederholt, $D = 23.3190^{cm}$, und am Schlusse aller Beobachtungen nochmals ausgeführt, sowohl mit Papierstreifen als mit einem Stahlbandmaass, $D = 23.3194^{cm}$ und 23.3204^{cm}. Als Mittel aus allen Messungen ergiebt sich für R (Radius) der Formel II:

$$R = 11.6846^{cm}.$$

Die Isolation der Drahtwindungen gegen einander wurde mittels der HUGHES'schen Inductionswaage geprüft.[1]

Die Zahl der Windungen betrug 2864; sie bedeckten die Walze auf einer Länge von 135.125^{cm}. Diese Länge wurde mit einem Comparator gemessen. Es ergiebt sich:

$$K = \frac{2864}{135.125}.$$

Die Inductionsrolle ist gleichfalls auf Holz gewickelt und bestand aus 3848 Windungen in 15 Abtheilungen, die beliebig combinirt werden konnten. Die Breite der Spule betrug 4.01^{cm}. Der mittlere Radius jeder Abtheilung wurde berechnet aus den mit Papierstreifen gemessenen Umfängen der einzelnen Drahtlagen. Um die Isolation der Windungen zu prüfen und um eine Controle für die genannten Messungen mit Papier zu haben, wurde der mittlere Radius jeder Abtheilung des weiteren nach der Methode von BOSSCHA[2] bestimmt. Übrigens gehen die Dimensionen der Spule nur in das Glied $2a$ der Gleichung II ein, so dass ein Fehler von 1 Procent in denselben den Werth von r um höchstens 0.0003 falsch machen würde.

Der Widerstand r, welcher in absolutem Maasse gemessen werden sollte, betrug entweder 1 S. E. oder $^1/_2$ S. E. oder 2 S. E. und

[1] Vergl. RAYLEIGH Phil. Trans. 1884. Vol. 175. pag. 419. On the electrochemical equivalent of silver.

[2] WIEDEMANN, Electricität III. S. 213.

Digitized by Google

wurde gebildet aus 2 S. E. von Siemens und Halske Nr. 3618 und Nr. 3619, die entweder einzeln oder parallel oder hinter einander geschaltet zur Verwendung kamen. Dieselben waren in Metallbüchsen befestigt, welche mit Kaiseröl angefüllt waren und in einem grossen Bade derselben Flüssigkeit standen. Sowohl vor als nach den Versuchen wurden die beiden Etalons mit einer dritten Doseneinheit und unter einander verglichen.

Die Thermometer waren in Zehntelgrade getheilt und drei Mal sorgfältig mit dem Normalthermometer des physikalischen Instituts verglichen.

Der Disjunctor wurde durch ein phonisches Rad getrieben.[1] Zur Ermittelung von n, der Zahl der Unterbrechungen, war an der Rotationsaxe ein Zählwerk befestigt, das direct $^1/_{60}$ Umdrehung abzulesen gestattete. Bei jedem Versuche wurden mindestens 700 Umdrehungen gezählt, so dass die erforderliche Genauigkeit von 0.01 Procent leicht zu erreichen war. Der Apparat arbeitete sehr gleichmässig, so dass die Ablenkungen am Galvanometer durchaus constant waren. Es scheint mir dies ein wesentlicher Vortheil dieses Disjunctors gegenüber dem von Hrn. Roiti[2] benutzten zu sein, und ich glaube, dass die Abweichungen, welche die einzelnen Beobachtungen des Hrn. Roiti von einander gezeigt haben, gewiss zum grössten Theile, wenn nicht ganz, ihre Erklärung in dem unregelmässigen Gange des von ihm benutzten Schmidt'schen Wassermotors finden.

Das Galvanometer war ohne künstliche Dämpfung, die Ruhelage des Magneten wurde aus Umkehrpunkten bestimmt. Die zu beobachtenden Ablenkungen α_1 und α_2 betrugen bei 4^m Scalenabstand mindestens 800^{mm} und waren stets bis auf wenige Scalentheile einander gleich, so dass zur Reduction auf Bogen eine angenäherte Kenntniss des Scalenabstandes genügte.

Alle Zuleitungsdrähte waren mit Kautschuk überzogen und leicht zusammengedreht, alle Stromwender etc. waren aus Paraffin und Siegellack angefertigt.

Im Ganzen wurden 67 Versuche angestellt. Allen diesen gemeinsam ist nur das Solenoid. Hier konnte nur die Abänderung getroffen werden, dass die Inductionsspule, statt um die Mitte desselben, 10^{cm} mehr nach dem einen oder anderen Ende gelegt wurde. Alle anderen Bestandtheile der Versuchsanordnung wurden von Versuch zu Versuch in weit bedeutenderem Maasse abgeändert. Die Abtheilungen der Inductionsrolle wurden einzeln oder in Combinationen

[1] F. Himstedt, Zwei verschiedene Formen eines selbstthätigen Disjunctors. Wied. Ann. Bd. XXII. S. 276. 1884.

[2] l. c. S. 11.

Digitized by Google

von 2—5 benutzt. Dem entsprechend betrug die Zahl der Stromunterbrechungen in der Secunde 5—13. Die Versuche wurden abwechselnd mit Schliessungs- oder mit Öffnungs-Inductionsströmen angestellt. Die Stromstärke des inducirenden Stromes betrug 0.0005 bis 0.01 Ampère. Die Empfindlichkeit des Galvanometers wurde in weiten Grenzen geändert. Die Schwingungsdauer des Magneten in demselben war 15—34 Sec. Um zu untersuchen, ob die durch das Galvanometer geschickten Inductionsströme eine andere Quermagnetisirung der Magnete hervorriefen als constante Ströme von sonst gleicher galvanometrischer Wirkung, wodurch das Verhältniss $tg\alpha_2/tg\alpha_1$ fehlerhaft werden würde, wurde eine Reihe von Versuchen ausgeführt mit Magneten, deren Durchmesser je 0.6^{cm} waren, während die bei den übrigen Versuchen benutzten Magnete kaum 0.1^{cm} dick waren. Es wurde kein Unterschied gefunden. Nachdem eine Anzahl von Versuchen, 43, ausgeführt waren, wurde der Disjunctor neu angefertigt und alle Zuleitungsdrähte sowie alle Stromwender durch neue ersetzt. Aus der Übereinstimmung der folgenden Beobachtungen mit den vorhergehenden darf man schliessen, dass ein Isolationsfehler nicht vorhanden war.

Die ganze Versuchsanordnung beruht auf der Constanz der Elektricitätsquelle, mag diese periodisch, wie bei den Beobachtungen mit Inductionsströmen, oder dauernd, wie bei der Messung des constanten Stromes, in Anspruch genommen sein. Es musste deshalb dem Einwande begegnet werden, dass die Polarisation in der Kette zu Fehlern Veranlassung gäbe. Zu dem Zwecke wurden als Stromquelle benutzt: 1. ein bis vier DANIELL'sche Elemente, 2. zwei Punkte eines Drahtwiderstandes, durch welchen eine Anzahl DANIELL'scher oder BUNSEN'scher Elemente geschlossen war, 3. ein Thermoelement. Alle Stromquellen lieferten dasselbe Resultat.

Das Mittel aus allen angestellten Versuchen hat ergeben

$$1 \text{ S. E.} = 0.94356 \text{ Ohm},$$

oder ein Ohm entspricht dem Widerstande einer Quecksilbersäule von 1^{qmm} Querschnitt und

$$105.98^{cm}$$

Länge bei 0° C.

Von den einzelnen erhaltenen Werthen war

der kleinste 1 S. E. = 0.94323 Ohm
der grösste 1 S. E. = 0.94380 Ohm.

Digitized by Google

Digitized by Google

35. Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von L. KRONECKER.

(Vorgetragen am 30. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 27. August.)

(Fortsetzung der Mittheilungen vom 19. und 26. April 1883. XX, XXI.)

VI.

Bezeichnet man mit u, v zwei zu einander reciproke complexe Grössen, deren reelle Theile positiv sind, ferner mit ρ, a_0, c_0 (wie im art. V) irgend welche reelle positive Grössen, und mit b_0 irgend einen der beiden (als reell vorausgesetzten) Werthe von $\sqrt{4a_0c_0-1}$, so kann man die identische Relation:

$$(\mathfrak{F}^0) \qquad \sqrt{u}\sum_{m,n} e^{-2\pi u(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)} = \sqrt{v}\sum_{m,n} e^{-2\pi v(a_0m^2-b_0mn+c_0n^2)}$$

aufstellen, in welcher die Summationen auf alle ganzen Zahlen m, n von $-\infty$ bis $+\infty$ auszudehnen und die Werthe der Quadratwurzeln $\sqrt{u}, \sqrt{v}$ durch die Bedingung $\sqrt{u}\sqrt{v}=1$ zu bestimmen sind.

Die Relation $(\mathfrak{F}^0)$ lässt sich durch die Substitution:

$$u = \log x\,,\ v = \log y$$

auf die Form bringen:

$$(\mathfrak{F}) \qquad \log\frac{1}{x}\sum_{m,n} x^{2\pi(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)} = \sum_{m,n} y^{2\pi(a_0m^2-b_0mn+c_0n^2)},$$

mit der Bedingung:

$$\log x \log y = 1\,,$$

und ihre Richtigkeit erhellt unmittelbar, wenn man die im art. II erwähnte Transformationsgleichung:

$$\vartheta\left(\zeta, \frac{-1}{w}\right) = -i(\sqrt{-wi})\, e^{\zeta^2 w\pi i}\,\vartheta(\zeta w, w)$$

erst auf die einfache ϑ-Reihe:

$$\sum_m e^{-2\pi u(a_0m^2+b_0m)}$$

anwendet und dann, nach Multiplication des Resultats mit $e^{-2\pi u c_0 n^2}$ auf diejenige ϑ-Reihe, welche durch die Summation in Beziehung auf n charakterisirt ist.

Digitized by Google

Wenn man nun, wie im art. III, zur Abkürzung:

$$a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2 = f(m, n)$$

setzt und nach DIRICHLET'scher Weise die über alle Werthe von m, n, mit Ausnahme von $m = n = 0$, erstreckte Summe:

$$\sum_{m,n} \big(2\pi f(m, n)\big)^{-1-\varrho}$$

durch das Integral:

$$\frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\rho} \sum_{m,n} x^{2\pi f(m,n)} d \log x$$

darstellt, so erhält man, mit Benutzung der Relation:

$$\frac{\Gamma(\rho+1)}{\rho} = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\rho-1} dx$$

die Gleichung:

$$(\mathfrak{G}) \quad -\frac{1}{\rho} + \sum_{m,n} \big(2\pi f(m, n)\big)^{-1-\varrho} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\rho} \left\{ \sum_{m,n} x^{2\pi f(m,n)} - \frac{x}{\log \frac{1}{x}} \right\} \frac{dx}{x}.$$

Dass das Integral rechts, wenn es nur bis zu einem beliebig nahe der Eins liegenden Werthe δ erstreckt wird, eine bis zum Werthe $\rho = 0$ stetige Function von ρ darstellt, ist an sich klar. Für den übrigen Theil des Integrations-Intervalles, von δ bis 1, erhellt es aus jener Relation $(\mathfrak{F})$, die eben zu diesem Zwecke oben aufgestellt worden ist.

Wird nämlich zuvörderst in der Gleichung $(\mathfrak{G})$ die Summe unter dem Integralzeichen rechts durch:

$$-1 + \sum_{m,n} x^{2\pi f(m,n)}$$

ersetzt, wo nunmehr — genau wie in der Relation $(\mathfrak{F})$ — die Summation auf alle ganzzahligen Werthe von m, n ohne Ausnahme zu erstrecken ist, so kann vermöge eben dieser Relation der Ausdruck unter dem Integralzeichen auf folgende Form gebracht werden:

$$\left(\log \frac{1}{x}\right)^{\rho-1} \left\{ \sum_{m,n} y^{2\pi(a_0 m^2 - b_0 mn + c_0 n^2)} - x + \log x \right\},$$

und er lässt sich daher nach Absonderung des einen Gliedes der Reihe für $m = n = 0$, als Aggregat von drei Ausdrücken darstellen:

$$\left(\log \frac{1}{x}\right)^{\rho} \log \frac{1}{y} \sum_{m,n} y^{2\pi(a_0 m^2 - b_0 mn + c_0 n^2)} + \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\rho-1} (1-x) - \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\rho}.$$

Digitized by Google

In dem ersten dieser drei Ausdrücke ist die Summation auf alle ganzzahligen Werthe von m, n, jedoch mit Ausnahme des Werthsystems $m=n=0$, zu erstrecken, und es ist ferner darin y durch die Gleichung:

$$\log x \log y = 1$$

zu bestimmen. Dieser Ausdruck verschwindet demnach, ebenso wie die beiden folgenden, für $x=1$ oder, was dasselbe ist, für $y=0$, und es bleiben daher alle drei Ausdrücke in dem Intervalle von $x=\delta$ bis $x=1$ endlich, auch wenn ρ bis zu Null abnimmt.

Man kann also um den Grenzwerth:

$$\lim_{\epsilon=0}\left\{-\frac{1}{\rho}+\sum_{m,n}\left(2\pi f(m,n)\right)^{-1-\epsilon}\right\}$$

zu erhalten, auf der rechten Seite der Gleichung (⑤) $\rho=0$ setzen; und dieser Grenzwerth wird alsdann durch das Integral:

$$\int_0^1\left\{\sum_{m,n}x^{2\pi f(m,n)}-\frac{x}{\log\frac{1}{x}}\right\}d\log x$$

dargestellt, wenn hierbei stets die Summation auf alle ganzzahligen Werthe von m, n, mit Ausnahme des Werthsystems $m=n=0$, erstreckt wird.

Dass dieses Integral, für alle reellen positiven Grössen a_0, c_0, einen endlichen Werth hat, und dass also, wenn:

$$\lim_{\epsilon=0}\left\{-\frac{1}{\rho}+\sum_{m,n}\left(2\pi(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\right)^{-1-\epsilon}\right\}=L(a_0,c_0)$$

gesetzt wird, durch $L(a_0, c_0)$ eine bestimmte, endliche Function der beiden reellen positiven Variabeln a_0, c_0 dargestellt wird, ist als das Resultat und auch als das Ziel der bisherigen Entwickelungen zu bezeichnen. Dass sich die Werthe dieser Function $L(a_0, c_0)$ für alle diejenigen Argumente a_0, c_0, für welche die Verhältnisse der drei Grössen $a_0 : b_0 : c_0$ oder:

$$a_0 : \sqrt{4a_0c_0-1} : c_0$$

in ganzen Zahlen ausdrückbar sind, mit Hülfe der elliptischen Functionen darstellen lassen, soll im Folgenden gezeigt werden.

VII.

Ist $a_0 : b_0 : c_0 = a : b : c$ und bedeuten a, b, c drei ganze Zahlen, von denen die erste und dritte positiv ist, so kann man, wie im art. IV:

Digitized by Google

$$a = a_0\sqrt{\Delta},\ b = b_0\sqrt{\Delta},\ c = c_0\sqrt{\Delta}$$
$$4ac - b^2 = \Delta$$
$$w_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2c},\ w_2 = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2c}$$

setzen, und es ist alsdann sowohl Δ als auch $\sqrt{\Delta}$ positiv. Ferner ist gemäss der Gleichung (D) des art. IV:

$$(\mathfrak{D}) \qquad \log\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2\pi} \lim_{\varrho=0} \sum_{m,n} \frac{e^{2(m\sigma + n\tau)\pi i}}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\varrho}},$$

wo die Summation, wie stets im Folgenden, auf alle ganzen Zahlen m, n, mit Ausschluss des Systems $m = n = 0$, zu erstrecken ist.

Nimmt man nun rechts an Stelle der quadratischen Form:

$$am^2 + bmn + cn^2$$

den Ausdruck:

$$\frac{1}{4c}\left(\Delta m^2 + (bm + 2cn)^2\right)$$

und setzt dann zur Abkürzung:

$$n_1 = bm + 2cn,\ \sigma' = \sigma - \frac{b\tau}{2c},\ \tau' = \frac{\tau}{2c},$$

so kommt:

$$\log\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2\pi} \lim_{\varrho=0} \sum_{m,n} \frac{(4c)^{1+\varrho}\, e^{2(m\sigma' + n_1\tau')\pi i}}{(\Delta m^2 + n_1^2)^{1+\varrho}}.$$

Die Summation bezieht sich hier auf alle ganzzahligen Werthe von m, während für n_1 nur diejenigen ganzen Zahlen zu nehmen sind, wofür:

$$n_1 \equiv bm \pmod{2c}$$

wird, jedoch mit Ausschluss des Werthsystems $m = 0, n_1 = 0$. Das Resultat dieser Summationsbeschränkung in Beziehung auf n_1 erlangt man aber auch, wenn man die auf alle Werthe von m und n, mit Ausschluss von $m = n = 0$, ausgedehnte Summe:

$$\sum_{m,n} \frac{e^{2(m\sigma' + n\tau')\pi i}}{(\Delta m^2 + n^2)^{1+\varrho}}$$

mit $\frac{1}{2c} e^{\frac{n - bm}{c} h\pi i}$ multiplicirt und dann in Beziehung auf $h = 0, 1, 2, \ldots 2c-1$ summirt. Hiernach wird:

$$\log\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2\pi} \lim_{\varrho=0} (2c)^{\varrho} \sum_{h=0}^{h=2c-1} \sum_{m,n} \frac{e^{\frac{n-bm}{c} h\pi i} \cdot e^{2(m\sigma' + n\tau')\pi i}}{\left(\frac{1}{2}\Delta m^2 + \frac{1}{2}n^2\right)^{1+\varrho}}.$$

Gemäss den Entwickelungen im art. IV nähert sich jede der $2c$ verschiedenen Reihen, welche den Werthen $h = 0, 1, 2, \ldots 2c-1$ ent-

Digitized by Google

sprechen, für $\rho = 0$ einem bestimmten endlichen Grenzwerth; jedoch für $h = 0$ nur unter der Voraussetzung, dass nicht σ und τ zugleich Null sind. Wenn nunmehr diese Voraussetzung gemacht wird, so kann der Factor $(2c)^\varrho$ auf der rechten Seite weggelassen werden. Führt man dann noch σ, τ an Stelle von σ', τ' wieder ein, so geht die Gleichung in folgende über:

$$(\mathfrak{H}) \quad \log \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2\pi} \sum_{h=0}^{h=2c-1} \lim_{\varrho=0} \sum_{m,n} \frac{e^{2\left(m\left(\sigma - b\frac{\tau+h}{2c}\right) + n\cdot\frac{\tau+h}{2c}\right)\pi i}}{\left(\frac{1}{2}\Delta m^2 + \frac{1}{2}n^2\right)^{1+\varrho}}.$$

Werden endlich gemäss der Formel $(\mathfrak{D})$:

$$\log \Lambda(\sigma_1, \tau_1, w, w) = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi} \lim_{\varrho=0} \sum_{m,n} \frac{e^{2(m\sigma_1 + n\tau_1)\pi i}}{\left(\frac{1}{2}\Delta m^2 + \frac{1}{2}n^2\right)^{1+\varrho}} \qquad (w = i\sqrt{\Delta})$$

die Summen auf der rechten Seite der Gleichung $(\mathfrak{H})$ durch die bezüglichen Ausdrücke: $\log \Lambda$ ersetzt, so resultiren die Gleichungen:

$$(\mathfrak{H}^0) \quad \log \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \sum_{h=0}^{h=2c-1} \log \Lambda\left(\sigma - b\frac{\tau+h}{2c}, \frac{\tau+h}{2c}, w, w\right)$$

$$(\mathfrak{H}') \quad \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \prod_{h=0}^{h=2c-1} \Lambda\left(\sigma - b\frac{\tau+h}{2c}, \frac{\tau+h}{2c}, w, w\right),$$

welche als »Transformations-Formeln« für die Function Λ bezeichnet werden können.

Die Formel $(\mathfrak{H}')$ ergiebt sich direct, wenn man für die Functionen Λ auf beiden Seiten ihre im art. I angegebenen Product-Ausdrücke nimmt. Man erhält nämlich dann auf der linken Seite den Ausdruck:

$$(A_1) \qquad e^{\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)\frac{w}{c}\pi i} \prod_{\alpha,\varepsilon,n} \left(1 - e^{2(nw_\alpha + \varepsilon\tau w_\alpha \pm \varepsilon\sigma)\pi i}\right)$$

und auf der rechten Seite:

$$(A_2) \qquad \prod_{h=0}^{h=2c-1} e^{2\left(\left(\frac{\tau+h}{2c}\right)^2 - \frac{\tau+h}{2c} + \frac{1}{6}\right)w\pi i} \prod_{\alpha,\varepsilon,h,n} \left(1 - e^{2((2cn+\varepsilon h)w_\alpha + \varepsilon\tau w_\alpha \pm \varepsilon\sigma)\pi i}\right),$$

wo die Multiplication auf die Werthe $\alpha = 1, 2$ und $\varepsilon = +1, -1$, und für $\varepsilon = +1$ auf die Werthe $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, für $\varepsilon = -1$, aber nur auf die Werthe $n = 1, 2, 3, \ldots$ zu erstrecken ist; das obere oder untere Zeichen bei $\pm\varepsilon\sigma$ gilt, je nachdem $\alpha = 1$ oder $\alpha = 2$ ist. Der Werth des ersteren der beiden Producte in (A_2) ist gleich dem Exponentialfactor in (A_1); es stimmt ferner das zweite Product in (A_2) mit dem unendlichen Product in (A_1) überein, da einerseits die Zahlen:

$$2cn + h \qquad (h = 0, 1, \ldots 2c-1;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

in (A_2) die sämmtlichen Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots$ annehmen, welche

Digitized by Google

n in (A_1) für $\varepsilon = +1$ anzunehmen hat; und da andererseits auch die Zahlen:

$$2cn - h \qquad (h = 0, 1, \ldots 2c-1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

in (A_2) genau die sämmtlichen Werthe $1, 2, 3, \ldots$ erhalten, welche n in (A_1) für $\varepsilon = -1$ zu erhalten hat.

Bezeichnet man, wie oben im art. III, mit $P(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ das Product:

$$e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2),$$

so ist:

$$\frac{\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)}{\Lambda(\sigma', \tau', w, w)} = \left(\frac{\vartheta'(0, w)\ \vartheta'(0, w)}{\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{P(\sigma, \tau, w_1, w_2)}{P(\sigma', \tau', w, w)},$$

und gemäss den a. a. O. entwickelten Werthen von:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\sigma\,\partial\sigma},\quad \frac{\partial^2 P}{\partial\sigma\,\partial\tau},\quad \frac{\partial^2 P}{\partial\tau\,\partial\tau}$$

wird:

$$\lim_{\sigma=\tau=0} \frac{P(\sigma, \tau, w_1, w_2)}{(\sigma + \tau w_1)\,(\sigma - \tau w_2)} = 2\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)$$

und ebenso:

$$\lim_{\sigma=\tau=0} \frac{P(\sigma', \tau', w, w)}{(\sigma' + \tau' w)\,(\sigma' - \tau' w)} = 2\vartheta'(0, w)\,\vartheta'(0, w).$$

Da nun:

$$\sigma' + \tau' w = \sigma + \tau w_1,\quad \sigma' - \tau' w = \sigma - \tau w_2$$

ist, so ergiebt sich die Relation:

$$\lim_{\sigma=\tau=0} \frac{\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)}{\Lambda(\sigma', \tau', w, w)} = \left(\frac{\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)}{\vartheta'(0, w)\,\vartheta'(0, w)}\right)^{\frac{2}{3}},$$

mit deren Benutzung die Gleichungen $(\mathfrak{H})$ und $(\mathfrak{H}^0)$ für $\sigma = \tau = 0$ in folgende übergehen:

$$(\mathfrak{J}) \qquad \tfrac{2}{3}\log\frac{\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)}{\vartheta'(0, w)\,\vartheta'(0, w)} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2\pi} \lim_{\varrho=0} \sum_{h=1}^{h=2c-1} \sum_{m,n} \frac{e^{\frac{n-bm}{c}h\pi i}}{\left(\frac{1}{2}\Delta m^2 + \frac{1}{2}n^2\right)^{1+\varrho}}$$

$$(\mathfrak{J}^0) \qquad \tfrac{2}{3}\log\frac{\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)}{\vartheta'(0, w)\,\vartheta'(0, w)} = \sum_{h=1}^{h=2c-1} \log\Lambda\left(\frac{-bh}{2c}, \frac{h}{2c}, w, w\right).$$

Führt man in der Formel $(\mathfrak{J})$ die Summation in Beziehung auf h aus, so verwandelt sich der Ausdruck auf der rechten Seite in folgenden:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi} \lim_{\varrho=0} \left\{ \sum_{m,n} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\Delta m^2 + \frac{1}{2}n^2\right)^{1+\varrho}} - \sum_{m,n} \frac{(2c)^{-\varrho}}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\varrho}} \right\}.$$

Digitized by Google

Es ist aber gemäss den Entwickelungen im art. VI:

$$\lim_{\varrho=0} \rho \sum_{m,n} \left(2\pi(a^0 m^2 + b^0 mn + c^0 n^2)\right)^{-1-\varrho} = 1, \text{ also } \lim_{\varrho=0} \rho \sum_{m,n} \left(2\pi(am^2 + bmn + cn^2)\right)^{-1-\varrho} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}},$$

und folglich:

$$\lim_{\varrho=0} \sum_{m,n} \frac{1-(2c)^{-\varrho}}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\varrho}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \log 2c .$$

Die Gleichung (J) lässt sich daher auf folgende Gestalt bringen:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{1}{2c} \left(\frac{\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2)}{\vartheta'(0,w)\,\vartheta'(0,w)}\right)^{\frac{2}{3}} = \lim_{\varrho=0} \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{(\frac{1}{2}\Delta m^2 + \frac{1}{2}n^2)^{1+\varrho}} - \frac{1}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\varrho}} \right\},$$

und wenn man mit dieser Gleichung eine zweite verbindet, in welcher die Grössen:

$$w_1, w_2, a, b, c$$

durch andere analoge Grössen:

$$w_1', w_2', a', b', c' \qquad (4a'c' - b'^2 = \Delta)$$

ersetzt sind, so resultirt endlich die merkwürdige Relation:

(R) $$\lim_{\varrho=0} \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\varrho}} - \frac{1}{(a'm^2+b'mn+c'n^2)^{1+\varrho}} \right\} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{c\left(\vartheta'(0,w_1')\vartheta'(0,w_2')\right)^{\frac{2}{3}}}{c'\left(\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2)\right)^{\frac{2}{3}}},$$

in welcher:

$$w_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \; w_2 = \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \; w_1' = \frac{-b'+i\sqrt{\Delta}}{2c'}, \; w_2' = \frac{b'+i\sqrt{\Delta}}{2c'}$$

ist, und welche ich — nur in etwas anderer Form — schon in meinem mehrfach citirten Aufsatze vom Januar 1863 mitgetheilt habe. Um die Übereinstimmung mit der hier gewählten Form herzustellen, müsste für die dortigen Grössen:

$$\sigma, \tau, a, b, c, D, x, y$$

der Reihe nach:

$$\tau, \sigma, 2c, b, 2a, \Delta, n, m$$

genommen werden.

Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (R) kann noch, da

$$\vartheta'(0, w) = 2\pi e^{\frac{1}{4}w\pi i} \Pi (1 - e^{2nw\pi i})^3$$

ist, auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c'}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}(\log c - \log c') - \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \log \frac{(1-e^{2nw_1\pi i})(1-e^{2nw_2\pi i})}{(1-e^{2nw_1'\pi i})(1-e^{2nw_2'\pi i})}.$$

Dass dieser Ausdruck eine Invariante der durch die quadratischen Formen $(a, b, c), (a', b', c')$ repräsentirten Classen sein muss, tritt durch

Digitized by Google

den Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (ℜ) in Evidenz. Es geht aber auch daraus hervor, dass:

$$\frac{1}{c}\left(\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)\right)^{\frac{2}{3}}$$

eine Invariante der durch die Form (a, b, c) repräsentirten Classe ist. Dies erhellt unmittelbar bei Anwendung der Relationen:

$$\vartheta'(0, w+1) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\vartheta'(0, w),$$
$$\vartheta'\left(0, \frac{-1}{w}\right) = (\sqrt{-wi})^3\vartheta'(0, w),$$

welche schon im art. II für die Invarianten-Eigenschaft der Function A benutzt worden sind.

VIII.

Um nun die Anwendungen auseinandersetzen zu können, welche von der Formel (ℜ) zu machen sind, muss ich hier einige Entwickelungen aus der arithmetischen Theorie der quadratischen Formen voranschicken, wie ich sie seit mehr als zwanzig Jahren in meinen Universitäts-Vorlesungen gegeben habe. Ich sah mich dabei zu gewissen Modificationen der Gauss'schen Terminologie veranlasst, nicht nur weil die Resultate dadurch ganz wesentlich an Einfachheit gewinnen, sondern auch deshalb weil diese Modificationen sich durch die Theorie der höheren Formen als naturgemäss erweisen.

Sind a, b, c ganze Zahlen ohne irgend einen allen dreien gemeinsamen Theiler, so soll:

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

oder mit Weglassung der »Unbestimmten« (Indeterminatae) x, y:

$$(a, b, c)$$

eine »primitive (binäre) quadratische Form der Discriminante $b^2 - 4ac$« heissen. Zwei Formen, die durch ganzzahlige lineare Transformation mit der Determinante Eins in einander übergeführt werden können, sind einander »(eigentlich) aequivalent« und gehören zu derselben »Classe«. Die Discriminante kann nur $\equiv 0$ oder $\equiv 1$ (mod. 4) sein, und diese Zahlformen sollen deshalb als »Discriminantenformen der Zahlen« bezeichnet werden. Ist:

$$b^2 - 4ac = D, \quad b_0^2 - 4a_0c_0 = D_0, \quad D = D_0Q^2,$$

und D nicht ein positives Quadrat, so soll D_0 die der Discriminante D entsprechende »Fundamental-Discriminante« genannt werden, wenn

Digitized by Google

D_0 keinen quadratischen Factor oder wenigstens keinen solchen enthält, nach dessen Abtrennung noch eine Zahl von einer »Discriminantenform« übrig bleibt. So sind also z. B. -4 und -12 Fundamental-Discriminanten. Die möglichen Zahlformen der Fundamental-Discriminanten sind nur folgende:

$$D_0 = P, \text{ wenn } P \equiv 1 \pmod 4 \text{ ist,}$$
$$D_0 = 4P, \text{ wenn } P \equiv -1 \pmod 4 \text{ ist,}$$
$$D_0 = 8P, \text{ wenn } P \equiv \pm 1 \pmod 4 \text{ ist,}$$

wo P irgend ein Product von lauter verschiedenen Primfactoren ist.

Bedeutet $\psi(D, 4A)$ die Anzahl der (mod. $4A$) verschiedenen Lösungen der Congruenz:

$$B^2 \equiv D \pmod{4A},$$

so ist:

$$(\mathfrak{L}) \qquad \tfrac{1}{2}\tau \sum_A \frac{\psi(D, 4A)}{A^{1+\rho}} = \sum_{a,b,c} \sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2)^{1+\rho}} \qquad (\rho > 0).$$

Hierbei ist links die Summation auf alle verschiedenen positiven Zahlen A zu erstrecken,[1] rechts aber erstens auf je zwei Zahlen α, γ (ohne gemeinsamen Theiler), für welche — falls $D > 0$ ist — die Ungleichheit:

$$\left(2a\frac{\alpha}{\gamma} + b\right)^2 > \frac{T^2}{U^2}$$

besteht, und zweitens auf irgend welche Systeme:

$$(a', b', c'), \ (a'', b'', c''), \ldots$$

mit positiven ersten Coefficienten $a', a'', \ldots$, durch welche die sämmtlichen verschiedenen Classen quadratischer Formen der Discriminante D, und zwar jede nur einmal repräsentirt werden. Ferner bedeuten T, U die Zahlen, für welche:

$$T^2 - DU^2 = 1 \text{ oder } = 4$$

eine Fundamentallösung der PELL'schen Gleichung darstellt, und es ist:

$\tau = 1$ für $D > 0$

$\tau = 6$ für $D = -3$, $\tau = 4$ für $D = -4$, $\tau = 2$ für $D < -4$.

Eine Discussion der Eigenschaften der mit ψ bezeichneten zahlentheoretischen Function, auf welche ich an einer anderen Stelle näher eingehen werde, führt nun, wie bei DIRICHLET, von der Gleichung ($\mathfrak{L}$) zu der Gleichung:

$$(\mathfrak{M}^\circ) \qquad \tau \sum \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{(hk)^{1+\rho}} = \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\rho}},$$

[1] Dabei kommen doch nur solche Zahlen vor, welche den ersten Coefficienten einer quadratischen Form der Discriminante D bilden können, weil für alle anderen Zahlen $\psi(D, 4A) = 0$ wird.

Digitized by Google

aus welcher, wegen der Beliebigkeit von ρ, die Gültigkeit der allgemeineren Gleichung:

$$(\mathfrak{M}') \qquad \tau \sum \left(\frac{D}{h}\right) F(hk) = \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} F(am^2 + bmn + cn^2)$$

unmittelbar zu erschliessen ist.[1] Die Summation links ist auf alle positiven Zahlen h, k zu erstrecken, die zu Q relativ prim sind, rechts auf alle Zahlen m, n, für welche $am^2 + bmn + cn^2$ prim zu Q ist. Die Zahl Q hat hier, wie oben, die durch die Gleichung:

$$D = D_0 Q^2$$

definirte Bedeutung. Ferner ist:

$$\left(\frac{D}{h}\right) = 0,$$

sobald D und h einen gemeinsamen Theiler haben. Wenn aber h zu D relativ prim und gleich: $2^g h'$ ist, so ist:

$$\left(\frac{D}{h}\right) = \left(\frac{2^g}{D}\right)\left(\frac{D}{h'}\right)$$

zu setzen, wo h' eine ungerade Zahl und $\left(\frac{2^g}{D}\right)$ sowie $\left(\frac{D}{h'}\right)$ das JACOBI-LEGENDRE'sche Zeichen ist.

Die Gleichung $(\mathfrak{M}')$ kann in folgender eleganteren Weise dargestellt werden:

$$(\mathfrak{M}) \qquad \tau \sum_{h,k} \left(\frac{Q^2}{h}\right)\left(\frac{D}{k}\right) F(hk) = \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2),$$

wo nunmehr die Summe links auf alle positiven Zahlen h, k und rechts auf alle Zahlen m, n mit Ausschluss des Systems $m = n = 0$ zu erstrecken ist. Die Systeme (a, b, c) sind hierbei so zu wählen, dass:

a relativ prim zu Q, jede der Zahlen b und c aber durch alle Primfactoren von Q theilbar wird.

Dies ist immer möglich und für viele Anwendungen vortheilhaft, und es sollen von jetzt ab die Systeme (a, b, c) stets als so beschaffen vorausgesetzt werden.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\sum_{h} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) = H(D)$$

und bezeichnet die Anzahl der Systeme (a, b, c), d. h. also die Anzahl

[1] Vergl. meine Mittheilung vom 12. Mai 1864 im betreffenden Monatsbericht (S. 289 Formel IV).

Digitized by Google

der verschiedenen Classen quadratischer Formen der Discriminante D, mit:

$$K(D),$$

so folgt aus der Gleichung ($\mathfrak{N}^\circ$), dass:

$$(\mathfrak{N}) \qquad \begin{aligned} \tau H(D) &= \frac{2\pi}{\sqrt{-D}} K(D) \qquad \text{für } D<0, \\ H(D) &= \frac{K(D)}{2|\sqrt{D}|} \log \frac{T+U\sqrt{D}}{T-U\sqrt{D}} \text{ für } D>0 \end{aligned}$$

ist. Diese beiden Resultate lassen sich in das eine:

$$(\mathfrak{N}') \qquad H(D) = K(D) \int_{\frac{T}{U}}^{\infty} \frac{dz}{z^2 - D}$$

zusammenfassen, wenn man die Zahlen T, U als diejenigen Lösungen der Gleichung $T^2 - DU^2 = 1$ oder 4 definirt, für welche das Integral möglichst klein, also die untere Grenze möglichst gross wird.

An Stelle der Gleichung ($\mathfrak{N}'$) kann auch die folgende treten:

$$(\mathfrak{N}^\circ) \qquad H(D) = \frac{K(D)}{(\sqrt{D})} \log E(D),$$

wo die eingeklammerte Quadratwurzel die im art. II auseinandergesetzte Bedeutung hat, und wo mit $E(D)$ für alle Fälle die Fundamental-Einheit:

$$\frac{T+U\sqrt{D}}{r} \qquad (r=1,2)$$

d. h. diejenige Einheit bezeichnet ist, durch deren ganze Potenzen sich sämmtliche Einheiten ausdrücken lassen. Es ist danach:

$$E(-3) = \rho^{\frac{1}{3}\pi i}, \quad E(-4) = \rho^{\frac{1}{2}\pi i}, \quad E(D) = \rho^{\pi i} \qquad (D<-4).$$

Setzt man wieder $D = D_0 Q^2$, wo D_0 die Fundamental-Discriminante bedeutet, so ist:

$$H(D) = H(D_0) \prod_q \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right) \qquad (q \text{ alle Primfactoren von } Q),$$

und also:

$$(\mathfrak{O}) \qquad \frac{K(D)}{K(D_0)} = Q \prod_q \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right) \frac{\log E(D_0)}{\log E(D)}.$$

Hiermit wird die Classenanzahl jeder Discriminante auf die der Fundamental-Discriminanten zurückgeführt, und für diese selbst ergeben sich mit Hülfe der Gleichung ($\mathfrak{N}^\circ$) die einfachen Ausdrücke:

Digitized by Google

$$(\mathfrak{P}) \qquad K(D_0) = \frac{\tau}{2D_0} \sum_{k=1}^{k=-D_0-1} \left(\frac{D_0}{k}\right) k \qquad (D_0 < 0),$$

$$(\mathfrak{P}_1) \qquad K(D_0) \log E(D_0) = -\sum_{k=1}^{k=D_0-1} \left(\frac{D_0}{k}\right) \log\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{D_0}}\right) \qquad (D_0 > 0).$$

Dass hier nur die beiden Fälle positiver und negativer Discriminanten zu unterscheiden sind, während DIRICHLET am Schlusse seiner grundlegenden Abhandlung im XXI. Bande des CRELLE'schen Journals (S. 151) acht verschiedene Fälle aufführen musste, ist eben durch die obige Modification der GAUSS'schen Theorie ermöglicht worden.

Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so kommt an Stelle der Gleichung $(\mathfrak{P}_1)$:

$$(\mathfrak{P}_2) \qquad E(D_0)^{K(D_0)} = \left(\frac{T + U\sqrt{D_0}}{r}\right)^{K(D_0)} = \prod_{k=1}^{k=D_0-1} \left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{D_0}}\right)^{-\left(\frac{D_0}{k}\right)} \qquad (r = 1, 2),$$

wo der Ausdruck auf der rechten Seite die sogenannte Kreistheilungs-Einheit der Discriminante D_0 ist, d. h. also ein Ausdruck:

$$\frac{\overline{T} + \overline{U}\sqrt{D_0}}{r},$$

dessen Elemente $\overline{T}$, $\overline{U}$ einerseits sich aus den D_0ten Wurzeln der Einheit und andererseits auch aus den Elementen der Fundamental-Lösung T, U zusammensetzen lassen, indem man $\frac{T + U\sqrt{D_0}}{r}$ zur Potenz $K(D_0)$ erhebt.

IX.

Es soll nun zuvörderst gezeigt werden, wie man mit Hülfe der Formel $(\mathfrak{K})$ zu einer Darstellung der im art. VI mit $L(a_0, c_0)$ bezeichneten Function gelangt, falls a_0^2, $a_0 c_0$ und c_0^2 rationale Werthe haben.

Unter der angegebenen Voraussetzung können nämlich ganze Zahlen a, b, c gefunden werden, für welche:

$$a = a_0\sqrt{\Delta},\ b = b_0\sqrt{\Delta},\ c = c_0\sqrt{\Delta},\ 4ac - b^2 = \Delta$$

ist. Setzt man dann:

$$w_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2c},\ w_2 = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2c},$$

so bestimmen sich daraus unmittelbar die Grössen a_0, c_0 mittels der Gleichungen:

$$a_0 = \frac{-iw_1 w_2}{w_1 + w_2},\quad c_0 = \frac{i}{w_1 + w_2},$$

Digitized by Google

und es sind auch a, b, c als die drei ganzzahligen Coefficienten der quadratischen Gleichung:

$$a + bw + cw^2 = 0 ,$$

welcher w_1 und $-w_2$ genügen, bis auf einen allen dreien gemeinsamen Theiler bestimmt.

Der Ausdruck:

$$\log c \left(\vartheta'(0, w_1)\, \vartheta'(0, w_2)\right)^{-\frac{2}{3}}$$

kann bei Festhaltung des Werthes von Δ als eine Function von w_1 und w_2 allein betrachtet und zur Abkürzung mit:

$$\Omega(w_1, w_2)$$

bezeichnet werden. Die Gleichung (ℜ) erhält hiernach die Form:

(ℜ′) $$\lim_{\varrho=0}\left\{\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\varrho}-\sum_{m,n}(a'm^2+b'mn+c'n^2)^{-1-\varrho}\right\}=\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\left(\Omega(w_1,w_2)-\Omega(w_1',w_2')\right),$$

wo (a, b, c), (a', b', c') irgend welche Formen derselben Discriminante $-\Delta$ bedeuten, die auch verschiedenen Ordnungen angehören können.

Setzt man hierin für (a', b', c') jedes der übrigen Systeme:

$$(a'', b'', c''),\ (a''', b''', c'''),\ \ldots .\ (a^{(K)}, b^{(K)}, c^{(K)}),$$

welche mit (a', b', c') die sämmtlichen einer und derselben Ordnung angehörigen Classen der Discriminante $-\Delta$ repräsentiren, so resultirt bei Summation der auf diese Weise entstehenden Gleichungen die Formel:

(Ω) $$\lim_{\varrho=0}\left\{K\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\varrho}-\sum_{t=1}^{t=K}\sum_{m,n}(a^{(t)}m^2+b^{(t)}mn+c^{(t)}n^2)^{-1-\varrho}\right\}=$$
$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\sum_{t=1}^{t=K}\left\{\Omega(w_1, w_2)-\Omega(w_1^{(t)}, w_2^{(t)})\right\}.$$

Da die Function $L(a_0, c_0)$ gemäss den Entwickelungen im art. VI als der Grenzwerth von:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\left\{-\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{1+\varrho}\frac{1}{\rho}+\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\varrho}\right\}$$

definirt ist, so kann die Gleichung (ℜ′) auf folgende Form gebracht werden:

(ℜ) $$\Omega\left(\frac{-b_0+i}{2c_0}, \frac{b_0+i}{2c_0}\right)-L(a_0, c_0)=\Omega\left(\frac{-b_0'+i}{2c_0'}, \frac{b_0'+i}{2c_0'}\right)-L(a_0', c_0'),$$

in welcher a_0, b_0, c_0, a_0', b_0', c_0' durch die Gleichungen:
$a = a_0\sqrt{\Delta}$, $b = b_0\sqrt{\Delta}$, $c = c_0\sqrt{\Delta}$: $a' = a_0'\sqrt{\Delta}$, $b' = b_0'\sqrt{\Delta}$, $c' = c_0'\sqrt{\Delta}$ bestimmt sind.

Digitized by Google

Geht man andrerseits von irgend welchen Grössen a_0, c_0, a_0', c_0' aus, so gilt die Relation ($\mathfrak{R}$), wenn beide Verhältnisse:

$$a_0 : b_0 : c_0 , \quad a_0' : b_0' : c_0'$$

rational sind, und wenn sie beide mit Hülfe eines und desselben Proportionalitäts-Factors durch die Verhältnisse ganzer Zahlen ausgedrückt werden können. Alsdann bestehen nämlich Gleichungen:

$$a = Pa_0 , \; b = Pb_0 , \; c = Pc_0 ; \quad a' = Pa_0' , \; b' = Pb_0' , \; c' = Pc_0' ,$$

in denen a, b, c, a', b', c' ganze Zahlen sind, und es folgt also aus den Relationen:

$$4ac - b^2 = 4a'c' - b'^2 = P^2 ,$$

dass auch P^2 eine ganze Zahl sein muss.

Aus der Gleichung ($\mathfrak{R}$) folgt, dass die Differenz:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{-b_0 + i}{2c_0} , \; \frac{b_0 + i}{2c_0}\right) - L(a_0 , c_0)$$

oder:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2c} , \; \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2c}\right) - L\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}} , \; \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right)$$

für alle quadratischen Formen (a , b , c) der Discriminante $-\Delta$ einen festen Werth hat. Dieser Werth gehört daher auch denjenigen Formen (a, b, c) an, die von den primitiven Formen der Fundamental-Discriminante abgeleitet sind. Wird, wie oben:

$$\Delta = \Delta_0 Q^2$$

gesetzt, wo unter $-\Delta_0$ die der Discriminante $-\Delta$ entsprechende Fundamental-Discriminante zu verstehen ist, so kann also der Werth jener Differenz mit:

$$M(\Delta_0)$$

bezeichnet und mit Hülfe der Gleichung ($\mathfrak{Q}$), indem darin $\Delta = \Delta_0$ genommen wird, bestimmt werden. Alsdann ist nämlich gemäss der Gleichung ($\mathfrak{M}^0$), in welcher nun $Q = 1$ und $D = -\Delta_0$ gesetzt werden muss:

$$(\mathfrak{S}) \qquad \tau \sum_{h,k} \left(\frac{-\Delta_0}{k}\right) (hk)^{-1-\varrho} = \sum_{t=1}^{t=K(-\Delta_0)} \sum_{m,n}' (a^{(t)}m^2 + b^{(t)}mn + c^{(t)}n^2)^{-1-\varrho} .$$

Wird nun, wie oben, im art. VIII:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{-\Delta_0}{k}\right) \frac{1}{k} = H(-\Delta_0) ,$$

und ferner:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{-\Delta_0}{k}\right) \frac{\log k}{k} = \bar{H}(-\Delta_0) ,$$

Digitized by Google

gesetzt, so wird der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (𝔖) gleich:

$$\tau\left(H(-\Delta_0)-\rho\overline{H}(-\Delta_0)\right)\left(\frac{1}{\rho}+C\right)+Z(\rho),$$

wo $Z(\rho)$ eine Function von ρ ist, welche für $\rho=0$ verschwindet, und wo C die EULER'sche Constante, d. h. also den Grenzwerth:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

bedeutet. Es ist daher:

$$\sum_{t=1}^{t=K(-\Delta_0)}\sum_{m,n}(a^{(t)}m^2+b^{(t)}mn+c^{(t)}n^2)^{-1-\varrho}=\frac{\tau}{\rho}H(-\Delta_0)+\tau CH(-\Delta_0)-\tau\overline{H}(-\Delta_0)+Z^0(\rho);$$

es ist ferner gemäss der Definition von $L(a_0, c_0)$:

$$\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\varrho}=\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_0}}\left(\frac{1}{\rho}+\log\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_0}}\right)+\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_0}}L\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta_0}},\frac{c}{\sqrt{\Delta_0}}\right)+Z'(\rho),$$

wo $Z^0(\rho)$, $Z'(\rho)$ Functionen von ρ bedeuten, die zugleich mit ρ verschwinden; und man kann nun mit Hülfe dieser beiden Gleichungen, sowie unter Hinzuziehung der oben mit (𝔑) bezeichneten Relation:

$$K(-\Delta_0)=\frac{\tau\sqrt{\Delta_0}}{2\pi}H(-\Delta_0),$$

die Gleichung (𝔒) in die folgende transformiren:

$$(\mathfrak{T})\qquad M(\Delta_0)=\mathfrak{M}(\Delta_0)-C+\log\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_0}}+\frac{\overline{H}(-\Delta_0)}{H(-\Delta_0)}.$$

Hier bedeutet $\mathfrak{M}(\Delta_0)$ den mittleren Werth von $\mathfrak{L}\left(\frac{-b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c},\frac{b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c}\right)$, d. h. die Summe aller Werthe:

$$\sum_{t=1}^{t=K(-\Delta_0)}\mathfrak{L}\left(\frac{-b^{(t)}+i\sqrt{\Delta_0}}{2c^{(t)}},\frac{b^{(t)}+i\sqrt{\Delta_0}}{2c^{(t)}}\right),$$

dividirt durch ihre Anzahl, die Gleichung (𝔗) stellt also den zu bestimmenden Werth von $M(\Delta_0)$ durch diesen mittleren Werth der Function $\mathfrak{L}$ und durch jene mit H, $\overline{H}$ bezeichneten Reihen dar, und der gesuchte Werth von $L(a_0, c_0)$ wird alsdann durch die Gleichung:

$$L(a_0, c_0)=\mathfrak{L}\left(\frac{-b_0+i}{2c_0},\frac{b_0+i}{2c_0}\right)-M(\Delta_0)$$

ausgedrückt.

Digitized by Google

X.

Nimmt man in der Gleichung (𝔐) des art. VIII für die willkürliche Function: $F(am^2 + bmn + cn^2)$ die folgende:

$$\left(\frac{D_1}{am^2 + bmn + cn^2}\right)(am^2 + bmn + cn^2)^{-1-\varrho},$$

und für D_1 irgend einen Divisor der Discriminante D, welcher selbst eine Discriminantenform hat, so kann der Factor:

$$\left(\frac{D_1}{am^2 + bmn + cn^2}\right)$$

durch $\left(\frac{D_1}{am^2}\right)$ oder also auch durch:

$$\left(\frac{D_1}{a}\right)\left(\frac{D_1^2}{m}\right)$$

ersetzt werden. Dies ist leicht zu sehen, wenn man für die Form (a, b, c) eine solche wählt, deren mittlerer Coefficient b die Discriminante D als Divisor enthält, und wenn man berücksichtigt, dass für jede Zahl D_1 die von der Discriminantenform, d. h. also die $\equiv 0$ oder $1 \pmod 4$ ist, und für jede positive Zahl s die aus dem Reciprocitäts-Gesetz zu erschliessende Relation:

$$\left(\frac{D_1}{s}\right) = \left(\frac{D_1}{s + D_1}\right)$$

besteht, vorausgesetzt nur, dass auch $s + D_1$ positiv ist.

Die Gleichung (𝔐) geht hiernach bei jener Bestimmung der Function F in folgende über:

$$\tau \sum_{h,k}\left(\frac{Q^2}{h}\right)\left(\frac{D}{k}\right)\left(\frac{D_1}{hk}\right)\frac{1}{(hk)^{1+\varrho}} = \sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n}\left(\frac{D_1^2 Q^2}{m}\right)\frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\varrho}},$$

in welcher Q^2, wie oben, als Quotient der Discriminante D und der entsprechenden Fundamental-Discriminante D_0 bestimmt ist, und welche sich, wenn $D_2 = \frac{D}{D_1}$ gesetzt wird, auch so darstellen lässt:

$$(\mathfrak{U}) \quad \tau \sum_{k}\left(\frac{D_1 Q^2}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\varrho}} \sum_{k}\left(\frac{D_1^2 D_2}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\varrho}} = \sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n}\left(\frac{D_1^2 Q^2}{m}\right)\frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\varrho}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar, wie bei Dirichlet, dass die Anzahl der Classen (a, b, c) mit dem Charakter $\left(\frac{D_1}{a}\right) = +1$ genau so gross ist, wie die Anzahl der Classen mit dem Charakter $\left(\frac{D_1}{a}\right) = -1$, sobald nur D_1 kein positives Quadrat ist. Denn unter dieser Voraus-

Digitized by Google

setzung ist auch D_2 kein positives Quadrat, und die beiden Reihen auf der linken Seite nähern sich also für $\rho = 0$ endlichen Werthen.

Die Gleichung (U) kann noch in wesentlicher Beziehung vereinfacht werden. Bezeichnet man nämlich mit $p_1', p_1'', p_1''', \ldots$ diejenigen verschiedenen Primfactoren von D_1, welche nicht zugleich in Q enthalten und welche also ausschliesslich Primfactoren der Fundamental-Discriminante D_0 sind, so ist:

$$\left(\frac{D_1^2}{m}\right) = 0 \text{ oder } 1,$$

je nachdem die Zahl m eine von den Primzahlen $p_1', p_1'', p_1''', \ldots$ als Factor enthält oder zu $p_1', p_1'', p_1''', \ldots$ relativ prim ist. Wenn man nun Zahlen $\varpi_0, \varpi_1, \varpi_2, \ldots$ durch die Gleichung:

$$(1 - zp_1')(1 - zp_1'')(1 - zp_1''') \ldots = \varpi_0 - z\varpi_1 + z^2\varpi_2 - \ldots$$

definirt, so kann jener Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (U) in folgender Weise dargestellt werden:

$$\sum_{\nu} \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} (-1)^{\nu} \left(\frac{D_1}{a}\right) \left(\frac{Q^2}{m}\right) \left(\frac{Q^2}{\varpi_\nu}\right) (am^2\varpi_\nu^2 + bmn\varpi_\nu + cn^2)^{-1-\varrho},$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

und es kann hier auch, da ϖ_ν zu Q prim ist, der Factor $\left(\frac{Q^2}{\varpi_\nu}\right)$ wegbleiben. Der obigen Festsetzung nach ist a prim zu D und $c \equiv 0 \pmod{D}$, also $\frac{c}{\varpi_\nu}$ eine ganze Zahl; es besteht ferner vermöge der Gleichungen:

$$D = D_1 D_2, \; D = b^2 - 4ac \text{ also } \left(\frac{D}{a}\right) = 1$$

die Relation:

$$\left(\frac{D_1}{a}\right) = \left(\frac{D_2}{a}\right) = \left(\frac{D_2}{a\varpi_\nu}\right)\left(\frac{D_2}{\varpi_\nu}\right),$$

da keiner der in D_1 enthaltenen Primfactoren $p_1', p_1'', p_1''', \ldots$ zugleich in D_2 enthalten sein kann. Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (U) wird hiernach gleich:

$$\sum_{\nu} (-1)^{\nu} \left(\frac{D_2}{\varpi_\nu}\right) \varpi_\nu^{-1-\varrho} \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \left(\frac{D_2}{a\varpi_\nu}\right) \left(\frac{Q^2}{m}\right) \left(a\varpi_\nu m^2 + bmn + \frac{c}{\varpi_\nu} n^2\right)^{-1-\varrho}.$$

Nimmt man nun hier für die Form $\left(a\varpi_\nu, b, \frac{c}{\varpi_\nu}\right)$ irgend eine aequivalente Form (a', b', c'), in welcher a' wieder prim zu D ist, so wird:

$$\left(\frac{D_2}{a\varpi_\nu}\right) = \left(\frac{D_2}{a'}\right) = \left(\frac{D_1}{a'}\right),$$

Digitized by Google

und die auf a, b, c, m, n bezügliche Summe wird also von ϖ_ν unabhängig. Der ganze Ausdruck geht alsdann in folgenden über:

$$\prod_{p_1}\left(1-\left(\frac{D_2}{p_1}\right)p_1^{-1-\varrho}\right)\sum_{a,b,c}\sum_{m,n}\left(\frac{D_1}{a}\right)\left(\frac{Q^2}{m}\right)(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\varrho},$$

wo sich die Multiplication auf alle jene Primzahlen $p_1', p_1'', p_1''', \ldots$ erstreckt.

In der zweiten Summe auf der linken Seite der Gleichung (U) kann der Factor $\left(\frac{D_1^2 D_2}{k}\right)$ auch durch $\left(\frac{D_1^2}{k}\right)\left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right)$ ersetzt werden, da $\left(\frac{Q^2}{k}\right)=1$ ist, wenn k und Q keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, während andernfalls schon:

$$\left(\frac{D_1^2 D_2}{k}\right)=\left(\frac{D_1}{k}\right)\left(\frac{D}{k}\right)=\left(\frac{D_0 Q^2}{k}\right)=0$$

ist. Es folgt nun, wie oben, dass jene zweite Reihe auf der linken Seite der Gleichung (U) nämlich:

$$\sum_k\left(\frac{D_1^2}{k}\right)\left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\varrho}} \text{ in die Reihe } \sum_\nu\sum_k(-1)^\nu\left(\frac{D_2 Q^2}{k\varpi_\nu}\right)\frac{1}{(k\varpi_\nu)^{1+\varrho}}$$

umgeformt werden kann, welche sich unmittelbar als Product von zwei Reihen:

$$\sum_\nu(-1)^\nu\left(\frac{D_2 Q^2}{\varpi_\nu}\right)\frac{1}{\varpi_\nu^{1+\varrho}}\sum_k\left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\varrho}}$$

darstellen lässt. Da nun:

$$\left(\frac{Q^2}{\varpi_\nu}\right)=1 \text{ und } \sum_\nu(-1)^\nu\left(\frac{D_2}{\nu}\right)\frac{1}{\varpi_\nu^{1+\varrho}}=\prod_{p_1}\left(1-\left(\frac{D_2}{p_1}\right)p_1^{-1-\varrho}\right)$$

ist, so wird der ganze Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (U) gleich:

$$\tau\prod_{p_1}\left(1-\left(\frac{D_2}{p_1}\right)\frac{1}{p_1^{1+\varrho}}\right)\sum_k\left(\frac{D_1 Q^2}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\varrho}}\sum_k\left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\varrho}},$$

und die Gleichung (U) selbst geht in folgende über:

$$\text{(U)}\quad \tau\sum_k\left(\frac{D_1 Q^2}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\varrho}}\sum_k\left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\varrho}}=\frac{1}{2}\sum_{a,b,c}\left\{\left(\frac{D_1}{a}\right)+\left(\frac{D_2}{a}\right)\right\}\sum_{m,n}\left(\frac{Q_2}{m}\right)(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\varrho},$$

in welcher D_1, D_2 irgend zwei complementäre Divisoren der Discriminante D bedeuten, die selbst Discriminantenform haben, und in welcher auf der rechten Seite nur, um auch äusserlich die Symmetrie in Beziehung auf die beiden Divisoren zu wahren:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{D_1}{a}\right)+\left(\frac{D_2}{a}\right)\right\}$$

Digitized by Google

an Stelle von $\left(\frac{D_1}{a}\right)$ gesetzt ist. Hieraus ergiebt sich unmittelbar die allgemeinere bemerkenswerthe Gleichung:

$$(\mathfrak{M}^*) \quad \tau \sum_{h,k} \left(\frac{D_1 Q^2}{h}\right)\left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right) F(hk) = \tfrac{1}{2} \sum_{a,b,c} \left\{\left(\frac{D_1}{a}\right)+\left(\frac{D_2}{a}\right)\right\} \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2+bmn+cn^2),$$

welche für $D_1 = 1$ mit der Gleichung $(\mathfrak{M})$ im art. VIII identisch ist, und welche auch in folgender Form dargestellt werden kann:

$$(\overline{\mathfrak{M}}) \quad \tau \sum_{r_1,r_2} \left(\frac{D_1}{r_1}\right)\left(\frac{D_2}{r_2}\right) F(r_1 r_2) = \tfrac{1}{2} \sum_{a,b,c} \left\{\left(\frac{D_1}{a}\right)+\left(\frac{D_2}{a}\right)\right\} \sum_{m,n} F(am^2+bmn+cn^2),$$

wenn man die Summation links nur auf alle diejenigen positiven Zahlen r_1, r_2 erstreckt, die zu Q oder also zum Quotienten $\frac{D_1 D_2}{D_0}$ relativ prim sind, rechts aber auf alle diejenigen positiven und negativen Zahlen m, n, für welche die Zahl $am^2+bmn+cn^2$ zu $\frac{D_1 D_2}{D_0}$ relativ prim wird.

Aus der Gleichung $(\mathfrak{U})$ resultirt, wenn man zum Grenzwerth $\rho = 0$ übergeht und von den im art. VIII eingeführten Bezeichnungen Gebrauch macht, die Formel:

$$(\mathfrak{U}^0) \quad \tau H(D_1 Q^2) H(D_2 Q^2) = \lim_{\rho=0} \sum_{a,b,c} \left(\frac{D_1}{a}\right) \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) (am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho},$$

und der Ausdruck auf der linken Seite kann hier gemäss der Gleichung $(\mathfrak{N}^0)$ im art. VIII mittels der Classenanzahlen und Fundamentaleinheiten für die Discriminanten $D_1 Q^2$ und $D_2 Q^2$ dargestellt werden.

In dem Falle, wo D negativ und $Q = 1$ ist, lässt sich nun aber der Ausdruck auf der rechten Seite von $(\mathfrak{U}^0)$ mit Hülfe der Gleichung $(\mathfrak{R})$ durch ϑ-Functionen darstellen. Man erhält alsdann die Gleichung:

$$(\mathfrak{V}) \quad \frac{\tau\sqrt{\Delta}}{2\pi} H(D_1) H(D_2) = \sum_{a,b,c} \left(\frac{D_1}{a}\right) \log c \left(\vartheta'\left(0, \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)\vartheta'\left(0, \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)\right)^{-\frac{2}{3}},$$

in welcher:

$$D_1 D_2 = D = -\Delta$$

und also einer der beiden Divisoren D_1 oder D_2 negativ ist.

Nimmt man nun D_1 als den negativen, also D_2 als den positiven Divisor an, so ist gemäss den Gleichungen $(\mathfrak{N})$ im art. VIII:

$$\frac{\tau\sqrt{\Delta}}{\pi} H(D_1) H(D_2) = K(D_1) K(D_2) \log \frac{T+U\sqrt{D_2}}{T-U\sqrt{D_2}},$$

und daher:

Digitized by Google

$$(\mathfrak{V}^c)\quad K(D_1)\,K(D_2)\log\frac{T+U\sqrt{D_2}}{r}=\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\log c\left(\vartheta'\left(0,\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)\vartheta'\left(0,\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Wegen der Voraussetzung $Q=1$ sind beide Divisoren D_1 und D_2 Fundamental-Discriminanten; man kann daher von den Formeln $(\mathfrak{P})$ und $(\mathfrak{P}_1)$ des art. VIII Gebrauch machen und erhält alsdann die Gleichung:

$$(\mathfrak{V}')\quad \tfrac{1}{2}\tau\sum_{k=1}^{k=-D_1-1}\left(\frac{-D_1}{k}\right)\frac{k}{D_1}\sum_{k=1}^{k=-D_2-1}\left(\frac{D_2}{k}\right)\log\left(1-e^{\frac{2k\pi i}{D_2}}\right)$$

$$=\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\log c\left(\vartheta'\left(0,\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)\vartheta'\left(0,\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)\right)^{-\frac{2}{3}},$$

oder wenn man den Factor $K(D_1)$ auf der linken Seite von $(\mathfrak{V}^c)$ beibehält und von den Logarithmen zu den Grössen selbst übergeht:

$$(\mathfrak{V})\quad \prod_{k=1}^{k=D_2-1}\left(1-e^{\frac{2k\pi i}{D_2}}\right)^{3\left(\frac{D_2}{k}\right)K\left(\frac{-\Delta}{D_2}\right)}=\prod_{a,b,c}\left(\frac{1}{c^3}\vartheta'\left(0,\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)^2\vartheta'\left(0,\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)^2\right)^{\left(\frac{D_2}{a}\right)}.$$

Diese Gleichung liefert eben jene höchst interessanten Beziehungen, die ich in meiner schon oben citirten Mittheilung vom 22. Januar 1863 angegeben habe, nämlich Beziehungen zwischen Zahlenausdrücken, die aus der Theorie der Kreisfunctionen und solchen, die aus der Theorie der elliptischen Functionen stammen. Sie liefert auch einen zweiten ganz einfachen Beweis jener Zerlegbarkeit der Gleichungen für die singulären Moduln, welche ich in meiner Mittheilung vom 26. Juni 1862 entwickelt habe.

Anknüpfend an jene werthvollen Andeutungen, welche Dirichlet am Schlusse des §. 7 seiner mehrerwähnten classischen Abhandlung gegeben hat,[1] kann man auf die Gleichung $(\mathfrak{M}^*)$ die Theorie der elliptischen Functionen noch in ganz anderer Weise, als oben, anwenden.

Um dies darzulegen, sollen zuerst die Jacobi-Legendre'schen Zeichen in der Gleichung $(\mathfrak{M})$ durch die Gauss'schen Reihen ausgedrückt werden. Für den Fall, dass D_0 irgend eine Fundamental-Discriminante ist, lässt sich nämlich $\left(\frac{D_0}{r}\right)$ in besonders eleganter Weise, wie folgt, darstellen:

$$\left(\frac{D_0}{r}\right)=\frac{1}{(\sqrt{D_0})}\sum_k\left(\frac{D_0}{k}\right)e^{\frac{2rk\pi i}{|D_0|}}\qquad (k=1,3,5,\ldots 2|D_0|-1).$$

[1] Einige weitere Ausführungen finden sich in einem von Dirichlet an mich gerichteten Briefe, welcher von Hrn. E. Schering in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht wird.

Digitized by Google

Hier bedeutet r irgend eine positive Zahl, mit $|D_0|$ ist in WEIERSTRASS'scher Weise der absolute Werth von D_0 bezeichnet, und $(\sqrt{D_0})$ hat die im art. II angegebene und oben durchweg beibehaltene Bedeutung, wonach:

$$(\sqrt{D_0}) = |\sqrt{D_0}| \text{ für } D_0 > 0$$
$$(\sqrt{D_0}) = i|\sqrt{D_0}| \text{ für } D < 0$$

ist. Die Summation rechts kann, wenn D_0 ungrade ist, auch auf die Zahlen von 1 bis $|D_0|$ erstreckt werden.

Mit Hülfe der angegebenen Darstellung der LEGENDRE'schen Zeichen verwandelt sich die Gleichung $(\mathfrak{M})$ in folgende:

$$(\mathfrak{M}) \qquad \frac{2\tau}{(\sqrt{D_1})(\sqrt{D_2})} \sum_{k_1,k_2} \sum_{r_1,r_2} \left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right) e^{2\pi i\left(\frac{k_1 r_1}{|D_1|}+\frac{k_2 r_2}{|D_2|}\right)} F(r_1 r_2) =$$
$$\sum_{a,b,c} \left(\left(\frac{D_1}{a}\right)+\left(\frac{D_2}{a}\right)\right) \sum_{m,n} F(am^2 + bmn + cn^2),$$

in welcher für a, b, c, m, n, r_1, r_2 dieselben Summationsbedingungen gelten wie in der obigen Gleichung $(\mathfrak{M})$, während die Summation in Beziehung auf k_1, k_2 über:

$$k_1 = 1, 3, 5, \ldots 2|D_1| - 1; \; k_2 = 1, 3, 5, \ldots 2|D_2| - 1$$

zu erstrecken ist. Die beiden Zahlen D_1 und D_2 sind nur der Bedingung unterworfen, dass sie beide Fundamental-Discriminanten-Form haben müssen, und dass ihr Product der Discriminante $b^2 - 4ac$ gleich sein muss. Es kann dabei auch, wie ausdrücklich hervorzuheben ist, $D_2 = 1$ genommen werden.

Nimmt man jetzt wieder an, dass:

$$D = D_1 D_2 < 0, \; D_1 < 0 \text{ und } Q^2 = \frac{D_1 D_2}{D_0} = 1$$

sei, so ist die Summation in $(\mathfrak{M})$ auf alle positiven Zahlen r_1, r_2 sowie auf alle (positiven und negativen) Zahlen m, n mit alleinigem Ausschluss des Systems $m = n = 0$ auszudehnen. Wenn man nun in der Gleichung $(\mathfrak{M})$ die Summationsbuchstaben k_1, k_2 beziehungsweise durch:

$$-2D_1 - k_1, \; 2D_2 - k_2$$

ersetzt und von den Relationen:

$$\left(\frac{D_1}{k}\right) = -\left(\frac{D_1}{-2D_1-k}\right), \; \left(\frac{D_2}{k}\right) = \left(\frac{D_2}{2D_2-k}\right)$$

Gebrauch macht, so wird ersichtlich, dass die Gleichung $(\mathfrak{M})$ bestehen bleibt, sobald man auf der linken Seite im Exponentialfactor i in $-i$ verwandelt, aber zugleich auch den ganzen Ausdruck links mit -1 multiplicirt. Addirt man nun die ursprüngliche zu der so veränderten

Digitized by Google

Gleichung hinzu und berücksichtigt, dass bei den gemachten Annahmen:

$$(\sqrt{D_1})(\sqrt{D_2}) = i\,|\sqrt{D}|$$

ist, so erhält man die Gleichung:

$$(\mathfrak{M}_1) \qquad \frac{2\tau}{|\sqrt{D}|}\sum_{k_1,k_2}{\sum_{r_1,r_2}}'\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)\sin 2\pi\left(\frac{k_2 r_2}{D_2}-\frac{k_1 r_1}{D_1}\right)F(r_1 r_2)$$
$$= \sum_{a,b,c}\left(\left(\frac{D_1}{a}\right)+\left(\frac{D_2}{a}\right)\right)\sum_{m,n}F(am^2+bmn+cn^2),$$

wegen deren Wichtigkeit die Bedeutung aller darin vorkommenden Bezeichnungen hier noch einmal wiederholt werden soll:

1. D_1 und D_2 sind beide irgend welche Fundamental-Discriminanten, also irgend welche Zahlen, die entweder ungrade oder das Vierfache einer ungraden Zahl oder das Achtfache einer solchen sind, deren ungrade Primfactoren ferner sämmtlich von einander verschieden, und die endlich noch der Beschränkung unterworfen sind, dass sie $\equiv 1$ (mod. 4) sein müssen, wenn sie ungrade sind, und aber $\equiv -4$ (mod. 16), wenn sie nur durch 4 und nicht durch 8 theilbar sind.
2. D_1 ist negativ und D_2 positiv, und es ist $D = D_1 D_2$. Für $D_1 = -3$ ist $\tau = 6$, für $D_1 = -4$ ist $\tau = 4$, für $D_1 < -4$ ist $\tau = 2$.
3. Für k_1 sind die Zahlen $1, 3, 5, \ldots -2D_1 - 1$ zu setzen, für k_2 die Zahlen $1, 3, 5, \ldots 2D_2 - 1$.
4. Für r_1, r_2 sind alle positiven Zahlen zu nehmen.
5. Für (a, b, c) sind solche Repräsentanten aller verschiedenen Classen von Formen der Discriminante D oder $D_1 D_2$ zu nehmen, in denen a relativ prim zu D ist.
6. Für m, n sind alle Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu setzen, mit alleinigem Ausschluss des Werthsystems $m = n = 0$.

Bedeutet nun, wie bei Jacobi, q eine reelle oder complexe Grösse, wofür $|q| < 1$ ist, so kann man in der allgemeinen Gleichung $(\mathfrak{M}_1)$:

$$F(h) = \left(1-(-1)^h\right)q^{\frac{1}{2}h}$$

setzen, da alsdann die Reihen auf beiden Seiten convergiren. Man erhält somit die speciellere Gleichung:

$$\frac{2\tau}{|\sqrt{D}|}\sum_{k_1,k_2}{\sum_{\nu_1,\nu_2}}'\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)q^{\frac{1}{2}\nu_1\nu_2}\sin 2\pi\left(\frac{k_2\nu_2}{D_2}-\frac{k_1\nu_1}{D_1}\right)=\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n}q^{\frac{1}{2}(am^2+bmn+cn^2)},$$

Digitized by Google

in welcher die Summation links nur auf alle positiven ungraden Zahlen ν_1, ν_2 und rechts nur auf alle diejenigen Systeme von Zahlen m, n auszudehnen ist, für welche der Werth von:

$$am^2 + bmn + cn^2$$

ungrade wird.

Die auf ν_1 und ν_2 bezügliche Summation lässt sich mit Hülfe jener Formel:

$$\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(\xi+\eta)}{\vartheta_0(\xi)\vartheta_0(\eta)} = 4\pi \sum_{m,\nu} q^{\frac{1}{2}\mu\nu} \sin(\mu\xi + \nu\eta)\pi \qquad (\mu,\nu = 1,3,5,\ldots),$$

welche ich in meiner Mittheilung vom 22. December 1881 entwickelt habe,[1] vollständig ausführen. Man gelangt auf diese Weise ganz unmittelbar zu der Gleichung:

$$(\mathfrak{W}) \quad \frac{\tau\vartheta_1'(0)}{2\pi|\sqrt{D}|}\sum_{k_1,k_2}\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)\frac{\vartheta_1\left(\frac{k_2}{D_2}-\frac{k_1}{D_1}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{k_1}{D_1}\right)\vartheta_0\left(\frac{k_2}{D_2}\right)} = \sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n} q^{\frac{1}{2}(am^2+bmn+cn^2)},$$

in welcher die Summation links auf:

$$k_1 = 1, 3, 5, \ldots - D_1 - 1; \quad k_2 = 1, 3, 5, \ldots D_2 - 1,$$

rechts aber auf alle diejenigen positiven und negativen Zahlen m, n zu erstrecken ist, wofür $am^2 + bmn + cn^2$ ungrade wird. Die Function ϑ_1 ist mit der hier überall mit ϑ bezeichneten Function identisch, wenn in dieser $w\pi i = \log q$ gesetzt wird, ϑ_0 ist durch die Relation:

$$\vartheta_0(\zeta) = -iq^{\frac{1}{4}} e^{\zeta\pi i}\vartheta\left(\zeta + \frac{1}{2\pi i}\log q\right)$$

definirt, und die ϑ-Functionen in der Formel $(\mathfrak{W})$ sind daher durch die Gleichungen:

$$\vartheta_0(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-q)^{n^2}\cos 2n\zeta\pi, \quad \vartheta_1(\zeta) = q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{n^2+n}\sin(2n+1)\zeta\pi$$

bestimmt.

Die zweifache Summe auf der linken Seite der Gleichung $(\mathfrak{W})$ stellt eine in wesentlicher Hinsicht verallgemeinerte GAUSS'sche Reihe dar, und die Wichtigkeit jener in der citirten Mittheilung eingeführten Function zweier Variabeln:

$$\frac{\vartheta_1(\xi+\eta)}{\vartheta_0(\xi)\vartheta_0(\eta)},$$

tritt hier, wo sie die Stelle des *sinus* in den GAUSS'schen Reihen einnimmt, besonders deutlich hervor.

Für $D_2 = 1$ reducirt sich die zweifache Summe auf eine einfache GAUSS'sche Summe, in welcher die elliptische Function *sin am* die

Digitized by Google

Stelle des *sinus* einnimmt. Die Formel (𝔚) geht alsdann in eine speciellere über, deren Herleitung DIRICHLET schon a. a. O. im §. 7 seiner Abhandlung skizzirt, und welche er mir in fertiger Gestalt für den Fall, wo $-\frac{1}{4}D_1$ eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist, im Juli 1858 brieflich mitgetheilt hat.[2]

Dividirt man die Gleichung (𝔚) durch q und integrirt dann in Beziehung auf q von *Null* an, so resultirt rechts eine Reihe, deren Grenzwerth für $q=1$ oben sowohl durch Kreisfunctionen, als auch durch elliptische Functionen mit singulären Moduln ausgedrückt worden ist. Mit $\frac{\sqrt{-D}}{\pi}$ multiplicirt, wird dieser Grenzwerth gleich dem Logarithmus einer Einheit von der Form: $t+u\sqrt{D_2}$, und durch einen solchen Werth findet sich also schliesslich das von 0 bis 1 erstreckte Integral jener allgemeineren zweifachen GAUSS'schen Reihe ausgedrückt.

Nicht bloss diese Ergebnisse der Gleichung (𝔚), sondern auch die übrigen in diesem Paragraphen entwickelten Resultate gehören wohl zu den merkwürdigsten von allen, die bisher aus der Theorie der elliptischen Functionen abgeleitet worden sind.

---

[1] Monatsbericht vom December 1881 S. 1168. (I').

[2] Vergl. die obige Anmerkung S. 780.

(Fortsetzung folgt.)

Digitized by Google

36. Über den CAUCHY'schen Satz.

Von L. KRONECKER.

(Vorgetragen am 30. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 27. August.)

In meiner Mittheilung vom 29. Juli 1880 habe ich den CAUCHY'schen Satz, wonach das über eine geschlossene Curve erstreckte Integral $\int df(x, y)$ unter gewissen in Beziehung auf die Function $f(x, y)$ zu machenden Voraussetzungen gleich Null ist, mittels einer Transformation der Variabeln x, y bewiesen, bei welcher die Umgrenzungs-Curve durch die Constanz der einen von den beiden neuen Variabeln charakterisirt ist. Wie einfach und naturgemäss auch diese Beweismethode ist, so scheint mir doch — wenigstens in pädagogischer Hinsicht — die folgende vorzuziehen, welche ich neulich in meinen Universitäts-Vorlesungen entwickelt habe.

Ich formulire zunächst den zu beweisenden Satz folgendermaassen:

»Wenn von einer Function $f(x, y)$ vorausgesetzt wird, dass ihre ersten und zweiten Ableitungen in einem von einer geschlossenen Curve umgrenzten Gebiete durchweg endlich und eindeutig sind, so lässt sich erschliessen, dass das über diese Curve erstreckte Integral $\int df(x, y)$ gleich Null, und dass also die Function $f(x, y)$ in dem bezeichneten Gebiete eindeutig ist.«

Ich bemerke dabei, dass diese Eindeutigkeit von $f(x, y)$ selbst in meiner erwähnten Mittheilung vom Juli 1880 durch ein Versehen an Stelle der Eindeutigkeit der Ableitungen unter die Voraussetzungen aufgenommen ist. Doch ist natürlich beim Beweise kein Gebrauch davon gemacht worden.

Da die zweiten Ableitungen von $f(x, y)$ in dem betrachteten Gebiete als endlich vorausgesetzt sind, so nähern sich die Werthe der beiden nach x und y genommenen ersten Ableitungen von $f(x, y)$ in gleichmässiger Weise vom Innern her denjenigen Werthen, die sie auf der Begrenzung erhalten. An Stelle der Begrenzungscurve kann daher ein derselben eingeschriebenes gradliniges Polygon genommen werden, welches sich der Curve hinreichend nahe anschliesst, und da sich ein Polygon in lauter rechtwinklige Dreiecke zerlegen lässt, deren Katheten den beiden Coordinatenaxen parallel sind, so genügt

Digitized by Google

es, den zu beweisenden Satz für die Umgrenzung eines solchen Dreiecks zu entwickeln.

Zu diesem Behufe braucht man aber nur den Werth des über die Fläche des Dreiecks zu erstreckenden Integrals:

$$\iint \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\, dx\, dy$$

in den beiden möglichen Integrations-Folgen wirklich darzustellen und die beiden Resultate zu identificiren.

Setzt man:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_1(x,y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_2(x,y)$$

und bezeichnet mit (ξ, η), (ξ', η), (ξ', η') die drei Eckpunkte des rechtwinkligen Dreiecks, so kann die Hypotenuse durch die Gleichung:

$$x = \xi' + t(\xi - \xi'), \quad y = \eta' + t(\eta - \eta') \qquad (0 < t < 1)$$

dargestellt werden. Wenn nun zuerst in Beziehung auf y von η bis $\eta' + t(\eta - \eta')$ bei dem durch die Gleichung:

$$t = \frac{x - \xi'}{\xi - \xi'}$$

bestimmten Werthe von t und dann in Beziehung auf x von ξ bis ξ' integrirt wird, so erhält man den Ausdruck:

$$-\int_{\xi}^{\xi'} f_1(x, \eta)\, dx + \int_{\xi}^{\xi'} f_1\big(x, \eta' + t(\eta - \eta')\big)\, dx.$$

Wenn aber zuerst in Beziehung auf x von $\xi' + t(\xi - \xi')$ bis $x = \xi'$ und dann in Beziehung auf y von η bis η' integrirt wird, so kommt:

$$\int_{\eta}^{\eta'} f_2(\xi', y)\, dy - \int_{\eta}^{\eta'} f_2\big(\xi' + t(\xi - \xi'), y\big)\, dy.$$

Subtrahirt man diesen Ausdruck von dem vorhergehenden, so resultirt die Gleichung:

$$\int_{\xi}^{\xi'} f_1(x, \eta)\, dx + \int_{\eta}^{\eta'} f_2(\xi', y)\, dy + \int_{\xi'}^{\xi} f_1\big(x, \eta' + t(\eta - \eta')\big)\, dx + \int_{\eta'}^{\eta} f_2\big(\xi' + t(\xi - \xi'), y\big)\, dy = 0.$$

Diese Gleichung kann auch in folgender Form dargestellt werden:

$$\int_{\xi}^{\xi'} \underset{(y=\eta)}{df(x,y)} + \int_{\eta}^{\eta'} \underset{x=\xi'}{df(x,y)} + \int_{t=0}^{t=0} \underset{\substack{x=\xi'+t(\xi-\xi') \\ y=\eta'+t(\eta-\eta')}}{df(x,y)} = 0,$$

in welcher sich unmittelbar zeigt, dass das über die drei Seiten des Dreiecks erstreckte Integral $\int df(x,y)$ gleich Null ist.

Digitized by Google

Der Zerlegung des Polygons in lauter rechtwinklige Dreiecke ist eine solche in Rechtecke, deren Seiten den Coordinatenaxen parallel sind, insofern vorzuziehen, als der zu beweisende Satz für die Umgrenzung eines solchen Rechtecks noch unmittelbarer erhellt als für die eines rechtwinkligen Dreiecks. Denn der Werth jenes über die Fläche eines Rechtecks mit den Eckpunkten (ξ, η), (ξ', η), (ξ', η'), (ξ, η') erstreckten Integrals:

$$\iint \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \, \partial y} \, dx \, dy$$

wird sowohl durch:

$$\int_{\xi}^{\xi'} \left(f_1(x,y)\right)_{y=\eta}^{y=\eta'} dx \text{ als durch } \int_{\eta}^{\eta'} \left(f_2(x,y)\right)_{x=\xi}^{x=\xi'} dy$$

ausgedrückt, und die Differenz der beiden Integrale ist nichts Anderes als das Integral:

$$\int \left(f_1(x,y)\, dx + f_2(x,y)\, dy\right),$$

erstreckt über die Umgrenzung des Rechtecks. — Aber man muss dann noch hinzufügen, dass das Resultat der Integration über die den Coordinatenaxen parallelen Katheten der rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypotenusen die Polygonseiten sind, sich beliebig wenig von dem Resultate der Integration über die Polygonseiten selbst unterscheidet, wenn diese hinreichend klein angenommen werden.

Es bedarf kaum der Bemerkung, dass das CAUCHY'sche Theorem bezüglich der Integrale complexer Variabeln ein einfaches Corollar des hier bewiesenen Satzes ist. Denn auf Grund dieses Satzes ist sowohl der reelle als der imaginäre Theil des über eine geschlossene Curve erstreckten Integrals $\int dF(x+yi)$ gleich Null, wenn die erste und die zweite Ableitung von $F(x+yi)$ in dem umgrenzten Gebiete durchweg endlich und eindeutig ist.

Digitized by Google

Digitized by Google

37. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen.

Von K. Weierstrass.

(Vorgetragen am 30. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 27. August.)

Zweite Mittheilung.

Es bedeute $f(x)$, wie in der am 9. Juli d. J. in der Akademie gelesenen Mittheilung, eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze (G) hat. Dagegen sei $\psi(x)$ eine transcendente ganze Function, von der zunächst nur angenommen wird, dass sie reell sei für reelle Werthe von x, und der Bedingung $\psi(-x)=\psi(x)$ genüge. Ferner seien u, v reelle, von einander unabhängige Veränderliche, und es werde

$$\sqrt{\psi(u+vi)\psi(u-vi)} = \psi(u,v)$$

gesetzt, wo der Quadratwurzel ihr positiver Werth beizulegen ist. Dann ist der absolute Betrag von $\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}$ gleich 1, und man hat daher, wenn a, b reelle Grössen sind,

$$\int_a^b f(u)\psi(u+vi)du = \int_a^b f(u)\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}\cdot\psi(u,v)du = \varepsilon G\int_a^b \psi(u,v)du,$$

wo ε eine complexe Grösse, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, bezeichnet. Angenommen nun, es sei $\psi(x)$ so beschaffen, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty}\psi(u,v)du$$

für jeden Werth von v einen endlichen Werth hat, so erhalten, wenn a_1, a_2, b_1, b_2 positive Grössen sind, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, die Integrale

$$\int_{a_2}^{b_2}\psi(u,v)du, \quad \int_{-b_1}^{-a_1}\psi(u,v)du,$$

Digitized by Google

von denen das zweite $\left(\text{weil } \psi(-u, v) = \psi(u, v)\right)$ gleich

$$\int_{a_1}^{b_1} \psi(u, v)\, du$$

ist, beide unendlich kleine Werthe, wenn a_1, b_1 unendlich gross werden. Dasselbe gilt also, der vorstehenden Gleichung zufolge, für die Integrale

$$\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\psi(u+vi), \quad \int_{a_2}^{b_2} f(u)\psi(u+vi)\, du;$$

und es hat demnach das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi(u+vi)\, du$$

einen bestimmten endlichen Werth für jeden Werth von v.

Ich will ferner annehmen, es convergire das Integral

$$\int_{a_2}^{+\infty} \psi(u, v)\, dv,$$

wenn a_2 unendlich gross wird, für alle Werthe von v, deren absoluter Betrag einen beliebig festgesetzten Grenzwerth nicht übersteigt, gleichmässig gegen die Grenze Null, so gilt der Gleichung (1) zufolge dasselbe von dem Integral

$$\int_{a_2}^{+\infty} f(u)\psi(u+vi)\, du,$$

und ebenso, wenn a_1 unendlich gross wird, von

$$\int_{-\infty}^{-a_1} f(u)\psi(u+vi)\, du.$$

Es lassen sich also, wenn V, g gegebene positive Grössen sind, von denen V beliebig gross und g beliebig klein sein kann, immer zwei positive Grössen a_1, a_2 so bestimmen, dass der absolute Betrag der Differenz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi(u+vi)\, dv - \int_{-a_1}^{a_2} f(u)\psi(u+vi)\, du$$

für jeden der Bedingung

$$-V \leqq v \leqq V$$

entsprechenden Werth von v kleiner als g ist.

Nun sei $x = \xi + \xi' i$ eine complexe Veränderliche und, wie in der ersten Mittheilung, k eine positive Constante, $\omega = \int_0^{+\infty} \psi(u)\, du$. Dann ist also nach dem Vorstehenden das Integral

Digitized by Google

$$(1)\qquad \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi+ku)\,\psi\left(u-\frac{\xi' i}{k}\right)du=\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

eine für jeden endlichen Werth von x eindeutig definirte, endliche Grösse, die a. a. O. mit $F(x, k)$ bezeichnet worden ist.

Es muss nun nachgewiesen werden, dass $F(x, k)$ eine (transcendente) ganze Function von x ist.

Man setze für den absoluten Betrag von x eine obere Grenze r fest, so kann man, nach Annahme zweier beliebig kleinen positiven Grössen g', g'', zwei andere (a_1, a_2) bestimmen, für welche die Summe

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-a_1} f(\xi+ku)\,\psi\left(u-\frac{\xi' i}{k}\right)du+\frac{1}{2\omega}\int_{a_2}^{+\infty} f(\xi+ku)\,\psi\left(u-\frac{\xi' i}{k}\right)du$$

für alle der Bedingung

$$\xi^2+\xi'^2\leqq r^2$$

entsprechenden Werthe von ξ, ξ' kleiner als g' ist. Dann hat man

$$F(x, k)=\frac{1}{2k\omega}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du+\varepsilon' g',$$

wo ε' eine Grösse, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, bedeutet. Das Integral auf der Rechten dieser Gleichung lässt sich aber in eine beständig convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ entwickeln, und man kann, wenn die Summe der n ersten Glieder von $\frac{1}{2k\omega}\mathfrak{P}(x)$ mit $G^{(n)}(x)$ bezeichnet wird, n so gross annehmen, dass für jeden der Bedingung $|x|\leqq r$ entsprechenden Werth von x

$$|F(x, k)-G^{(n)}(x)|<g'+g''$$

ist.

Dies festgestellt, kann man ferner durch das zur Begründung des Satzes (C.) der ersten Mittheilung angewandte Verfahren zeigen, dass $F(x, k)$ sich darstellen lässt in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder ganze rationale Functionen von x sind, und dass diese Reihe für alle in irgend einem endlichen Bereiche enthaltenen Werthe von x gleichmässig convergirt. Man hat zu dem Ende zwei Reihen positiver Grössen

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$
$$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

so anzunehmen, dass $\operatorname{Lim}_{n=\infty} r_n=\infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ einen endlichen Werth hat, sodann eine Reihe von ganzen rationalen Functionen $G_1(x), G_2(x), G_3(x), \ldots$ so zu bestimmen, dass für jeden der Bedingung $|x|\leqq r_\nu$ entsprechenden Werth von x

$$(2)\qquad |F(x, k)-G_\nu(x)|<g_\nu \qquad (\nu=1, 2, \ldots\infty)$$

ist, und

Digitized by Google

$$(4) \qquad f_0(x) = G_1(x)\,,\; f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x)$$

zu setzen; dann ist

$$(5) \qquad F(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x).$$

Nach einem Satze aber, den ich früher (Monatsberichte der Akademie aus dem Jahre 1880, S. 723) in elementarer Weise bewiesen habe, kann man die Reihe auf der Rechten dieser Gleichung, weil sie in jedem endlichen Bereiche gleichmässig convergirt, in eine für jeden endlichen Werth von x convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ verwandeln.

Nimmt man

$$\psi(x) = e^{-x^2},$$

so ist

$$\psi(u, v) = e^{-u^2+v^2},$$

und diese Function $\psi(u, v)$ hat die im Vorstehenden angenommene Beschaffenheit. Dasselbe ist der Fall, wenn man

$$\psi(x) = e^{-(c_1 x^2 + c_2 x^4 + \ldots + c_\varrho x^{2\varrho})}$$

setzt und der Constante c_ϱ einen positiven Werth giebt, während $c_1, \ldots c_{\varrho-1}$ beliebige reelle Werthe haben können.

Es existiren also in der That, wie in der ersten Mittheilung bei Begründung des Satzes (A.) angegeben worden ist, unzählige Functionen $\psi(x)$ von der Beschaffenheit, dass die zugehörigen Functionen $F(x, k)$ transcendente ganze Functionen sind.

Jetzt bedeute $F(x, k)$ irgend eine bestimmte von diesen Functionen, so lässt sich die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, durch welche dieselbe dargestellt werden kann, in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende, ebenfalls für jeden endlichen Werth von x convergirende Reihe verwandeln. Aus dem bekannten Satze des Hrn. C. Neumann, betreffend die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen x nach den Kugelfunctionen erster Art, ergiebt sich nämlich unmittelbar, dass jede (transcendente oder rationale) ganze Function $G(x)$ dargestellt werden kann durch eine für jeden endlichen Werth von x convergirende Reihe von der Form

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu P^{(\nu)}(x).^1$$

---

[1] Dies lässt sich übrigens auch folgendermaassen beweisen. Aus der Definition der Kugelfunctionen ergiebt sich:

$$|P^{(n)}(x)| \leqq |x + \sqrt{x^2 - 1}|^n,$$

wenn man $\sqrt{x^2-1}$ so bestimmt, dass $|x + \sqrt{x^2-1}| \geqq 1$ ist. Ferner ist

$$x^n = c_{n,0} P^{(n)} x + c_{n,1} P^{(n-2)}(x) + \ldots,$$

Digitized by Google

Die Coefficienten dieser Reihe sind so beschaffen, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |C_\nu| r^\nu$$

für jeden positiven Werth r einen endlichen Werth hat. Ferner ist die Reihe für alle einem endlichen Bereiche angehörigen Werthe von x gleichmässig convergent. (Vergl. die Abhandlung des Hrn. THOMÉ: Über die Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten, BORCHARDT's Journal, B. 66, S. 337). Auf der letzteren Eigenschaft der Reihe beruht es, dass man

$$\int_{-1}^{+1} G(x') P^{(\mu)}(x')\, dx' = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \int_{-1}^{+1} P^{(\mu)}(x') P^{(\nu)}(x')\, dx'$$

hat, wo x' eine reelle Veränderliche bezeichnet; woraus sich

$$C_\mu = \frac{2\mu+1}{2} \int_{-1}^{+1} G(x') P^{(\mu)}(x')\, dx' \qquad (\mu = 0, 1, \ldots \infty)$$

ergiebt.

Für die Function $F(x, k)$ hat man also

$$C_\nu = \frac{2\nu+1}{2} + \frac{1}{2k\omega} \int_{-1}^{+1} P^{(\nu)}(x')\, dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du$$

$$= \frac{2\nu+1}{4\omega} \int_{-1}^{+1} P^{(\nu)}(x') \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku)\, \psi(u)\, du,$$

woraus man, wenn

$$\frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x'+u) P^{(\nu)}(x')\, dx' = f_\nu(u)$$

---

und somit, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

eine beständig convergirende Potenzreihe von x ist,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_n \sum_\nu A_n c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x).$$

Es sind aber die $c_{n,\nu}$ sämmtlich positive Grössen und $\sum_\nu c_{n,\nu} = 1$; also ist

$$\sum_\nu |c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x)| \leqq |x + \sqrt{x^2-1}|^n.$$

Daraus folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_\nu |A_n c_{n,\nu} P^{(n)}(x)|$ eine endliche Grösse ist, und daher wenn (für $\mu = 0, 1, 2 \ldots \infty$)

$$C_\mu = \sum_{n,\nu} c_{n,\nu} A_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\mu+2\nu,\nu} A_{\mu+2\nu}$$
$$(n - 2\nu = \mu)$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = C_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu P^{(\mu)}(x)$$

besteht.

Digitized by Google

gesetzt wird,

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du$$

erhält.

Die Function $f_\nu(u)$ ist ebenso wie $f(u)$ eine durchweg stetige Function, deren absoluter Betrag höchstens gleich $(2\nu+1)\,G$ werden kann, da der absolute Betrag von $P^{(\nu)}(x')$ für die dem Intervalle $(-1\ldots+1)$ angehörigen Werthe von x' nicht grösser als 1 wird. Es ist aber, wenn a eine beliebige positive Grösse ist

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a} f_\nu(ku)\,\psi(u)du + \frac{1}{2\omega}\int_{a}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)du + \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)du$$

$$= \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a} f_\nu(ku)\,\psi(u)du$$

$$+ \frac{1}{2\omega} f_\nu(ka\ldots+\infty)\int_{a}^{+\infty}\psi(u)du + \frac{1}{2\omega} f_\nu(-\infty\ldots-ka)\int_{-\infty}^{-a}\psi(u)du;$$

wenn man daher k unendlich klein werden lässt, so bekommt man

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} \cdot C_\nu = f_\nu(0)\cdot\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}\psi(u)du + \ldots,$$

wo die weggelassenen Glieder auf der Rechten unendlich kleine Werthe erhalten, wenn a unendlich gross wird. Da man nun a beliebig gross annehmen darf, so ergiebt sich

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} \cdot C_\nu = f_\nu(0) = \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,P^{(\nu)}(x)\,dx.$$

Setzt man

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du = \phi_\nu(k),$$

und versteht unter δ eine kleine reelle Grösse, so ist

$$\phi_\nu(k+\delta) - \phi_\nu(k) = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}\left(f_\nu(ku+\delta u) - f_\nu(ku)\right)\psi(u)\,du + \ldots,$$

wo wieder die fortgelassenen Glieder auf der Rechten beliebig kleine Werthe erhalten, wenn a gross genug angenommen wird. Ist daher δ_1 eine gegebene, beliebig kleine Grösse, so kann man dem a einen bestimmten Werth beilegen, für welchen

$$\phi_\nu(k+\delta) - \phi_\nu(k) = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}\left(f_\nu(ku+\delta u) - f_\nu(ku)\right)\psi(u)\,du$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als δ_1 ist, und zwar bei beliebigen Werthen von k, δ. Dann lässt sich ferner, wenn δ_2 eine zweite, beliebig

Digitized by Google

anzunehmende kleine Grösse ist, für den absoluten Betrag von δ eine obere Grenze δ' so festsetzen, dass

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als δ_2 und somit

$$|\phi_\nu(k+\delta)-\phi_\nu(k)|<\delta_1+\delta_2$$

ist, wenn $|\delta|<\delta'$. Es ist also $\phi_\nu(k)$ eine stetige Function von k.

Hiermit ist also bewiesen:

»Ist $\psi(x)$ eine Function von der oben angegebenen Beschaffenheit, und

$$F(x,k)=\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

so hat man für jeden endlichen complexen Werth von x

$$F(x,k)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\phi_\nu(k)\,P^{(\nu)}(x), \tag{6}$$

wenn

$$\begin{cases} f_\nu(u)=\dfrac{2\nu+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(x'+u)\,P^{(\nu)}(x')\,dx', \\ \phi_\nu(k)=\dfrac{1}{2\omega}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \end{cases} \tag{7}$$

gesetzt wird; und es sind dann die $\phi_\nu(k)$ stetige Functionen von k.«

Jetzt werde unter x wieder eine reelle Veränderliche verstanden, so dass

$$f(x)=\operatorname{Lim}_{k=0}F(x,k)$$

ist. Wird dann x auf das Intervall

$$-a\leqq x\leqq a$$

beschränkt, wo a eine beliebige positive Grösse bedeutet, so kann man, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g', zunächst dem Parameter k einen bestimmten Werth k' beilegen, für welchen

$$|f(x)-F(x,k')|<g'$$

ist. Bezeichnet man ferner mit R den grössten Werth, den der absolute Betrag der Grösse

$$\sqrt{x^2-1}+x$$

für die jetzt betrachteten Werthe von x erhalten kann, so hat man

$$R=\begin{cases}1, & \text{wenn } a\leqq 1,\\ a+\sqrt{a^2-1}, & \text{wenn } a>1,\end{cases}$$

und es ist daher, wie schon bemerkt,

$$|P^{(\nu)}(x)|\leqq R^\nu.$$

Digitized by Google

Da nun die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\phi_\nu(k')| R^\nu$$

einen endlichen Werth hat, so ist es, nach Annahme einer zweiten positiven Grösse g'', immer möglich, eine ganze positive Zahl n zu ermitteln, für welche der absolute Betrag von

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \phi_\nu(k') P^{(\nu)}(x)$$

kleiner als g'' ist. Setzt man also

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{n} \phi_\nu(k) P^{(\nu)}(x), \tag{8}$$

so ist

$$|f(x) - G^{(n)}(x, k')| < g' + g''.$$

Hiernach lässt sich der Satz (B.) meiner ersten Mittheilung folgendermaassen aussprechen:

»Es seien a, g positive Grössen, von denen die erste beliebig gross und die andere beliebig klein angenommen werden kann, so ist es immer möglich, in dem durch die vorstehende Gleichung definirten Ausdruck $G^{(n)}(x, k)$, der eine ganze rationale Function $n$ten Grades von x ist, dem Parameter k und der Zahl n solche Werthe zu geben, dass für die dem Intervall $(-a \ldots a)$ angehörigen Werthe von x die Differenz zwischen

$$f(x) \text{ und } G^{(n)}(x, k)$$

ihrem absoluten Betrage nach eine vorgeschriebene Grenze, die beliebig klein angenommen werden kann, nicht überschreitet.«

Der im Vorstehenden entwickelte Ausdruck der Function $F(x, k)$ hat vor der Darstellung derselben in Gestalt einer Potenzreihe den wesentlichen Vorzug, dass die Coefficienten des ersteren — die $\phi_\nu(k)$ — in einer Form sich darstellen, welche erkennen lässt, dass dieselben stetige Functionen der Grösse k sind, und dass es für jeden einzelnen Coefficienten eine Grenze giebt, welche sein absoluter Betrag für keinen Werth von k überschreitet, während zugleich, für jeden bestimmten Werth von k, $\operatorname{Lim}_{\nu=\infty} \cdot \phi_\nu(k) = 0$ ist.

Damit ist der Übelstand beseitigt, welcher sich, wie am Schlusse meiner ersten Mittheilung hervorgehoben worden ist, herausstellt, wenn man die im Satze (B.) vorkommende Function $G(x)$ so definirt, wie es dort geschehen ist.

Es ist bisher in Betreff der Function $f(x)$ angenommen worden, dass der absolute Betrag derselben eine endliche obere Grenze habe. Diese Annahme kann man fallen lassen, wenn es sich bloss darum

Digitized by Google

handelt, eine ganze rationale Function $G(x)$ zu bestimmen, welche sich in einem gegebenen endlichen Intervall $(x_1 \ldots x_2)$ der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass der absolute Betrag der Differenz $f(x) - G(x)$ für jeden Werth von x unter einer beliebig festgesetzten Grenze g liegt.

In der That, definirt man eine Function $f_1(x)$, indem man festsetzt, es solle

$$f_1(x) = f(x_1) \text{ sein, wenn } x < x_1,$$
$$f_1(x) = f(x), \text{ wenn } x_1 \leqq x \leqq x_1,$$
$$f_1(x) = f(x_2), \text{ wenn } x > x_2,$$

so ist $f_1(x)$ so beschaffen, wie bisher von der Function $f(x)$ angenommen worden ist, und man kann demnach eine Function $G(x)$ so bestimmen, dass für jeden in dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ enthaltenen Werth von x

$$|f_1(x) - G(x)| < g,$$

und somit auch

$$|f(x) - G(x)| < g$$

ist.

Nun ist bei dem in der ersten Mittheilung gegebenen Beweise des Satzes (C.) von der Function $f(x)$ nur vorausgesetzt worden, dass es nach beliebiger Annahme zweier positiven Grössen a_ν, g_ν möglich sei, eine ganze rationale Function $G_\nu(x)$ herzustellen, für welche

$$|f(x) - G_\nu(x)| < g \text{ ist, wenn } -a_\nu \leqq x \leqq a_\nu;$$

und es gilt also der in Rede stehende Satz in unveränderter Fassung, wenn von der Function $f(x)$ nur angenommen wird, dass sie für jeden endlichen reellen Werth von x einen bestimmten endlichen und mit x stetig sich ändernden Werth habe.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen, welche Modificationen die bisher entwickelten Sätze erleiden, wenn man auch die Annahme, dass $f(x)$ eine durchweg stetige Function sei, fallen lässt. Damit beabsichtige ich in einer folgenden Abhandlung mich zu beschäftigen. Darauf wird dann die Untersuchung auch auf eindeutige Functionen von mehreren reellen Argumenten auszudehnen sein, was für durchweg stetige Functionen keine Schwierigkeit hat.

Ich will jetzt annehmen, es sei $f(x)$ eine periodische Function, d. h. sie ändere ihren Werth nicht, wenn ihr Argument um eine bestimmte positive Grösse $2c$ vermehrt wird. Dann lässt sich die zugehörige Function $F(x, k)$ auch darstellen in der Form einer für jeden complexen Werth von x convergirenden FOURIER'schen Reihe, deren Coefficienten stetige Functionen der Grösse k sind.

Digitized by Google

Aus der obigen Gleichung (1) ergiebt sich:

$$F(x + 2c, k) = F(x, k);$$

setzt man also, unter z eine neue complexe Veränderliche verstehend,

$$\bar{F}(z) = F\left(\frac{c}{\pi i}\log z, k\right),$$

so ist $\bar{F}(z)$ eine eindeutige analytische Function von z, für welche im ganzen Gebiete dieser Grösse nur zwei singuläre Stellen, nämlich o und ∞ existiren, und die daher in eine beständig convergirende Reihe von der Form

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu z^\nu$$

entwickelt werden kann. Setzt man $z = e^{\frac{\pi x}{c} i}$, so wird $\bar{F}(z) = F(x, k)$, und es ist demnach

$$F(x, k) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu e^{\frac{\nu\pi x}{c} i}$$

für jeden endlichen Werth von x.

Da diese Entwickelung von $F(x, k)$ in jedem endlichen Bereiche der Veränderlichen x gleichmässig convergirt, so ist, wenn man mit x' wieder eine reelle Veränderliche und mit n eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x', k)\, e^{-\frac{n\pi x'}{c} i}\, dx' = \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu \int_{-c}^{c} e^{\frac{(\nu-n)\pi x'}{c} i}\, dx' = C_n.$$

Man hat also

$$\begin{aligned} 2c\, C_n &= \frac{1}{2k\omega}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{n\pi x'}{c} i}\, dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u - x'}{k}\right) du \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{n\pi x'}{c} i}\, dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x' + ku)\, \psi(u)\, du \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\, e^{-\frac{nku\pi}{c} i}\, du \int_{-c}^{c} f(x' + ku)\, e^{-\frac{n\pi}{c}(x' + ku) i}\, dx'. \end{aligned}$$

Nun hat man aber, wenn man

$$f_1(x') = f(x')\, e^{-\frac{n\pi x'}{c} i}$$

setzt, und unter x_0 eine von x' unabhängige Grösse versteht,

$$\begin{aligned} \int_{-c}^{c} f_1(x')\, dx' &= \int_{-c}^{x_0 - c} f_1(x')\, dx' + \int_{x_0 - c}^{c} f_1(x')\, dx' = \int_{x_0 - c}^{c} f_1(x')\, dx' + \int_{-c}^{x_0 - c} f_1(x' + 2c)\, dx' \\ &= \int_{x_0 - c}^{c} f_1(x')\, dx' + \int_{c}^{x_0 + c} f_1(x')\, dx' = \int_{x_0 - c}^{x_0 + c} f_1(x')\, dx' = \int_{-c}^{c} f_1(x' + x_0)\, dx'; \end{aligned}$$

es ist also

Digitized by Google

$$\int_{-c}^{c} f(x'+ku)\, e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku)i}\, dx' = \int_{-c}^{c} f(x')\, e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}\, dx',$$

und somit, wenn man, unter v eine beliebige reelle Grösse verstehend,

$$(9) \qquad \phi(v) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\, e^{-uvi}\, du = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{\infty} \psi(u)\cos(vu)\, du$$

setzt:

$$(10) \qquad C_n = \phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\int_{-c}^{c} \frac{1}{2c} f(x')\, e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}\, dx'.$$

Setzt man

$$(11) \quad A_n = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\cos\frac{n\pi}{c}x'\, dx',\ A_n' = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\sin\frac{n\pi}{c}x'\, dx',$$

so ist

$$(12) \qquad C_n = (A_n - iA_n')\,\phi\left(\frac{n\pi k}{c}\right)$$

und somit

$$(13) \quad F(x,k) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\cdot\left(A_n\cos\frac{n\pi}{c}x + A_n'\sin\frac{n\pi}{c}x\right).$$

Nach der vorstehenden Formel ist $\phi(v)$ eine stetige Function von v, die für $v = 0$ den Werth 1 annimmt.

Setzt man in dem Ausdrucke auf der Rechten der vorstehenden Gleichung $k = 0$, so reducirt er sich auf

$$A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{c}x + A_n'\sin\frac{n\pi}{c}x\right),$$

d. h. er geht in die Reihe über, in welche sich die Function $f(x)$ im Allgemeinen — d. h. wenn man von speciellen, bisher noch nicht hinreichend charakterisirten Functionen absieht — nach dem FOURIER'schen Theorem entwickeln lässt. Da aber, wie zuerst Hr. P. DU BOIS-REYMOND an einem Beispiele nachgewiesen hat, in der That Functionen $f(x)$ existiren, welche für gewisse Werthe von x, die sogar in jedem noch so kleinen Intervall $(x_1 \ldots x_2)$ in unendlicher Anzahl vorhanden sein können, durch die vorstehende Reihe nicht dargestellt werden, so ist damit dargethan, dass man, um die Grenze zu bestimmen, der sich die Reihe auf der Rechten der Gleichung (13) nähert, wenn k unendlich klein wird, nicht unbedingt in jedem einzelnen Gliede der Reihe $k = 0$ setzen darf.

Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n z^n$ convergirt, wie gezeigt worden ist, für jeden Werth von z, mit Ausnahme der beiden Werthe $0, \infty$. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$$

convergirt also für jeden endlichen Werth von z.

Digitized by Google

Nimmt man nun z. B.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n_2} \cos\left(\frac{n\pi}{c} x\right),$$

so ist

$$A_n = \frac{1}{n^2}, \; A'_n = 0$$

und daher

$$C_n = \frac{1}{n^2} \phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right);$$

daraus folgt, dass auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right) z^n$$

für jeden endlichen Werth von z convergirt.

Setzt man also

$$\chi(x; v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \phi(nv) e^{nxi}, \tag{14}$$

so ist $\chi(x; v)$ eine für jeden endlichen complexen Werth von x und für jeden reellen Werth von v definirte eindeutige analytische Function, für welche sich auch, da $\phi(-v) = \phi(v)$ ist, der Ausdruck

$$\chi(x; v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \phi(nv) \cos nx = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \phi(nv) \cos nx \tag{15}$$

ergiebt; und es lässt sich dann die Function $F(x, k)$ folgendermaassen ausdrücken:

$$F(x, k) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x - x'}{c} \pi; \frac{k\pi}{c}\right) dx'. \tag{16}$$

Jetzt seien wieder g', g'' gegebene positive Grössen von beliebiger Kleinheit, und k' ein bestimmter Werth von k, der so anzunehmen ist, dass

$$|f(x) - F(x, k')|$$

für jeden reellen Werth von x kleiner als g' ist. Bestimmt man dann eine ganze positive Zahl n so, dass der absolute Betrag von

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \phi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu \cos\frac{\nu\pi}{c} x + A'_\nu \sin\frac{\nu\pi}{c} x\right)$$

für jeden reellen Werth von x kleiner als g'' ist, und setzt

$$f(x) = A_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{n} \phi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu \cos\frac{\nu\pi}{c} x + A'_\nu \sin\frac{\nu\pi}{c} x\right) + R_n, \tag{17}$$

so ist der absolute Betrag von R_n stets kleiner als $g' + g''$.

Digitized by Google

So ergiebt sich der Satz

D. »Ist $f(x)$ eine für jeden reellen Werth von x eindeutig definirte, durchweg stetige und reell-periodische Function, so lässt sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g, auf mannigfaltige Weise eine endliche FOURIER'sche Reihe herstellen, welche sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass der Unterschied zwischen beiden Functionen für keinen Werth von x mehr als g beträgt.«

Aus diesem Satze lässt sich dann durch das beim Beweise des Satzes (C.) angewandte Verfahren, wenn man unter den dortigen Functionen $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$, ... jetzt endliche FOURIER'sche Reihen versteht, welche dieselbe primitive Periode wie $f(x)$ haben, der folgende ableiten:

E. »Jede Function $f(x)$ von der unter (D.) angegebenen Beschaffenheit lässt sich, wenn $2c$ die primitive Periode derselben ist, darstellen in der Form einer Summe, deren Glieder sämmtlich endliche FOURIER'sche Reihen mit der Periode $2c$ sind. Diese Reihe convergirt unbedingt für jeden Werth von x und gleichmässig in jedem endlichen Intervalle.«

Um das Vorstehende durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, nehme ich

$$\psi(x) = e^{-x^2}.$$

Dann ist $2\omega = \sqrt{\pi}$ und

$$\phi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - uvi} du = \frac{e^{-\frac{v^2}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u + \frac{vi}{2}\right)^2} du = e^{-\frac{v^2}{4}}.$$

Daraus ergiebt sich

$$\chi(x; v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x, \tag{18}$$

also, wenn man

$$q = e^{-\frac{v^2}{4}} \tag{19}$$

setzt,

$$\chi(x; v) = \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, q\right), \tag{20}$$

wo $\vartheta_3(x, q)$ die JACOBI'sche Function

$$1 + 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \ldots$$

ist.

Hiernach hat man

$$F(x, k) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \vartheta_3\left(\frac{x - x'}{2c}\pi, q\right) dx', \text{ wo } q = e^{-\frac{k^2\pi^2}{4c^2}}. \tag{21}$$

Die Formel auf der rechten Seite dieser Gleichung kommt schon bei FOURIER vor (Théorie analytique de la chaleur, Chapitre X.). Um

Digitized by Google

den Temperaturzustand eines unendlich dünnen homogenen Ringes von der Länge $2c$, der keine Wärme ausstrahlt, für einen beliebigen Zeitpunkt anzugeben, wenn derselbe in irgend einem Momente bekannt ist, hat man eine Function ϕ von zwei reellen Veränderlichen x, t so zu bestimmen, dass dieselbe der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

genügt, wo μ eine positive Constante bedeutet, als Function von x betrachtet, die Periode $2c$ besitzt und für $t = 0$ in dem Intervalle

$$-c \leqq x \leqq c$$

einer gegebenen willkürlichen Function $F(x)$ gleich ist, wobei nur angenommen wird, dass $F(x)$ stetig und $F(-c) = F(c)$ sei.

Fourier findet für die so definirte Function ϕ den Ausdruck

$$(22) \qquad \phi = \frac{1}{2c} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_{-c}^{c} F(x') e^{-\frac{\nu^2 \mu \pi^2}{c^2} t} \cos\left(\nu \frac{x - x'}{c} \pi\right) dx'$$

$$= \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} F(x') \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2 \mu \pi^2}{c^2} t} \cos\left(\nu \frac{x - x'}{c} \pi\right) dx',$$

also

$$(23) \qquad \phi = F(x, k),$$

wenn man die Function $f(x)$ so bestimmt, dass sie in dem Intervalle $(-c \leqq x \leqq c)$ mit $F(x)$ übereinkommt, und

$$(24) \qquad k = 2\sqrt{\mu t}$$

nimmt. Fourier setzt, um zu beweisen, dass ϕ für $t = 0$ in dem Intervalle $(-c \leqq x \leqq c)$ gleich $F(x)$ sei, in den einzelnen Gliedern seines Ausdrucks $t = 0$, wodurch derselbe in die Reihe

$$\frac{1}{2c} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_{-c}^{c} F(x') \cos\left(\nu \frac{x - x'}{c} \pi\right) dx'$$

übergeht, von der er annahm, dass sie stets in dem angegebenen Intervall die Function $F(x)$ darstelle. Es verdient aber bemerkt zu werden, dass ungeachtet der Einwendungen, die gegen Fourier's Verfahren gemacht werden können, der aufgestellte Ausdruck der Function ϕ ausnahmslos richtig ist. Denn da derselbe, wie gezeigt worden ist, sich in $F(x, 2\sqrt{\mu t}$ umformen lässt, so ergiebt sich zunächst, ohne dass das Fourier'sche Theorem zu Hülfe genommen wird, dass

$$\lim_{t=0} \cdot \phi = F(x)$$

ist. Ferner genügen die einzelnen Glieder der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

Digitized by Google

woraus folgt, dass auch ϕ selbst ihr genügt, da die in Rede stehende Reihe eine eindeutige analytische Function von x und t ist, wenn man die Grösse t der Bedingung unterwirft, dass ihr reeller Bestandtheil positiv sein soll, und weil überdies die Reihe in jedem endlichen Bereiche der Grössen x, t gleichmässig convergirt. Endlich ändert die Reihe ihren Werth nicht, wenn $x + 2c$ für x gesetzt wird; es entspricht also die durch sie ausgedrückte Function vollständig den gestellten Bedingungen.

Es ist äusserst merkwürdig, dass bei einem Problem der mathematischen Physik für eine gesuchte, von zwei veränderlichen Grössen, die nach ihrer physikalischen Bedeutung nur reelle Werthe haben können, abhängige Function, welche für einen bestimmten Werth eines ihrer Argumente einer gegebenen willkürlichen Function des anderen gleich sein soll, ein Ausdruck sich ergiebt, der eine analytische Function der Veränderlichen ist und somit auch für complexe Werthe der letzteren eine Bedeutung hat.

Es bedeute jetzt n eine ganze positive Zahl, und es werde gesetzt

$$\chi(x;v)_n = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x,$$

so ist nach Gleichung (18)

$$\chi(x;v) = \chi(x;v)_n + 2 \sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x.$$

Für reelle Werthe von x ist aber der absolute Betrag des zweiten Gliedes auf der Rechten dieser Gleichung, der mit R_n bezeichnet werde, niemals grösser als

$$2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2+2n\nu+\nu^2}{4} v^2},$$

also

$$R_n < e^{-\frac{n^2+2n}{4} v^2} \cdot 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}}.$$

Setzt man nun in der bekannten Gleichung

$$1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2 \tau \pi} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 \pi}{\tau}} \right);$$

wo unter τ eine positive Grösse zu verstehen ist, $\tau = \frac{v^2}{4\pi}$, so ergiebt sich, wenn v positiv ist,

$$2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{v} - 1 + \frac{4\sqrt{\pi}}{v} \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2 \pi^2}{v^2}};$$

es ist also

$$R_n < \frac{2\sqrt{\pi}}{v} e^{-\frac{(n+1)^2}{4} v^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{v}{2\sqrt{\pi}} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2 \pi^2}{v^2}} \right\} e^{\frac{v^2}{4}}.$$

Digitized by Google

Setzt man nun, unter m eine positive Grösse verstehend,

$$v = \frac{2\sqrt{m \log (n+1)}}{n+1}, \tag{25}$$

so ist

$$R_n < \frac{(n+1)^{-m+1}}{2\sqrt{m \log (n+1)}} \cdot \left(1 + [n]\right),$$

wo $[n]$ eine Grösse bedeutet, die für einen unendlich grossen Werth von n unendlich klein wird. Nimmt man also

$$m \geqq 1,$$

so wird

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \cdot R_n = 0.$$

Es ist aber dann

$$e^{-\frac{v^2}{4}} = e^{-\frac{m \log (n+1)}{(n+1)^2}} = (n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}},$$

also, wenn man

$$(n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}} \text{ mit } \{n\} \tag{26}$$

bezeichnet, und

$$\chi(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \{n\}^{\nu} \cos \nu x = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{n} \{n\}^{\nu} \cos \nu x \tag{27}$$

setzt:

$$\chi(x; v)_n = \chi(x, n).$$

Aus der Gleichung

$$F(x, k) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x - x'}{c} \pi ; \frac{k\pi}{c}\right) dx'$$

ergiebt sich dann

$$F\left(x, \frac{cv}{\pi}\right) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x-x'}{c} \pi ; v\right) dx' = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x-x'}{c} \pi , n\right) dx' + R_n',$$

wo auch R_n' eine Grösse bedeutet, die für einen unendlich grossen Werth von n unendlich klein wird. Da nun $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \cdot v = 0$ und $\operatorname*{Lim}_{v=0} \cdot F\left(x, \frac{cv}{\pi}\right) = f(x)$ ist, so ergiebt sich

$$f(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \cdot \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x-x'}{c} \pi , n\right) dx'. \tag{28}$$

Das Fourier'sche Theorem, präcise ausgedrückt, besagt, dass

$$f(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \cdot \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} f(x') \bar{\chi}\left(\frac{x-x'}{c} \pi , n\right) dx' \tag{29}$$

sei, wenn

$$\bar{\chi}(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \cos \nu x \tag{30}$$

Digitized by Google

gesetzt wird. An die Stelle dieser Gleichung, die nicht unter allen Umständen richtig ist, tritt also die vorhergehende, ausnahmslos geltende, in der die Function $\bar{\chi}(x, n)$ ersetzt ist durch eine andere, $\chi(x, n)$, welche gleich $\bar{\chi}(x, n)$ die Form

$$1 + 2(n, 1)\cos x + 2(n, 2)\cos 2x + \ldots + 2(n, n)\cos nx$$

hat, wo (n, ν) eine von n und ν abhangende positive Grösse bedeutet, die in $\bar{\chi}(x)$ sich auf die Einheit reducirt. Für jede bestimmte Zahl ν ist

$$\lim_{n=\infty} \cdot (n, \nu) = 1;$$

man kann also n so gross nehmen, dass die $(\nu + 1)$ ersten Glieder von $\chi(x, n)$ mit den entsprechenden Gliedern von $\bar{\chi}(x, n)$ so nahe übereinstimmen, wie man will.

Functionen $\chi(x, n)$ von derselben Form und Beschaffenheit, wie die hier betrachtete, für welche die Gleichung (28) ebenfalls unbedingte Gültigkeit hat, lassen sich auch aus der obigen Function $\chi(x; v)$, die aus einer beliebigen Function $\psi(u)$ entspringt, ableiten. Man kann immer eine von n abhängende positive Grösse r_n so bestimmen, dass die Differenz

$$\chi(x; v_n) - \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \phi(\nu v_n)\cos \nu x$$

gegen Null convergirt, wenn n ohne Ende wächst, und dann ist

$$(31) \qquad \chi(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \phi(\nu v_n)\cos \nu x = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \phi(\nu v_n)\cos \nu x$$

eine Function von der angegebenen Beschaffenheit.

Selbstverständlich soll damit nicht gesagt sein, dass man auf diese Weise alle Functionen der in Rede stehenden Art erhalte.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass die Gleichung (28) für die zwischen $-c$ und c liegenden Werthe von x, wie leicht zu beweisen ist, auch dann noch besteht, wenn unter $f(x)$ eine Function verstanden wird, welche in dem Intervalle von $x = -c$ bis $x = c$ eindeutig definirt und stetig ist, ohne dass $f(c) = f(-c)$ zu sein braucht. Für $x = \pm c$ ist dann auf der Linken der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\big(f(-c) + f(c)\big)$$

statt $f(\pm c)$ zu setzen.

Digitized by Google

Digitized by Google

38. Vorläufiger Bericht über die geognostische Beschaffenheit des Ost-Jordanlandes.

Von Hrn. F. Noetling.

(Vorgelegt von Hrn. Roth am 30. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 27. August.)

Haifa (in Syrien), 29. Mai 1885.

Das Ost-Jordanland, speciell das Gebiet des Djolân und nördlichen Adjlûns ist ein weites Tafelland, von tiefen und steilen Thälern zerschnitten, aber von sehr einförmiger geologischer Beschaffenheit, da die dort anstehenden Schichten, so weit sie sedimentären Ursprunges sind, ausschliesslich dem Senon angehören. Die Lagerungsverhältnisse sind einfacher Natur; abgesehen von localen Störungen und Rutschungen am westlichen Steilabfall gegen das Jordanthal hin, liegen die Schichten vollkommen horizontal. Die älteste im Wadi Aral aufgeschlossene Schicht ist ein tiefschwarzer, stark bituminöser Schiefer mit zahlreichen, aber schlecht erhaltenen Fischresten; eingelagert finden sich Hornsteinbänke und eine Schicht mit *Gryphaea vesicularis;* darüber folgen Hornsteinbänke, erfüllt mit den zerdrückten Schalen von *Baculites sp.*, die namentlich auf den Schichtflächen häufig sind. Über diesen lagert ein weicher, weisser oder hellgelblicher Kalk, welcher das Hauptglied der dortigen Kreideformation bildet und zahlreiche Feuersteinschnüre eingelagert hält. Den Schluss bildet eine Conglomeratbank, deren Gerölle aus Feuersteinen und Kreidebruchstücken bestehen, während basaltische Gerölle vollkommen fehlen.

Im nördlichen Theile des von mir untersuchten Gebietes, d. h. im eigentlichen Djolân, vom Hermon südwärts bis zum Yarmuk, wird die Kreide von mächtigen Lavaströmen überlagert, welche, den Krateren des nördlichen Djolân entstammend, zum Theil in die Thäler hinabgeflossen sind.

Das Yarmukthal lässt deutlich zwei Lavaströme erkennen. Der ältere, höher am Gehänge liegende Lavastrom, welcher im mittleren Laufe des Flusses beim Wadi Ezzeyyatin in's Thal fällt, wurde späterhin vom Flusse durchschnitten und somit Raum für den jüngeren Lavastrom geschaffen, welcher, das Wadi Rukkâd herabkommend, bei Sezun vom Plateau herabstürzt und eine leicht kenntliche, auffallende

Digitized by Google

Terrasse am Gehänge bildet. Dieser letztere Lavastrom überlagert die Geröllablagerungen des alten Yarmuk, welche genau dieselbe Fauna führen wie sie heute im Flusse lebt, nämlich zahlreiche Individuen eines *Melanopsis sp.* Durch diesen letzteren Lavastrom hat der Fluss das heutige Thal eingeschnitten, so dass die recente Bachsohle bereits tief in die unterlagernde Kreide eingegraben ist.

Daraus ergiebt sich, dass die Laven des Djolân frühestens postsenones Alter besitzen, die Eruptionen aber bis in jungtertiäre, wenn nicht gar bis in die diluviale Zeit hinein fortgedauert haben. Da aber das Vulkangebiet des Djolân in ununterbrochenem Zusammenhange mit dem des Haurân steht, und weder räumlich noch zeitlich von demselben zu trennen ist, so fallen die Eruptionen des gesammten batanäischen Vulkangebietes in das Tertiär, ja einzelnen Lavaergüssen muss diluviales, wenn nicht gar altalluviales Alter zugeschrieben werden.

In engem Zusammenhange mit den Eruptivgesteinen finden sich heisse Quellen, welche mächtige Absätze hinterliessen, zur Zeit aber nur noch im unteren Yarmukthale bei Hammi entspringen. Früher waren dieselben weiter verbreitet, wie die bedeutenden Quellabsätze im Wadi Arab und Wadi Zaḥar beweisen, wo jetzt nur kalte Quellen entspringen.

Im Jordanthal lagert ein feinblättrig geschichteter, stark salzhaltiger Mergel, der einzelne Geröllbänke führt, denen bemerkenswerther Weise Basaltgerölle fehlen. In diesen Geröllbänken fand sich eine Fauna, die in bemerkenswerther Weise mit derjenigen des Sees Tiberias übereinstimmt, doch aber auch davon abweicht. Es fanden sich *Melanopsis* zwei Arten, *Limnaea sp.* zwei Arten, *Neritina sp., Ancylus sp.,* selten sind *Helix sp. sp.* Dagegen fehlen die im heutigen See häufigen Zweischaler, wie *Unio sp.* und *Corbula sp.*

Digitized by Google

39. Das Wärmeleitungsvermögen der tropfbaren Flüssigkeiten.

Von Prof. H. F. Weber
in Zürich.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 30. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 27. August.)

Im Jahre 1879 beschrieb ich eine neue Methode zur absoluten Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit der tropfbaren Flüssigkeiten und benutzte dieselbe zur Ermittelung dieser Grösse für vierzehn verschiedene flüssige Substanzen. In dieser Methode ist die Wärmefortführung, jene bedeutende Fehlerquelle der bis dahin benutzten Methoden, principiell beseitigt und ist die Messung der Wärmeleitungsfähigkeit der Hauptsache nach auf die genaue Beobachtung einer rasch fallenden Temperatur zurückgeführt.

Die zu untersuchende Flüssigkeit wird in der Form einer sehr dünnen planparallelen Lamelle zwischen zwei horizontal stehende, gleichgrosse, aber ungleich dicke, flach cylindrische Scheiben von Kupfer höchster Wärmeleitungsfähigkeit gebracht und auf eine bestimmte, auch den Kupferplatten zukommende anfängliche Temperatur erwärmt. Von einem bestimmten Zeitpunkte an wird sodann die untere Kupferplatte auf eine gewisse niedere Temperatur abgekühlt und auf dieser Temperatur erhalten, während gleichzeitig das Plattensystem nach der Seite und nach oben hin von einer Hülle gleicher Temperatur eingeschlossen wird. Aus dem Gange, welchen die Temperatur in irgend einer Stelle der oberen Kupferplatte während der Abkühlung zeigt, lässt sich das absolute Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeitsschicht bestimmen, sobald die Dimensionen, die Massen und die specifischen Wärmen der einzelnen Theile des Plattensystems bekannt sind und ausserdem die Constante der äusseren Wärmeableitung für die obere Platte ermittelt worden ist. Die letztere Grösse braucht indessen nur angenähert bekannt zu sein, da dieselbe in dem Abkühlungsprocesse der oberen Platte nur eine ganz secundäre Rolle spielt, falls die Flüssigkeitslamelle sehr dünn genommen wird.

Aus den angestellten Messungen ergab sich das allgemeine Resultat, dass der Werth des Wärmeleitungsvermögens k der tropfbaren Flüssigkeiten durch die Form ausdrückbar ist:

$$k = \eta \cdot \rho \cdot c,$$

Digitized by Google

wo ρ die Dichte, c die specifische Wärme der Masseneinheit, $\rho \cdot c$ also die specifische Wärme der Einheit des Volumens bezeichnet und wo der Coefficient η eine von Flüssigkeit zu Flüssigkeit nur wenig variirende Grösse bedeutet. In Betreff der Natur dieser Grösse konnte aus jenen Beobachtungen nur das eine Resultat mit Bestimmtheit abgeleitet werden, dass diese Grösse von der Stärke des Coefficienten der inneren Reibung nur ausserordentlich wenig abhängig ist, denn Glycerin und Äther z. B. zeigten sehr wenig differirende Werthe dieser Grösse; welches aber diejenigen Eigenschaften der Flüssigkeiten sind, welche die Schwankungen des Werthes von η von Flüssigkeit zu Flüssigkeit bedingen, das konnte aus jenen Beobachtungen noch nicht abgeleitet werden.

Indessen hatte ich mir gleich von vorn herein das Ziel gesetzt, durch weitere Untersuchungen alle die Momente festzustellen, welche auf die Grösse des Coefficienten η von Einfluss sind.

Diese Untersuchungen habe ich innerhalb der letzten sechs Jahre in weitestem Umfange durchgeführt. Nach und nach habe ich fünfzig verschiedene, chemisch vollkommen definirte und möglichst reine Flüssigkeiten auf die Grösse ihrer Wärmeleitungsfähigkeit mittels der beschriebenen Methode untersucht. Gleichzeitig habe ich während dieser ganzen Zeit die benutzte Methode auf die Zuverlässigkeit ihrer Resultate in mannichfacher Weise geprüft, indem jedes abänderungsfähige Element der Versuchsmethode abgeändert wurde: es kamen drei, an Grösse sehr verschiedene, Apparate neben- und nach einander zur Anwendung, für alle untersuchten Flüssigkeiten wurden zwei bis drei verschiedene Lamellendicken (zwischen $\frac{1}{4}^{mm}$ und $1\frac{1}{2}^{mm}$ gelegen) benutzt und endlich wurde für jede Flüssigkeit der experimentelle Nachweis geführt, dass der gefundene Werth der Wärmeleitungsfähigkeit nicht durch Wärmefortführung gefälscht ist.

Bei dieser eingehenden Prüfung auf die Leistungsfähigkeit der Methode stellte sich heraus, dass die ersten Resultate der Methode vom Jahre 1879 noch ein wenig von Wärmefortführung beeinflusst waren, weil die eine der beiden dort zur Verwendung gekommenen Methoden der Abkühlung der unteren Platte, das Aufsetzen des Plattensystems auf eine Eisplatte, dem Plattensystem leicht eine schwach geneigte Stellung gab, welche Strömungen der Flüssigkeit entstehen liess, und weil auch die zweite Abkühlungsweise, die Abkühlung durch den Wasserstrahl der Wasserleitung, in dickeren Lamellen schwache Zitterungen hervorruft, welche Wärme von der oberen Platte zur unteren Platte führen. In den neuen Messungen wurde diese Wärmefortführung beseitigt, indem ausschliesslich Wasserkühlung zur Anwendung kam, die Lamellendicke viel kleiner als früher gewählt

Digitized by Google

wurde und die Stosswirkungen der kühlenden Wassermassen durch das Einkitten des Apparates in einen sehr massiven Steinpfeiler des Laboratoriums verschwindend klein gemacht wurden.

Die Kupferplatten der drei benutzten Apparate waren stark vergoldet.

Während der Ausführung dieser neuen Messungen hat meine Methode und die von mir beschriebene Handhabung dieser Methode einige Ausstellungen erfahren, zuerst von Seite des Hrn. LORBERG, sodann in neuerer Zeit von Seite des Hrn. GRÄTZ. Ich werde diese Ausstellungen in den Abhandlungen, welche mein gesammtes Versuchsmaterial und die Verarbeitung dieses Materials zur Ableitung der Endresultate nächstens bringen werden, ausführlich besprechen und darlegen, dass die Mängel, welche diese Herren meiner Methode zuschreiben, theils nicht bestehen, theils ausserordentlich kleine Grössen betreffen, welche vorläufig so lange ausser Betracht gelassen werden können, als nicht die Grösse der Wärmeleitungsfähigkeit bis auf kleine Bruchtheile eines Procentes genau ermittelt werden soll. Eine so hoch gesteckte Genauigkeit dürfte aber schwerlich jemals in sicherer Weise erreicht werden. Mich dünkt, es ist schon ein erheblicher Fortschritt auf diesem schwierigen Experimentalgebiete erreicht, wenn die Grösse der Wärmeleitungsfähigkeit der Flüssigkeiten bis auf 1 Procent ermittelt ist. Diese Genauigkeit glaube ich nach jahrelanger Handhabung und Vervollkommnung meiner Methode erreicht zu haben. An derselben Stelle behalte ich mir vor, die Einwürfe vorzutragen, welche ich gegen die neue Methode von Hrn. GRÄTZ zu machen habe.

Zur Ermittelung der Natur des oben genannten Coefficienten η ging ich in den neuen Messungen von der Untersuchung des Wärmeleitungsvermögens analog constituirter Flüssigkeiten aus. Ich untersuchte zunächst während der Jahre 1880 bis 1883 die Gruppe der Alkohole, die Gruppe der isomeren Ester und einige Glieder der Gruppe der fetten Säuren. Diese Untersuchung lieferte mir im Frühjahr 1883 das einfache Resultat, dass für diese Flüssigkeiten die Grösse des Coefficienten η in reciprokem Verhältniss zu der mittleren Distanz benachbarter Flüssigkeitsmolecüle steht. Als ich dieses Resultat der physikalischen Section der in Zürich tagenden schweizerischen naturforschenden Gesellschaft im August 1883 mittheilte, konnte ich beifügen, dass auch alle bis dahin untersuchten Chloride diese Eigenschaft besitzen.

Die allgemeine Gültigkeit dieses Resultates war durch weitere Messungen zu prüfen. Nach und nach habe ich bis heute fünfzig verschiedene Flüssigkeiten einer eingehenden, vielfach wiederholten und ich darf sagen rigorosen Prüfung unterworfen; bisher habe ich überall Bestätigung dieses Resultates gefunden.

Digitized by Google

Mit der Erlangung dieses Resultates darf ich meine Untersuchungen über die Wärmeleitungsfähigkeit der Flüssigkeiten als einigermaassen abgeschlossen ansehen, obschon gerade durch die Gewinnung dieses einfachen Resultates weitere Fragen angeregt werden. Bevor ich alle die Einzelheiten über die Handhabung der Methode und über die Prüfung der Zuverlässigkeit der erhaltenen Resultate in einer Reihe von Abhandlungen darlege, erlaube ich mir, der Königl. Akademie die Gesammtheit der Resultate in gedrängter Kürze und tabellarisch geordnet vorzulegen.

In Betreff der Auslegung dieser Resultate habe ich hervorzuheben, dass sämmtliche gemessene Grössen auf Temperaturen Bezug haben, welche zwischen 9° und 15° liegen. Da ich zur Kühlung des Plattensystems das Wasser der Wasserleitung benutzte und die Messungen zu sehr verschiedenen Jahreszeiten anstellen musste, vermochte ich nicht alle die verschiedenen Flüssigkeiten bei einer und derselben Temperatur zu untersuchen; indessen beziehen sich alle Daten jeder einzelnen Flüssigkeit auf dieselbe Temperatur.

In den Columnen 1 bis 8 der folgenden Tabellen finden sich verzeichnet:

1. die untersuchte Flüssigkeit,
2. die chemische Constitution der Flüssigkeit,
3. die Dichte ρ,
4. ein relativer Werth für den mittleren Abstand zwischen benachbarten Flüssigkeitsmolecülen, welcher mit $\lambda : \sqrt[3]{\mu}$ bezeichnet ist und welcher sofort näher definirt werden soll,
5. die specifische Wärme der Masseneinheit c,
6. die specifische Wärme der Einheit des Volumens $\rho \cdot c$,
7. der absolute Werth der Wärmeleitungsfähigkeit k,

und endlich

8. die Grösse des Ausdrucks $\frac{k}{\rho c} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt[3]{\mu}}$.

Die Grösse des relativen Werthes des mittleren Abstandes benachbarter Flüssigkeitsmolecüle, welcher in der Columne 4 verzeichnet ist, wurde in der folgenden Weise gewonnen.

Es wurde angenommen, dass je ein Molecül der Flüssigkeit aus μ Molecülen des dampfförmigen Zustandes der flüssigen Substanz zusammengesetzt ist. Ist m die Masse je eines Molecüls der letzteren Kategorie, und bedeutet N die Anzahl der Molecüle des flüssigen Aggregatzustandes, welche im Volumen 1 enthalten sind, so gilt die Gleichung:

$$\rho = N \cdot \mu \cdot m.$$

Digitized by Google

Nehmen wir ausserdem an, es sei die Grösse des Raumes, in welchem im Durchschnitt je ein Molecül des flüssigen Aggregatzustandes anzutreffen ist durch den Ausdruck λ^3 gegeben, so gilt die weitere Gleichung:

$$1 = N \cdot \lambda^3.$$

Daraus folgt dann:

$$\lambda : \sqrt[3]{\mu} = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}.$$

Dies ist der Werth, welcher als relativer Ausdruck des mittleren Abstandes benachbarter Flüssigkeitsmolecüle in der Columne 4 aufgeführt ist.

Zur Ableitung der absoluten Werthe von k wurden die Einheiten: Gramm, Centimeter, Minute und 1° C gebraucht.

		ρ	$\lambda : \sqrt[3]{\mu}$	c	$\rho \cdot c$	k	$\frac{k}{\rho c} \frac{\lambda}{\sqrt[3]{\mu}}$
1. Substanzen verschiedener Natur.							
Wasser.....	H_2O	1.000	2.62	1.000	1.000	0.0816	0.214
Anilin.....	C_6H_7N	1.020	4.50	0.492	0.502	0.0245	0.213
Glycerin.....	$C_3H_8O_3$	1.251	4.19	0.610	0.763	0.0402	0.221
Äther.....	$C_4H_{10}O$	0.725	4.68	0.525	0.381	0.0182	0.223
2. Alkohole.							
Methylalkohol	CH_4O	0.804	3.41	0.605	0.486	0.0297	0.209
Äthylalkohol	C_2H_6O	0.798	3.86	0.584	0.466	0.0254	0.210
Propylalkohol.....	C_3H_8O	0.803	4.21	0.558	0.448	0.0224	0.211
Butylalkohol (iso-).	$C_4H_{10}O$	0.806	4.51	0.561	0.452	0.0204	0.204
Amylalkohol (Gährungs-)	$C_5H_{12}O$	0.824	4.74	0.546	0.450	0.0197	0.208
3. Fette Säuren.							
Ameisensäure	CH_2O_2	1.220	3.35	0.511	0.623	0.0389	0.209
Essigsäure	$C_2H_4O_2$	1.061	3.84	0.496	0.526	0.0283	0.207
Propionsäure	$C_3H_6O_2$	1.001	4.20	0.473	0.473	0.0234	0.208
Buttersäure, normale	$C_4H_8O_2$	0.969	4.49	0.472	0.457	0.0216	0.212
Isobuttersäure		0.958	4.51	0.460	0.441	0.0204	0.209
Valeriansäure, normale	$C_5H_{10}O_2$	0.948	4.76	0.470	0.445	0.0195	0.209
Isovaleriansäure...		0.940	4.77	0.454	0.427	0.0187	0.209
Isocapronsäure....	$C_6H_{12}O_2$	0.935	4.98	0.455	0.425	0.0179	0.210
4. Isomere Ester.							
Methylacetat	$C_3H_6O_2$	0.942	4.28	0.498	0.469	0.0231	0.211
Äthylformiat	$C_3H_6O_2$	0.934	4.29	0.497	0.464	0.0227	0.210
Äthylacetat	$C_4H_8O_2$	0.914	4.58	0.479	0.438	0.0209	0.218
Propylformiat	$C_4H_8O_2$	0.887	4.63	0.526	0.466	0.0214	0.212

Digitized by Google

		ρ	$\lambda : \sqrt[3]{\mu}$	c	$\rho \cdot c$	k	$\frac{k}{\rho c} \frac{\lambda}{\sqrt[3]{\mu}}$
4. Isomere Ester. (Fortsetzung).							
Propylacetat	$C_5H_{10}O_2$	0.899	4.84	0.475	0.427	0.0196	0.222
Methylbutyrat	$C_5H_{10}O_2$	0.914	4.81	0.480	0.439	0.0201	0.220
Äthylbutyrat	$C_6H_{12}O_2$	0.894	5.06	0.477	0.426	0.0191	0.226
Methylvalerat.....	$C_6H_{12}O_2$	0.897	5.06	0.482	0.432	0.0189	0.221
Äthylvalerat.....	$C_7H_{14}O_2$	0.880	5.29	0.500	0.440	0.0184	0.221
Amylacetat.....	$C_7H_{14}O_2$	0.877	5.29	0.496	0.435	0.0181	0.220
5. Chloride.							
Chlorbenzol	C_6H_5Cl	1.117	4.65	0.339	0.379	0.0181	0.222
Chloroform.....	$CHCl_3$	1.511	4.28	0.227	0.343	0.0173	0.216
Chlorkohlenstoff...	CCl_4	1.612	4.57	0.202	0.325	0.0151	0.212
Propylchlorid	C_3H_7Cl	0.902	4.43	0.395	0.356	0.0170	0.212
Isobutylchlorid	C_4H_9Cl	0.884	4.71	0.431	0.381	0.0167	0.206
Amylchlorid	$C_5H_{11}Cl$	0.876	4.95	0.445	0.390	0.0170	0.216
6. Bromide.							
Brombenzol	C_6H_5Br	1.504	4.70	0.239	0.359	0.0159	0.207
Äthylbromid.....	C_2H_5Br	1.453	4.22	0.210	0.305	0.0148	0.205
Propylbromid.....	C_3H_7Br	1.336	4.49	0.258	0.344	0.0154	0.201
Isobutylbromid....	C_4H_9Br	1.221	4.82	0.323	0.394	0.0167	0.204
Amylbromid.....	$C_5H_{11}Br$	1.218	4.99	0.286	0.348	0.0142	0.204
7. Jodide.							
Äthyljodid	C_2H_5J	1.931	4.32	0.158	0.305	0.0133	0.188
Propyljodid	C_3H_7J	1.760	4.59	0.182	0.320	0.0132	0.190
Isobutyljodid	C_4H_9J	1.622	4.84	0.201	0.326	0.0125	0.186
Amyljodid	$C_5H_{11}J$	1.489	5.06	0.222	0.330	0.0122	0.187
8. Kohlenwasserstoffe.							
Benzol	C_6H_6	0.887	4.44	0.418	0.371	0.0200	0.239
Toluol.....	C_7H_8	0.871	4.72	0.419	0.365	0.0184	0.238
Cymol.....	$C_{10}H_{14}$	0.871	5.36	0.437	0.381	0.0163	0.229
Terpentinöl	$C_{10}H_{16}$	0.870	5.39	0.430	0.374	0.0156	0.225
9. Sulfide.							
Schwefelsäure	H_2SO_4	1.831	3.77	0.348	0.637	0.0459	0.271
Schwefelkohlenstoff	CS_2	1.276	3.90	0.239	0.305	0.0206	0.263
Senföl.....	C_4H_5NS	1.017	4.60	0.392	0.399	0.0229	0.264
Äthylsulfid	$C_4H_{10}S$	0.826	4.78	0.433	0.357	0.0197	0.264

Aus diesen Resultaten geht hervor, das die Grösse $\frac{k}{\rho c} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt[3]{\mu}}$ für alle Flüssigkeiten ähnlichen Charakters den gleichen Werth hat. Derselbe beträgt für die Gruppe der Alkohole im Mittel 0.208, für die Gruppe

Digitized by Google

der fetten Säuren im Mittel 0 209, für die Gruppe der isomeren Ester im Mittel 0.218, für die untersuchten Chloride im Mittel 0.214, für die Gruppe der untersuchten Bromide 0.204, für die Gruppe der Jodide 0.188, für die vier untersuchten Kohlenwasserstoffe im Mittel 0.233 und endlich für die Gruppe der vier schwefelhaltigen Flüssigkeiten 0.265 im Mittel.

Der Mittelwerth, welchen die Gruppen (2) bis (7) für diese Grösse liefern, ist 0.210. Dieser Mittelwerth liegt in nächster Nähe derjenigen Werthe, welche die vier unter sich so verschiedenartigen Flüssigkeiten: Wasser, Anilin, Glycerin und Äther, die in der Gruppe (1) vereinigt stehen, für diese Grösse liefern: 0.214, 0.213, 0.221 und 0.213.

Mir scheint, es darf daraus mit grosser Wahrscheinlichkeit geschlossen werden, dass in allen diesen sechsundvierzig Flüssigkeiten der Gruppen (1) bis (8) gleichviel Molecüle des dampfförmigen Aggregatzustandes zu einem Flüssigkeitsmolecül vereinigt sind und dass mithin für alle diese Flüssigkeiten die Grösse der Wärmeleitungsfähigkeit als direct proportional der specifischen Wärme der Einheit des Volumens und als umgekehrt proportional der mittleren Distanz benachbarter Molecüle angesehen werden darf: $k = \frac{\rho \cdot c}{\lambda} \cdot (0.210 \sqrt[3]{\mu})$.

Auffallend anders ist das Verhalten der vier untersuchten Schwefelverbindungen; doch zeigt sich auch hier, analog dem Verhalten der Chloride, Bromide und Jodide, dass die Anwesenheit eines Schwefelatoms genügt, um den Werth von $\frac{k}{\rho \cdot c} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt[3]{\mu}}$ in allen vier Flüssigkeiten, trotz ihrer sonst so ausserordentlich verschiedenen physikalischen Eigenschaften, fast genau gleich gross zu machen. — Würde man annehmen, dass in diesen untersuchten flüssigen Schwefelverbindungen ein Molecül nur die Hälfte der Anzahl μ Molecüle des dampfförmigen Zustandes enthält, welche in den übrigen sechsundvierzig Flüssigkeiten zu einem Molecül vereinigt sind, so würde auch für diese Sulfide die Relation gelten:

$$k = \frac{\rho \cdot c}{\lambda} \cdot (0.210 \sqrt[3]{\mu}), \text{ da ja } \frac{0.265}{\sqrt[3]{2}} \text{ nahezu } 0.210 \text{ ist;}$$

es würde dann der Proportionalitätsfactor in dem Ausdrucke für k für alle Flüssigkeiten denselben Werth haben.

Die vorliegenden Resultate scheinen mir einen sicheren Ausgangspunkt zu liefern für die noch zu entwickelnde kinetische Theorie des tropfbarflüssigen Aggregatzustandes.

Digitized by Google

Digitized by Google

40. Über den Einfluss der ponderabeln Theile auf das gebeugte Licht.

Von W. Wien,
stud. phil.

Versuche im physikalischen Laboratorium der Berliner Universität ausgeführt.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 30. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 27. August.)

Seitdem durch die Untersuchungen von Stokes[1] die Polarisationsverhältnisse des gebeugten Lichtes theoretisch behandelt waren, sind vielfache Experimente zur Prüfung seiner Resultate angestellt worden. Diese ausschliesslich an Gittern ausgeführten Beobachtungen ergaben vielfach widersprechende Resultate, da durch die Gitter die Erscheinungen sehr complicirt werden. Auch haben bereits viele Beobachter[2] auf die Einflüsse der ponderabeln Theile der beugenden Öffnung hingewiesen, zumal die ausgedehnten Arbeiten von Quincke eine Abhängigkeit vom Material ergeben hatten.

Es schien daher zweckmässig, diese Einwirkungen durch Zurückführung auf die einfachsten Elemente zu untersuchen und es wurde deshalb der von Fresnel bei seinen ersten Untersuchungen angewandte einfache Beugungsschirm, um dessen scharfe Kante das Licht sich ausbreitet, ohne dass ihr eine zweite gegenübersteht, in Anwendung gebracht. Das gebeugte Licht zeigt sich dann als helle Lichtlinie von gleichmässig abnehmender Intensität. Um die Erscheinung möglichst weit in den Schatten des Schirms verfolgen zu können, musste sehr starke Intensität angewendet werden, und der Rand wurde deshalb in den Brennpunkt einer achromatischen Sammellinse von kurzer Brennweite gebracht und zugleich als Verlängerung der Drehungsaxe eines Goniometers befestigt.

Um von dem störenden Einfluss weiterer Linsen bewahrt zu sein, wurden für gewöhnlich die sämmtlichen Linsen des Beobachtungsfernrohrs herausgenommen und die Beobachtung mit blossem Auge an einem Nicol mit Positionskreis durch ein Diaphragma gemacht.

[1] Stokes, Cambridge Transact. 9. p. 1.
[2] Quincke, Pogg. Ann. 149. S. 273. — Fröhlich Wied. Ann. XV. S. 592 ff.

Digitized by Google

Das zunächst angewandte Material war Stahl, das in Form eines möglichst sorgfältig geschliffenen Messers in Anwendung gebracht wurde. Die Polarisationsverhältnisse wurden nach zwei Methoden untersucht. Erstens, indem natürliches Licht einfiel und das gebeugte mittels eines Kalkspaths in zwei parallel und senkrecht zur Schneide polarisirte Componenten zerlegt wurde, deren relative Intensität sich aus der Azimuthalstellung des auf gleiche Helligkeit beider Bilder eingestellten Nicols bestimmte. Zweitens fiel unter 45° polarisirtes Licht ein und es wurde dann einfach die Drehung der Polarisationsebene des gebeugten Lichtes gemessen. Beide Bestimmungen sind auf einander reducirbar und ergeben eine genügende Übereinstimmung. Das gebeugte Licht war fast vollständig linear polarisirt und zeigte eine völlig stetige Zunahme der Componente parallel der Schneide, wie die Theorie es verlangt.

Bei der Anwendung anderer Metalle zeigte sich nicht mehr diese einfache Erscheinung, sondern es tritt durch Einwirkung der materiellen Theile auf die unmittelbar an dem Rande vorübergehende Wellenbewegung starke Färbung des Lichtes ein, so dass das gebeugte Licht aus weissem und farbigem zusammengesetzt erscheint. Das Maximum der Färbung tritt ein, wenn das einfallende Licht parallel der Schneide polarisirt ist. Ist es senkrecht zu ihr polarisirt, so verschwindet die Färbung. Doch genügt dann eine Drehung des Polarisators um wenige Grade, um sie wieder hervorzurufen.

Die Farben selbst zeigten sehr verschiedene Nüancen. Bei Silber erschien tiefrothes Licht, das durch Abhaltung des weissen Lichts (durch entsprechende Stellung des Analysators) fast homogen erschien. Gold und Kupfer zeigten Orange, Platin schwach gelbes, Stanniol gelblich grünes, Nickel und Kobalt weisses Licht. Da die Erscheinungen jedenfalls mit der Absorption in naher Beziehung standen, so wurden sie mit dem von den betreffenden Metallen in dünnen Schichten durchgelassenen Lichte verglichen. Gold wurde als Blattgold angewandt, die übrigen nach chemischen Verfahren oder galvanisch niedergeschlagen. Die Färbung zeigte sich complementär der bei der Beugung auftretenden Farbe. Betrachtet man das gebeugte Licht durch eine solche Metallschicht, so sieht man nur die dem durchgelassenen Licht entsprechende Farbe, welche von dem weissen Licht herrührt. Dass die Farbe complementär der des durchgelassenen Lichtes sei, wurde noch an einigen anderen Stoffen bestätigt: so zeigte Jod gelbe Farbe bei blauem Licht in dünnen Schichten, Eisenglimmer Fe_2O_3 grünliches Licht während er schwach rothes durchlässt. Kobaltoxydul, das durch Glühen von galvanisch niedergeschlagenem Kobalt oder auch durch Calciniren einer aus metallischem Kobalt hergestellten

Digitized by Google

Schneide erhalten war, gab gelbes Licht, Kupferoxydul, das galvanisch aus Kupferoxyd auf einer Platinplatte reducirt war,[1] grünes Licht.

Dann wurden die Metalle, welche die Färbung des gebeugten Lichtes in besonders hohem Maasse zeigten: Silber, Gold, Kupfer galvanisch als dünne Überzüge anderer Metalle niedergeschlagen. Selbst ganz dünne Schichten riefen die Färbung hervor, sobald sie das untere Metall nicht mehr durchscheinen liessen.

Die sonst untersuchten Stoffe, namentlich die amorphen Metalloxyde und die Farbstoffe zeigten keine solche Erscheinungen, da sich kein guter, von Staubtheilen zu befreiender Rand aus ihnen darstellen lässt und auch bei den Farbstoffen die Durchsichtigkeit zu gross ist.

Das gefärbte Licht war stets parallel der Schneide polarisirt und die Färbung konnte also auch durch den Analysator ausgelöscht werden. Trennte man durch ein farbiges Glas das weisse Licht von dem gefärbten, so konnte man die Polarisationsverhältnisse des ersteren allein verfolgen. Dasselbe zeigte sich dann linear polarisirt und hatte dasselbe Verhalten bei allen Metallen, wie es beim Stahl beobachtet war. Bei den letzten Beobachtungen war das einfallende Licht im Azimuth 45° polarisirt.

Elliptische Polarisation liess sich bei diesen einzelnen Lichtarten nicht erkennen. Bei denjenigen Metallen, bei denen das gefärbte Licht nicht zu homogen ist, kann man eine Phasendifferenz zwischen der parallel und senkrecht zum Rande polarisirten Componente mit Hülfe des Compensators nachweisen, wenn man das Licht mit Hülfe eines rothen Glases homogen färbt.

Dies lässt sich auch durch eine BRAVAIS'sche Doppelplatte erkennen, welche bei Platin und Stanniol zeigt, dass die parallel dem Rande polarisirte Componente (welche die schwach gefärbte ist) gegen die andere verzögert ist. Zugleich zeigt sich mit wachsendem Beugungswinkel ein Zunehmen der Phasendifferenz. Bei Silber, Gold und Kupfer lässt sich die Platte nicht verwenden, weil neben dem starken gefärbten Licht der einen Componente, zu wenig gleichfarbiges in der anderen vorhanden ist.

Aus diesen Beobachtungen folgt, dass ein bedeutender Einfluss der materiellen Theile auf den Beugungsvorgang stattfindet, und dass alle Theorien, welche auf die Grenzbedingungen keine Rücksicht nehmen, mit der Erfahrung nicht in Übereinstimmung gelangen können.

[1] Vergl. WERNICKE Pogg. Ann. 139, p. 132.

Digitized by Google

Digitized by Google

41. Über die Sulfocyanursäure.

Von A. W. Hofmann.

(Vorgetragen am 23. Juli; — gedruckt im Bericht vom 30. Juli [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 27. August.)

Der leichte Übergang der normalen Cyansäureäther in Cyanursäureäther, welcher sich, wie O. Olshausen[1] und ich gezeigt haben, schon bei gewöhnlicher Temperatur vollzieht, hat mich schon vor einigen Jahren veranlasst zu versuchen, ob sich nicht auch die Sulfocyansäureäther in ähnlicher Weise umzubilden vermöchten, und es ist mir in der That gelungen, den Sulfocyansäuremethyläther durch mehrstündiges Erhitzen auf 180—185° in einen Sulfocyanursäuretrimethyläther überzuführen.[2]

Das gleichzeitige Auftreten von erheblichen Mengen von Methylsenföl in dieser Reaction liess es zunächst zweifelhaft erscheinen, ob der entstandene Äther die dem Würtz'schen Isocyanursäuremethyläther oder aber dem von Olshausen und mir[3] beschriebenen normalen Cyanursäuremethyläther entsprechende Schwefelverbindung sei. Der Versuch ergab aber alsbald unzweideutig, dass hier der geschwefelte normale, nicht der Isocyanursäureäther vorlag, denn die Einwirkung von Wasser (Salzsäure) bei erhöhter Temperatur lieferte keine Spur von Methylamin und Sulfokohlenoxyd (oder dessen Zersetzungsproducte Schwefelwasserstoff und Kohlensäure), sondern unter stürmischer Entwickelung von Methylmercaptan die gewöhnliche Cyanursäure. Mit dieser Auffassung des neuen Äthers war begreiflich auch der Gedanke gegeben, die bisher unbekannt gebliebene geschwefelte Cyanursäure zu gewinnen.

Was nun zunächst die Darstellung des Sulfocyansäuretrimethyläthers anbelangt, so kann ich im Allgemeinen auf das bereits früher Mitgetheilte verweisen, darf jedoch eine eigenthümliche, bei dieser Gelegenheit gemachte Beobachtung nicht unerwähnt lassen. Um durch Mangel an Material nicht im Laufe der Arbeit gestört zu werden, hatte ich Hrn. Dr. Bannow gebeten, mir eine grössere Menge Methylsulfocyanat darstellen zu lassen. Das mir schon nach kurzer Frist

[1] Olshausen und Hofmann, Monatsberichte 1870. 198.
[2] Hofmann, Monatsberichte 1880. 615.
[3] A. a. O.

Digitized by Google

übersendete Präparat siedete constant bei 132° und erwies sich von der vorzüglichen Reinheit, welche die aus den KAHLBAUM'schen Werkstätten hervorgehenden Substanzen auszuzeichnen pflegt. Aber dieses reine Schwefelcyanmethyl liess sich zu meinem grossen Erstaunen nicht in die polymere Sulfocyanursäureverbindung überführen. Indem man genau das früher beobachtete Verfahren und zumal die angegebenen Temperaturgrenzen einhielt, ja selbst als man stärker erhitzte, konnten höchstens Spuren der früher so leicht darstellbaren Materie gewonnen werden. Das Schwefelcyanmethyl hatte sich allerdings verändert; es war zum grossen Theil in Methylsenföl übergegangen, welches sich in der That nach ein- oder zweimaliger Rectification in Krystallen aus der Flüssigkeit ausschied, so dass dieser Process vielleicht für die Gewinnung von Methylsenföl verwerthbar ist. Das reine Schwefelcyanmethyl polymerisirt sich also nicht; es erlangt aber diese Fähigkeit augenblicklich, wenn man beim Beschicken der Digestionsröhren dem Äther einige Tropfen Salzsäure (auch Schwefelsäure) zufügt. Offenbar hatte man bei den früheren Versuchen einen nicht ganz reinen Äther verwendet.

Zur Reinigung wurde das rohe Digestionsproduct zunächst wie früher nach dem Auswaschen mit Alkohol aus Eisessig umkrystallisirt. Später fand man es zweckmässiger, das ausgewaschene und getrocknete Rohproduct alsbald im luftverdünnten Raume zu destilliren. Das Destillat, mit Alkohol gewaschen, ist für die meisten Zwecke rein genug. Auf diese Weise wurden bis zu 50 Procent der theoretischen Ausbeute erhalten. In ganz besonders reinen und schönen Krystallen vom Schmelzpunkte 189° gewinnt man die Verbindung, wenn man sie mit Alkohol im Einschlussrohr auf 120° erhitzt und das Rohr langsam erkalten lässt.

Die Eigenschaften des sulfocyanursauren Methyläthers anlangend will ich noch bemerken, dass er sich ohne Veränderung mit Wasser unter Druck auf 180° erhitzen lässt; bei 220° tritt ein schwacher Mercaptangeruch auf. Mit concentrirter Salzsäure spaltet er sich schon bei 100° vollständig in Methylmercaptan und Cyanursäure.

Concentrirte Salpetersäure zerlegt den Äther vollständig; unter Abscheidung von Cyanursäure bildet sich dieselbe Methylsulfonsäure, welche J. S. MUSPRATT[1] durch Behandlung von Sulfocyanmethyl mit Oxydationsmitteln erhalten hat. Das aus so gewonnener Säure dargestellte Bariumsalz gab bei der Analyse 41.58 Procent Barium; der Formel

$$(CH_3SO_3)_2Ba$$

entsprechen 41.89 Procent.

[1] MUSPRATT, LIEB. Ann. LXV. 259.

Digitized by Google

Nach den im Vorstehenden verzeichneten neuen Erfahrungen über die Polymerisation des Methylsulfocyanats hat man begreiflich auch versucht, die entsprechende Aethyl- und Amylverbindung in ähnlicher Weise umzubilden. Beide liefern in der That in Gegenwart minimaler Mengen von Säure bei einer Temperatur von 190° die polymeren Äther. Dieselben sind hochsiedende Flüssigkeiten, welche überdies nur in geringer Quantität entstehen. Die Versuche wurden nicht in hinreichendem Maassstabe angestellt, um die gebildeten Producte im reinen Zustande zu gewinnen. Dass hier aber in der That sulfocyanursaure Äther vorlagen, ergab sich unzweideutig, als diese Flüssigkeiten, mit Salzsäure eingeschlossen, auf 180° erhitzt wurden; unter Abspaltung von Cyanursäure wurden Aethyl- und Amylmercaptan in Freiheit gesetzt. Der Sulfocyansäuremethyläther wird unter diesen Umständen in Methylmercaptan, Ammoniak, Kohlensäure und Schwefelwasserstoff gespalten.[1]

Darstellung der Sulfocyanursäure.

Um die Sulfocyanursäure aus dem Methyläther abzuscheiden, wurde derselbe mit Natriumsulfid gemischt und in geschlossenen Röhren drei bis vier Stunden lang einer Temperatur von etwa 250° ausgesetzt. Das zu diesem Versuche verwendete Natriumsulfid war zum Theil durch Eindampfen einer Mischung von 1 Volum Natronlauge mit 1 Volum derselben Lauge, welche mit Schwefelwasserstoff gesättigt war, zum Theil durch Erhitzen von Natriumhydroxyd in einem Strom von Schwefelwasserstoff dargestellt worden. Da sich das nach beiden Verfahren erzeugte Product gleich brauchbar erwiesen hat, so ist in späteren Darstellungen stets das nach dem ersten Verfahren erhaltene Praeparat zur Anwendung gekommen. Das auf die eine oder die andere Weise gewonnene Sulfid muss, da es äusserst hygroskopisch ist, schnell gepulvert und in geschlossenen Flaschen aufbewahrt werden.

Nach der Gleichung

$$\left[C\begin{matrix}\diagup SCH_3\\ \equiv N\end{matrix}\right]_3 + 3\,Na_2S = \left[C\begin{matrix}\diagup SNa\\ \equiv N\end{matrix}\right]_3 + 3\,NaSCH_3$$

sollte man auf 10 Gew.-Thle. Äther etwa 11 Gew.-Thle. Natriumsulfid in Anwendung bringen; da letzteres aber stets durch die Einwirkung der Luft beim Eindampfen schon theilweise oxydirt ist, so hat man bei Ausführung des Versuches auf 10^g Äther gewöhnlich 15^g Natriumsulfid einwirken lassen. Der Inhalt der Röhren ist scheinbar unver-

[1] Vergl. auch HOFMANN, Monatsberichte 1868. 480.

Digitized by Google

ändert, beim Öffnen derselben wird aber alsbald der Geruch nach Methylmercaptan bemerklich; auch giebt sich die Umbildung durch das Verhalten des Productes zum Wasser zu erkennen, in welchem es bei gut geleiteter Operation nahezu vollständig löslich ist. Hat man nicht lange genug oder nicht hoch genug erhitzt, so können bei der Behandlung mit Wasser erhebliche Mengen unangegriffenen Äthers zurückbleiben. Versetzt man die filtrirte Lösung, welche gewöhnlich eine grünliche Färbung hat, mit einem Überschusse von Salzsäure, so entwickeln sich Ströme von Methylmercaptan und Schwefelwasserstoff (letzterer von dem überschüssigen Natriumsulfid herrührend), während sich die Sulfocyanursäure als gelb gefärbtes, kaum krystallinisches Pulver niederschlägt.

Fügt man aber zu der nicht allzuverdünnten Lösung die Salzsäure in kleinen Mengen hinzu, bis die ursprünglich stark alkalische Reaction nahezu verschwunden ist, so entweicht auch jetzt Methylmercaptan, aber die Flüssigkeit erfüllt sich mit einer Masse schwach gelbgefärbter Krystallnadeln, welche durch Abpressen und mehrfaches Umkrystallisiren aus siedendem Wasser oder aus Alkohol, in dem sie etwas weniger löslich sind, rein erhalten werden können.

Primäres Natriumsalz der Sulfocyanursäure. Es wird auf dem angegebenen Wege in grossen, oft wohlausgebildeten, starkglänzenden Krystallen erhalten. Der Formel

$$[C{\equiv}N]_3 \begin{matrix} SNa \\ (SH)_2 \end{matrix} = C_3H_2NaN_3S_3$$

entsprechen folgende Werthe:

	Theorie		Versuch					
C_3	36	18.09	18.46	—	—	—	—	—
H_2	2	1.01	1.11	—	—	—	—	—
Na	23	11.56	—	11.29	11.20	11.21	—	—
N_3	42	21.10	—	—	—	—	—	—
S_3	96	48.24	—	—	—	—	—	48.40
	199	100.00						

Das sulfocyanursaure Natrium ist selbst in kaltem Wasser leicht löslich; die Lösung hat eine schwach alkalische Reaction und einen intensiv bitteren Geschmack; in Alkohol ist es etwas weniger, aber doch noch immer löslich genug; Äther löst es nicht auf. Es ist begreiflich versucht worden, ob die Sulfocyanursäure im Stande sei, ähnlich wie die Cyanursäure[1], ein schwerlösliches tertiäres Natriumsalz zu bilden. Ein solches Salz ist indessen nicht erhalten worden.

[1] Hofmann, Monatsberichte 1870. 601.

Digitized by Google

Das trockne sulfocyanursaure Natrium ist in hohem Grade hygroskopisch, eine Eigenschaft, welche die Analyse sehr erschwert. Für letztere ist es bei 140° getrocknet worden. Die Bestimmung des Schwefels anlangend verdient bemerkt zu werden, dass sie sich nur sehr schwierig durch Schmelzen mit einem Gemisch von Natriumcarbonat und Salpeter, selbst bei Anwendung des von H. SCHIFF vorgeschlagenen, im Übrigen so zweckmässigen umgestülpten Tiegels ausführen lässt. Bei einer Reihe von Versuchen wurden erhebliche Verluste erlitten, welche sich erst bei der Analyse nach dem CARIUS'schen Verfahren vollständig vermeiden liessen. Bei Anwendung dieses Verfahrens werden stets erhebliche Mengen von Cyanursäure gebildet, ein Beweis, wie ausserordentlich stabil diese Säure ist.

Man kann das Natriumsalz natürlich auch aus der freien Säure darstellen, welche man durch vollständiges Ausfällen der Lösung des Rohproductes mit Salzsäure gewonnen hat. Man muss in diesem Falle Sorge tragen, etwas weniger Natronlauge zu nehmen als zur vollständigen Lösung der Säure bei der Siedetemperatur erforderlich ist.

Nachdem durch Analyse des charakteristischen Natriumsalzes die Natur der Sulfocyanursäure festgestellt worden war, hat es begreiflich nicht an Versuchen gefehlt, die Darstellung dieser Verbindung zu vereinfachen.

Zunächst ist versucht worden, die Umsetzung des polymeren Äthers, statt auf trockenem Wege bei hoher Temperatur, in siedender alkoholischer Lösung zu bewerkstelligen. Der Geruch nach Mercaptan liess in diesem Falle unzweifelhaft eine Reaction erkennen, aber sie erfolgte nur äusserst langsam, und man überzeugte sich bald, dass auf diesem Wege ein Vortheil nicht erzielt wird.

Aussichtsvoller erschien der Gedanke, die Anwendung des Trimethyläthers gänzlich zu umgehen. Wenn man sich erinnert, dass das Cyanurchlorid mit den Elementen des Wassers Salzsäure und Cyanursäure bildet, so liess sich erwarten, dass die Sulfocyanursäure auch durch Einwirkung von Schwefelwasserstoff oder Natriumsulfid auf dieses Chlorid zu gewinnen sein werde.

$$\left[C\begin{matrix}\diagup Cl\\ \equiv N\end{matrix}\right]_3 + 3Na_2S = \left[C\begin{matrix}\diagup SNa\\ \equiv N\end{matrix}\right]_3 + 3NaCl.$$

Diese Erwartung hat sich in der That bestätigt. Verreibt man beide Substanzen mit einander, so erfolgt schon bei gewöhnlicher Temperatur eine Wechselwirkung. Gelindes Erwärmen über einem Brenner vollendet die Reaction. Löst man das Product in Wasser, so krystallisirt auf vorsichtigen Zusatz von Salzsäure das oben be-

Digitized by Google

schriebene Natriumsalz aus. Durch einen Überschuss von Säure fällt Sulfocyanursäure, welche sich durch Auflösen in Natronlauge wieder in das Salz zurück verwandelt. Obwohl die vollständige Übereinstimmung der Eigenschaften der auf beiden Wegen gewonnenen Substanzen keinen Zweifel darüber aufkommen lassen konnte, dass man die Sulfocyanursäure auch aus Cyanurchlorid gewinnen könne, so ist doch auch das mit Hülfe des letzteren dargestellte Natriumsalz analysirt worden. Zwei Versuche gaben 11.49 und 11.58 Procent Natrium. Das primäre sulfocyanursaure Natrium enthält, wie bereits oben bemerkt wurde, 11.56 Procent. Die Reaction zwischen Cyanurchlorid und Natriumsulfid geht sehr leicht von Statten, auch ist die Ausbeute eine recht erhebliche. Bedenkt man aber, dass die Darstellung des Cyanurchlorids keineswegs eine leichte, jedenfalls aber eine zeitraubende ist, so muss es dahingestellt bleiben, ob sich die Sulfocyanursäure aus demselben ebenso vortheilhaft wie aus dem Trimethyläther gewinnen lässt.

Es sind begreiflich noch andere Wege eingeschlagen worden, um zur Sulfocyanursäure zu gelangen; sie haben aber nicht zum Ziele geführt. Um späteren Bearbeitern dieser Säure Zeit und Mühe zu ersparen, mag dieser vergeblichen Anläufe hier kurz gedacht werden.

Versuche, Kaliumsulfocyanat für sich oder unter Zusatz einiger Tropfen Salzsäure bei wechselnden, bis über 200° steigenden Temperaturen zu polymerisiren, sind ohne Erfolg geblieben.

Ebenso ist auch die Hoffnung, durch starkes Erhitzen einer Mischung von Kaliumsulfocyanat mit primärem Kaliumsulfat nach der Gleichung

$$3(C\equiv N\,SK) + 2KHSO_4 = (C\equiv N)_3\begin{matrix}SK\\(SH)_2\end{matrix} + 2K_2SO_4$$

Sulfocyanursäure zu erhalten, nicht in Erfüllung gegangen. Bekanntlich entsteht primäres Kaliumcyanurat, wenn Kaliumcyanat mit nascenter Cyansäure zusammentrifft.

Durch Zusammenschmelzen von Persulfocyansäure mit Cyankalium nach der Gleichung:

$$C_2N_2H_2S_3 + KCN = (C\equiv N)_3\begin{matrix}SK\\(SH)_2\end{matrix}$$

hat man vergeblich versucht, Sulfocyanursäure zu gewinnen.

Auch Cyanursäure mit Kaliumsulfid auf 200° erhitzt liefert keine Sulfocyanursäure.

Der Gedanke, die Sulfocyanursäure durch die Einwirkung von Salzsäure auf den Sulfoharnstoff zu gewinnen, liegt, Angesichts der leichten Darstellung der Cyanursäure aus dem Harnstoff *par excellence*, so nahe, dass dieser Versuch gewiss schon von Vielen angestellt worden ist. Ich habe mich gleichwohl nicht abhalten lassen, diese Reaction

Digitized by Google

nochmals zu studiren. Beim Erhitzen von Sulfoharnstoff in einem Strom trockener Chlorwasserstoffsäure wird keine Sulfocyanursäure gebildet. Es entsteht Salmiak und Sulfocyansäure, welche sich unter Schwefelwasserstoffentwickelung weiter zersetzt.

Schliesslich mag noch eines vergeblichen Versuches gedacht werden, die Sulfocyanursäure aus dem Xanthogenamid zu gewinnen. Durch Einwirkung von Salzsäure auf eine Lösung von Aethylsulfocyanat in Alkohol hat PINNER[1] vor einiger Zeit eine auch früher schon von SALOMON[2] beobachtete Substanz erhalten, welche er mit dem Namen Isothiurethan bezeichnete. Beim Erhitzen auf 150° zerfällt das Isothiurethan

$$CO<\begin{matrix}NH_2\\SC_2H_5\end{matrix}$$

geradezu in Mercaptan und Cyanursäure. Es schien von Interesse, das Xanthogenamid,

$$CS<\begin{matrix}NH_2\\OC_2H_5\end{matrix}$$

welches sich von der eben genannten Verbindung nur dadurch unterscheidet, dass Schwefel und Sauerstoff die Plätze gewechselt haben, in ähnlicher Richtung zu untersuchen. Das Xanthogenamid hätte sich in Alkohol und Sulfocyanursäure spalten können. Allerdings liegen bereits sehr eingehende Untersuchungen von DEBUS[3] über die Umwandlungen des Xanthogenamids vor, nach denen sich auch dieser Körper in Cyanursäure und Mercaptan spaltet. Ich habe diese Versuche gleichwohl noch einmal wiederholt, und namentlich die Einwirkung der Wärme in geschlossenen Apparaten, sowie der Salzsäure auf das Xanthogenamid studirt. Es sind aber genau dieselben Ergebnisse beobachtet worden, welche DEBUS beschrieben hat. Sulfocyanursäure konnte auf diesem Wege nicht erhalten werden.

Sulfocyanursäure. Sie wird, wie ich bereits oben bemerkt habe, auf Zusatz eines Überschusses von Salzsäure zu der Lösung des Rohproductes der Einwirkung von Natriumsulfid auf den Trimethyläther niedergeschlagen. So gewonnen ist sie nicht rein; die kaum krystallinische Säure enthält stets freien Schwefel, wahrscheinlich aus dem dem Natriumsulfid beigemengten unterschwefligsauren Natrium stammend. Seine Gegenwart giebt sich alsbald dadurch zu erkennen, dass sich die Säure nicht vollständig in Ammoniak löst. Rein wird sie gewonnen, wenn man eine siedende verdünnte Lösung des umkrystalli-

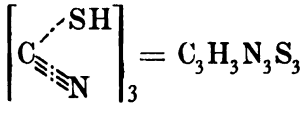
[1] PINNER, Ber. chem. Ges. XIV. 1082.
[2] SALOMON, J. p. Chem. [2] VII. 252.
[3] DEBUS, LIEB. Ann. LXXII. 18.

Digitized by Google

sirten Natriumsalzes mit siedender verdünnter Salzsäure zerlegt. Es entsteht ein gelber Niederschlag, der aus nadelförmigen Krystallen besteht. Die reine Säure lässt sich auch durch Auflösen der Rohsäure in Ammoniak, Trennung des ungelöst bleibenden Schwefels und Fällung mit Chlorwasserstoffsäure erhalten. Die Operation muss aber mehrfach wiederholt werden, ehe man eine in Ammoniak ohne Trübung lösliche Säure erhält.

Die Sulfocyanursäure ist kaum löslich selbst in siedendem Wasser, aber doch noch ausreichend, um demselben eine deutliche saure Reaction zu ertheilen. In Alkohol, Äther, Benzol und selbst Nitrobenzol ist sie ebenfalls so gut wie unlöslich. Versuche, sie unter Druck bei 100° in Alkohol zu lösen, um bei langsamem Erkalten etwas ausgebildetere Krystalle zu erhalten, haben keinen Erfolg erzielt. Die Sulfocyanursäure kann einer Temperatur von 200° ausgesetzt werden, ohne sich zu verändern. Beim stärkeren Erhitzen entwickelt sie, den Traditionen der Cyanursäure entsprechend, den Dampf der Sulfocyansäure, wie man leicht durch die Röthung eines mit Eisenchlorid getränkten Papierstreifens erkennt; die grössere Menge der Säure wird aber dabei unter reichlicher Entwickelung von Schwefelwasserstoff verkohlt. Die Sulfocyanursäure wird weder für sich noch in der wässerigen Lösung von Eisenchlorid geröthet. Mit Wasser und selbst mit verdünnter Salzsäure unter Druck auf 100° erhitzt, wird die Sulfocyanursäure nur wenig angegriffen; bei 200° wird sie von Salzsäure vollständig in Cyanursäure und Schwefelwasserstoff zerlegt.

Die Sulfocyanursäure entspricht in ihrer Zusammensetzung dem Natriumsalze. Die Formel



erheischt:

	Theorie		Versuch			
C_3	36	20.34	21.61	20.81	—	—
H_3	3	1.70	1.83	2.00	—	—
N_3	42	23.73	—	—	23.83	—
S_3	96	54.23	—	—	—	53.99
	177	100.00				

Bei der ersten Kohlenstoffbestimmung wurde mit einer Mischung von Kupferoxyd und Bleichromat, bei der zweiten ausschliesslich mit Bleichromat verbrannt; trotzdem ist der Kohlenstoff, wie dies bei einer so schwefelhaltigen Substanz nicht auffallen kann, immer noch zu hoch gefunden worden.

Digitized by Google

Die Sulfocyanursäure ist eine kräftige Säure, welche schon in der Kälte die Kohlensäure aus dem Natriumcarbonat austreibt. Sie bildet eine Reihe wohlcharakterisirter Salze, von denen jedoch nur noch das Barium- und das Silbersalz genauer untersucht worden sind.

Primäres sulfocyanursaures Barium. Dieses schöne Salz wird leicht erhalten, wenn man die Säure mit siedender Barytlösung behandelt und einen Strom Kohlensäure durch die Flüssigkeit leitet. Beim Erkalten der filtrirten Lösung, welche schwach alkalisch geblieben ist, scheiden sich grosse, sehr wohl ausgebildete Prismen aus, welche in auffallender Weise das Licht brechen. Das Salz ist nur mässig löslich in Wasser, unlöslich in Alkohol. Das sulfocyanursaure Barium krystallisirt mit 2 Mol. Wasser, welche dem Salze *in vacuo* über Schwefelsäure verbleiben. Da das Wasser auch bei höherer Temperatur, weit über 200°, in der That selbst bei Temperaturen, bei welchen schon eine leichte Zersetzung eintritt, nicht vollständig entweicht, so ist das *vacuum*trockene Salz analysirt worden.

Der Formel

$$\left[(C{\equiv}{\equiv}N)_3\right]_2 \begin{matrix} S_2Ba \\ (SH)_4 \end{matrix} + 2H_2O = C_6H_8BaN_6S_6O_2$$

gehören folgende Werthe an:

	Theorie.		Versuche.			
C_6	72	13.71	13.88	—	—	—
H_8	8	1.52	1.66	—	—	—
Ba	137	26.10	—	25.82	25.92	—
N_6	84	16.06	—	—	—	—
S_6	192	36.57	—	—	—	36.28
O_2	32	6.10	—	—	—	—
	525	100.00				

Das Salz entspricht in seiner Zusammensetzung genau dem von WÖHLER[1] analysirten primären Bariumcyanurat mit 2 Mol. Wasser, welche erst bei 280° entweichen.

Bisweilen setzten sich aus der Lösung, aus welcher der Überschuss von Baryt noch nicht durch Kohlensäure entfernt ist, grosse, dicke, gelbe Krystalle ab, welche aber nicht willkürlich erzeugt werden konnten. Vielleicht entsprechen sie dem secundären Bariumcyanurat mit 3 Mol. Wasser, welches ebenfalls von WÖHLER[2] untersucht worden ist.

Versuche, das Bariumsalz direct aus dem Methyläther durch Einwirkung von (käuflichem) Bariumsulfid bei 250° zu erhalten, haben keinen Erfolg gehabt.

---

[1] WÖHLER, LIEB. Ann. LXII. 252.

[2] A. a. O.

Digitized by Google

Sulfocyanursaures Silber. Versetzt man die Lösung des Natronsalzes, welche ausgesprochen alkalisch reagirt, mit neutralem Silbernitrat, so entsteht ein canariengelber, amorpher Niederschlag, indem die Flüssigkeit gleichzeitig eine entschiedensaure Reaction annimmt. Der Niederschlag muss daher entweder ein secundäres oder ein tertiäres Salz sein. Zuerst an der Luft, dann bei 100° getrocknet, war der Niederschlag offenbar in Folge beginnender Zersetzung missfarbig geworden, daher denn auch bei der Analyse keine übereinstimmenden Zahlen erhalten wurden. Wahrscheinlich liegt hier ein secundäres Salz

$$(C \equiv\equiv N)_3 \begin{matrix}(SAg)_2 \\ SH\end{matrix}$$

vor, welches 55.24 Procent Silber verlangt; gefunden wurden 56.65, 57.6 und 58.41 Procent. Das tertiäre Salz enthält 63.86 Procent Silber.

Fällt man die Lösung des Natriumsalzes mit ammoniakalischer Silberlösung, so entsteht gleichfalls ein gelber Niederschlag, welcher aber schon bei gewöhnlicher Temperatur bald dunkelt und sich beim Kochen schnell schwärzt.

Sulfocyanursaures Blei. Es gleicht dem Silbersalze. Beim Vermischen einer Lösung des alkalischen Natriumsalzes mit neutralem Bleiacetat wird die Flüssigkeit ebenfalls entschieden sauer. Wahrscheinlich hat man es daher auch hier entweder mit einem secundären oder tertiären Salze zu thun.

Sulfocyanursaures Kupfer fällt als grünlich brauner amorpher Niederschlag beim Vermischen des Natronsalzes mit Kupfersulfat. Der Niederschlag ist unlöslich in Ammoniak; es wurde vergeblich versucht, ein dem von Wöhler[1] beschriebenen, für die Cyanursäure so charakteristischen violetten Kupferammoniaksalz analoge Verbindung darzustellen.

Von den übrigen Salzen der Sulfocyanursäure sei bemerkt, dass das *Kalium-* und *Lithiumsalz*, erhalten durch Auflösen überschüssiger Säure in Kalilauge und Lithiumcarbonat, leicht lösliche, schwierig krystallisirbare Salze sind. Das *Calcium-*, das *Strontium-* und das *Magnesiumsalz*, durch Behandlung der Säure mit den Hydraten der genannten Metalle dargestellt, sind lösliche, krystallisirende Verbindungen.

Das Calciumsalz ist von den dreien am wenigsten löslich, aber immer noch viel löslicher als das Bariumsalz; es löst sich auch in Alkohol. Beim langsamen Erkalten einer concentrirten Lösung schiessen wohl ausgebildete rhombische Tafeln an, die sich zu eigenthümlichen,

[1] A. a. O.

Digitized by Google

höchst mannichfaltigen, an maurische Ornamente erinnernden Gruppen vereinigen, wie ich sie bei keinem anderen Salze beobachtet habe. Das Strontiumsalz bildet kleine rhombische Prismen, sehr löslich in Wasser, auch in Alkohol löslich. Das Magnesiumsalz, ausserordentlich löslich in Wasser, aber unlöslich in Alkohol, wird in nadelförmigen Krystallen erhalten.

Schön krystallisirte Salze entstehen aus dem Natriumsalz durch Zinnchlorid, Eisenchlorid, Manganchlorür, Zinksulfat und Cobaltnitrat.

Das *Zinnsalz* stellt feine weisse Nadeln, das *Eisensalz* feine, zu Gruppen aggregirte gelbe Nadeln, das *Mangansalz* dünne, nahezu farblose Krystallblätter, das *Zinksalz* weisse, das *Cobaltsalz* endlich schwach röthlich gefärbte, gruppenförmig vereinigte Tafeln dar.

Das *Wismuthsalz* ist ein gelber, das *Nickelsalz* ein grünlicher amorpher Niederschlag; *Platin-* und *Goldsalz* stellen rothbraune amorphe Niederschläge dar.

Hier ist endlich der Ort auch der Äther der Sulfocyanursäure nochmals zu gedenken. Im Vorhergehenden (S. 823) wurde bereits erwähnt, dass, ebenso wie der Methyläther, welcher Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit gewesen ist, auch der Aethyl- und Amyläther aus den entsprechenden Sulfocyansäureäthern erhalten werden können. Dieselben lassen sich auch aus dem Natriumsulfocyanurat gewinnen.

Versetzt man eine Lösung dieses Salzes in Alkohol mit etwas Natronlauge und dann mit Jodmethyl, so scheidet sich nach längerem Stehen schon in der Kälte, fast augenblicklich beim Erwärmen der vielbesprochene Methyläther in kleinen Nadeln von dem oft bestimmten Schmelzpunkte 189° aus. Werden bei diesem Versuche statt des Jodmethyls die Jodverbindungen des Aethyls und Amyls in Anwendung gebracht, so entstehen, obwohl viel schwieriger, die bereits früher erwähnten Aethyl- und Amylverbindungen.

Noch bequemer erhält man die Sulfocyanursäureäther, wenn man Cyanurchlorid auf die Natriummercaptide der verschiedenen Alkohole und Phenole einwirken lässt. Der Versuch wurde mit den Natriumsalzen der Methyl-, Aethyl- und Amylmercaptane, sowie mit dem Phenylmercaptan in alkoholischer Lösung angestellt. In allen diesen Fällen entstehen die zugehörigen Sulfocyanurate, welche indessen nicht weiter untersucht worden sind. Auf das vor einiger Zeit von mir beschriebene Amidophenylmercaptan[1] wirkt das Cyanurchlorid direct ein, hier werden jedoch die Verhältnisse durch die Gegenwart der Amidogruppe complicirt, so dass die schön krystallisirte Verbindung,

[1] HOFMANN, Monatsberichte 1880. 562.

Digitized by Google

welche in dieser Reaction entsteht, besser einer anderen demnächst zu veröffentlichenden Arbeit eingefügt wird.

Am Schlusse dieser Arbeit ist es mir ebenso Bedürfniss wie Pflicht, Hrn. Dr. Otto Borgmann für die thatkräftige und verständnissvolle Hülfe zu danken, welche er mir bei Anstellung der im Vorstehenden beschriebenen Versuche geleistet hat.

Digitized by Google

42. Über das Amin des Pentamethylbenzols.

Von A. W. Hofmann.

(Vorgetragen am 23. Juli; — gedruckt im Bericht vom 30. Juli [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 27. August.)

In einer schon vor mehr als zehn Jahren der Akademie mitgetheilten Abhandlung[1] habe ich eine Methode kennen gelehrt, aromatische Monamine im Benzolkern zu alkyliren, welche seitdem mit geringen Modificationen vielfach angewendet worden ist. Ausgangspunkt für diese Methode war die Beobachtung, dass die Einwirkung der Wärme auf die Salze ein- oder mehrfach ausserhalb des Benzolkerns alkylirter Monamine eine Wanderung der Alkylgruppe in den Kern bedingt, so dass aus secundären, tertiären und selbst quartären Verbindungen wieder primäre Monamine gebildet werden. Salzsaures Methylanilin z. B.: auf 300° erhitzt, verwandelte sich in salzsaures Toluidin. Ein gleiches Ergebniss wurde erzielt, als salzsaures Anilin und Methylalkohol einer hohen Temperatur unterworfen wurde. Dass sich mit Hülfe dieses Verfahrens zahlreiche höher gegliederte Amine würden erhalten lassen, konnte nicht zweifelhaft sein, in der That hatte ich auch damals schon unter den Producten der Einwirkung der Wärme auf ein Salz des trimethylirten Phenylammoniums eine hochsiedende, krystallisirte, primäre Base beobachtet, welche ich der Analyse nach als ein pentamethylirtes Amidobenzol ansprechen musste.

Leider war die Menge der bei diesen Versuchen gewonnenen Substanz zu gering, um eine eingehendere Untersuchung derselben vorzunehmen, so dass ich später nur noch ganz vorübergehend auf dieselbe zurückkommen konnte.[2]

Die damals im Kleinen studirte Kernalkylirung der aromatischen Monamine ist seitdem Grundlage eines nicht unwichtigen fabrikatorischen Verfahrens geworden, welches Dr. Martius in die Anilinfarbenindustrie eingeführt hat. Man geht bei diesem Processe, bei dessen Verwerthung es sich zumal um die Darstellung von Cumidinen handelt, nicht von dem Anilin selber, sondern von den Xylidinen

[1] Hofmann, Monatsberichte 1872. 606.
[2] Hofmann, Ber. chem. Ges. VIII, 61.

Digitized by Google

aus. Der Gedanke lag nahe, dass man bei der Untersuchung der Nebenproducte dieser Fabrikation gleichfalls auf das pentamethylirte Amidobenzol stossen werde. Im Sinne dieser Auffassung hab' ich denn auch diese Nebenproducte, welche mir Freund Martius in reichlicher Menge zur Verfügung gestellt hat, wiederholt zum Gegenstande eingehender Versuche gemacht. Früchte dieser Versuche sind das krystallisirte Cumidin[1] und noch neuerdings ein tetramethylirtes Amidobenzol[2] gewesen. Es ist mir jedoch nicht gelungen, den gesuchten Körper in diesen Producten aufzufinden. Indessen wurde bei diesen Versuchen beobachtet, dass sich die pentamethylirte Verbindung ganz regelmässig, obwohl nicht in grosser Menge, bei der Einwirkung der Wärme auf das Dimethylderivat des starren Cumidins erzeugt:

$$C_6H_2(CH_3)_3N(CH_3)_2 \cdot HI = C_6(CH_3)_5NH_2 \cdot HI.$$

Das pentamethylirte Amidobenzol beansprucht in Folge seiner besonderen Zusammensetzung ein specielles Interesse. Wie das Anilin, das Amidobenzol, existirt die pentamethylirte Verbindung nur in einer einzigen Modification. Ich habe mich daher die Mühe nicht verdriessen lassen, den schwer zu beschaffenden Körper in hinreichender Menge darzustellen, um wenigstens einige der wichtigeren Abkömmlinge desselben studiren zu können. Zur Darstellung der pentamethylirten Base wird das Cumidin (1 Gew.-Thl.) am Rückflusskühler allmählich mit Jodmethyl (2 Gew.-Thle.) versetzt und die Mischung bis zur Vollendung der Reaction auf dem Wasserbade erwärmt. Auf Zusatz von Wasser lösen sich Methyl- und Dimethylcumidin sowie unverwandeltes Cumidin in der Form von Jodhydraten und werden mit Alkali ausgeschieden. Das Gemenge der zwischen 220° und 230° siedenden Basen wird alsdann nochmals mit Jodmethyl (etwa zu gleichen Theilen) gemischt und in geschlossenen Röhren 8 Stunden lang auf 240—250° erhitzt. Das Digestionsproduct, eine dunkel gefärbte, krystallinische Masse, welche sich bei guten Operationen aus den Röhren herausziehen lässt, enthält neben harzigen Substanzen sowie erheblichen Mengen von Kohlenwasserstoffen (vorzugsweise Hexamethylbenzol), das pentamethylirte Amidobenzol mit anderen Basen in der Form von Jodhydraten. Dasselbe wird zunächst mit Wasserdampf behandelt, welcher die Kohlenwasserstoffe übertreibt, alsdann filtrirt und mit Natronlauge übersättigt, um die Basen in Freiheit zu setzen. Es scheidet sich eine Krystallmasse aus, die noch viel Öl enthält. Durch Waschen mit etwas Alkohol enthaltendem Wasser kann die grössere Menge des Öles entfernt werden, die letzten An-

[1] Hofmann, Ber. chem. Ges. XV, 2895.
[2] Hofmann, ebendaselbst XVII, 1912.

Digitized by Google

theile lässt man von Papier einsaugen. Löst man die noch immer gefärbten Krystalle nunmehr in Salzsäure und fällt mit Natronlauge, so erhält man eine starre Base, welche, aus verdünntem Alkohol umkrystallisirt, das reine pentamethylirte Amidobenzol darstellt. Das als Nebenproduct auftretende Öl besteht zum grossen Theil aus Dimethylcumidin, enthält aber auch noch primäre Basen (tetra- und pentamethylirtes Amidobenzol); es wird mit Jodmethyl weiter auf die pentamethylirte Base verarbeitet.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass man bei der Darstellung des pentamethylirten Amidobenzols aus ökonomischen Gründen das Dimethylcumidin auch durch Digestion von salzsaurem Cumidin mit Methylalkohol bereiten kann. Die dimethylirte Base wird dann weiter mit Jodmethyl behandelt. Versuche, die pentamethylirte Base vom Tetramethylamidobenzol ausgehend zu gewinnen, haben keine besonders günstigen Ergebnisse geliefert. Man erhält gleichfalls die pentamethylirte Base, aber schon in Folge der ungleich schwierigeren Zugänglichkeit des Tetramethylamidobenzols bietet dieses Verfahren natürlich keinen Vortheil.

Das reine pentamethylirte Amidobenzol krystallisirt in grossen, oft wohl ausgebildeten, farblosen Nadeln, welche auf Wasser schwimmen und den Schmelzpunkt 151—152° besitzen. Die Base siedet ohne jede Spur von Zersetzung bei 277—278°. Das neue Amin ist unlöslich in Wasser, selbst in siedendem, leicht löslich in Alkohol und Äther. Der Formel

$$C_6(CH_3)_5NH_2 = C_{11}H_{17}N$$

entsprechen folgende Werthe:

	Theorie		Versuch
C_{11}	132	80.98	80.94
H_{17}	17	10.43	10.88
N	14	8.59	—
	163	100.00.	

Zur Feststellung der Zusammensetzung ist überdies das salzsaure Salz und das Platinsalz analysirt worden.

Chlorwasserstoffsaures Salz. Es ist ziemlich leicht löslich in heissem, schwer löslich in kaltem Wasser und, wie die Chlorhydrate der meisten aromatischen Amine, sehr schwer löslich in concentrirter Salzsäure. Zweigartig gruppirte, lange, dünne Nadeln.

Die Formel

$$C_6(CH_3)_5HN_2 \cdot HCl$$

verlangt 17.79 Procent Chlor; in dem bei 100° getrockneten Salze wurden 17.95 Procent gefunden.

Digitized by Google

Platinsalz. Langsam auskrystallisirt, schwer lösliche, rhombische Täfelchen; schnell ausgeschieden, büschelförmig gruppirte Blättchen. Das bei 100° getrocknete Salz enthält:

$$[C_6(CH_3)_5NH_2 \cdot HCl]_2\ PtCl_4 = C_{22}H_{36}N_2PtCl_6.$$

	Theorie		Versuch		
			I.	II.	III.
C_{22}	264	35.89	35.99	—	—
H_{36}	36	4.89	5.05	—	—
N_2	28	3.81	—	—	—
Pt	194.6	26.45	—	26.56	26.46
Cl_6	213	28.96	—	—	—
	735.6	100.00			

Das *salpetersaure Salz* ist schwer löslich und krystallisirt in Nadeln; noch schwerer löslich sind das *Sulfat* und *Oxalat*, welche beide kleine Schuppen bilden. Das *Acetat* ist sehr löslich, die Lösung desselben wird durch Oxalsäure gefällt.

Die pentamethylirte Base liefert beim Erhitzen mit Quecksilberchlorid keine Farbenreaction; hat man derselben aber zuvor etwas Anilin beigefügt, so entsteht, wie ich bereits früher angegeben habe,[1] ein dem Rosanilin analoger rother Farbstoff.

Acetylverbindung des pentamethylirten Amidobenzols. Sie wird leicht durch Behandlung der Base mit Essigsäureanhydrid gewonnen. Aus Alkohol schiesst sie in schönen bei 213° schmelzenden Nadeln an.

In der Amidgruppe methylirte pentamethylirte Amidobenzole. Durch Behandlung der Base mit Jodmethyl im Einschlussrohr bei 100° wurde als Jodhydrat leicht ein monomethylirtes Derivat erhalten. Mit Alkali in Freiheit gesetzt und aus Alkohol umkrystallisirt, stellt es Krystallschuppen dar, welche den constant bleibenden Schmelzpunkt 60—61° zeigen. Es bildet ein in schönen Nadeln krystallisirendes Platinsalz. Die Formel

$$2[C_6(CH_3)_5NHCH_3 \cdot HCl]\ PtCl_4$$

verlangt 25.48 Procent Platin, gefunden wurden 25.48 Procent.

Wird das pentamethylirte Amidobenzol in Gegenwart von Alkali mit Jodmethyl am Rückflusskühler digerirt, so erhält man die dimethylirte Base, welche der monomethylirten in jeder Beziehung gleicht; nur der Schmelzpunkt wurde etwas niedriger, nämlich bei 53—54°, gefunden. Sie bildet auch ein ganz ähnliches Platinsalz, in welchem 24.64 Procent Platin gefunden wurden. Die Formel

$$2[C_6(CH_3)_5N(CH_3)_2 \cdot HCl]\ PtCl_4$$

verlangt 24.58 Procent.

[1] Hofmann, Ber. chem. Ges. VIII, 61.

Digitized by Google

Alle Versuche, die dimethylirte Pentamethylbase mit einem weiteren Molecül Jodmethyl zu vereinigen, sind fehlgeschlagen. Selbst bei längerem Erhitzen im geschlossenen Rohr auf 150—170° findet keine Einwirkung statt. Es sei bei dieser Gelegenheit noch nachträglich bemerkt, dass auch die dimethylirte Tetramethylbase eine ähnliche Abneigung zeigt, sich mit Jodmethyl zu einer Ammoniumbase zu vereinigen.

Isonitril des pentamethylirten Amidobenzols. Die Base wurde in alkoholischem Natronhydrat gelöst und nach dem Zusatz von Chloroform eine halbe Stunde am Rückflusskühler erwärmt. Der penetrante Geruch des Isonitrils liess die pentamethylirte Verbindung alsbald als primäre Base erkennen. Nach Zusatz von Wasser wurde mit Äther ausgeschüttelt und die ätherische Lösung von unverändert gebliebener Base mit verdünnter Schwefelsäure befreit. Nach dem Abdunsten des Äthers blieb das Isonitril als schwach gelb gefärbtes Öl zurück, welches bald krystallinisch erstarrte. Durch Umkrystallisiren aus Alkohol, in dem die Substanz leicht löslich ist, werden farblose Krystalle erhalten, welche bei 127—28° schmelzen. Der Geruch der Verbindung, obschon noch immer unerquicklich genug, ist der geringeren Flüchtigkeit der Substanz wegen gleichwohl lange nicht so bewältigend, wie der der Isonitrile in den niederen Reihen. Der Körper, durch Abstammung und Umbildung hinreichend als

$$C_6(CH_3)_5NC$$

charakterisirt, ist nicht analysirt worden.

Nitril des pentamethylirten Amidobenzols. Wird das Isonitril nur wenig über seinen Schmelzpunkt erhitzt, so erfolgt unter lebhafter Wärmeentwickelung eine Umsetzung. Bei einigermaassen erheblichen Mengen kann die Temperatur um mehr als 100° steigen. In wenigen Augenblicken ist das Isonitril seiner ganzen Masse nach in das isomere Nitril verwandelt, welches nunmehr bei gesteigerter Temperatur überdestillirt und in der Vorlage alsbald erstarrt. Das Nitril ist unlöslich in Wasser, löslich in Alkohol, obwohl minder leicht als das Isonitril, und in Äther. Aus Alkohol wird es in grossen, schönen, weissen Nadeln erhalten, welche bei 168° schmelzen. Der Siedepunkt liegt bei 290—92°. Die Analyse führte zu der Formel:

$$C_6(CH_3)_5CN = C_{12}H_{15}N.$$

Die Theorie verlangt 8.09 Procent Stickstoff; gefunden wurden 7.88 Procent.

Bemerkenswerth ist die ausserordentliche Beständigkeit dieses Nitrils. Es ist mir nicht gelungen, dasselbe in das Amid oder die Säure überzuführen. Die Umbildung zu Amid, welche sich in den

Digitized by Google

niederen Reihen so leicht durch Auflösen des Nitrils in Schwefelsäure bewerkstelligen lässt. ist bei diesem Körper ohne Erfolg versucht worden. Eine Lösung desselben in Schwefelsäure kann Tage lang bei gewöhnlicher Temperatur stehen und selbst längere Zeit auf 100° erhitzt werden, ohne dass man eine Einwirkung beobachtet. Beim Erhitzen unter Druck auf 180° mit concentrirter Salzsäure oder einer Lösung von Salzsäuregas in Alkohol erleidet das Nitril keine Veränderung. Geht man bei Anwendung von concentrirter Salzsäure bis zu einer Temperatur von 230—250°, so wird schon ein erheblicher Theil verkohlt. Erhitzt man mit concentrirter Jodwasserstoffsäure einige Stunden auf 220—230°, so entsteht neben Ammoniak ein in heissem Alkohol löslicher und beim Erkalten krystallisirender Kohlenwasserstoff, welcher bei 52—53° schmilzt. Derselbe ist nicht analysirt worden. Man kann aber wohl nicht bezweifeln, dass hier das Pentamethylbenzol vorliegt, dessen Schmelzpunkt von Friedel und Crafts[1] zu 53° angegeben worden ist.

$$C_6(CH_3)_5CN + 2H_2O = C_6(CH_3)_5H + CO_2 + NH_3.$$

Überdies hab' ich bei dem Nitril des Tetramethylamidobenzols gänz ähnliche Erscheinungen beobachtet.[2] Dieses Nitril liess sich auch nicht in Amid und Säure verwandeln, lieferte aber bei der Einwirkung von Salzsäure bei hoher Temperatur unter Ammoniakabspaltung und Kohlensäureentwickelung ein tetramethylirtes Benzol, welches durch die Analyse identificirt wurde.

Da die gewöhnlichen Hülfsmittel für Überführung der Nitrile in Amide und Säuren nicht den erwünschten Erfolg hatten, so habe ich einige erst in letzter Zeit aufgefundene Umbildungsmethoden zu verwerthen gesucht. Von Radziszewski[3] ist jüngst die interessante Beobachtung gemacht worden, dass sich die Nitrile unter dem Einflusse des Wasserstoffsuperoxyds bei Gegenwart von Alkali in Amide verwandeln. Auch dieses Verfahren versagte bei dem hier vorliegenden Nitrile, während der Versuch mit Benzonitril unter denselben Bedingungen vortrefflich gelang. Versuche, nach der von Tiemann[4] aufgefundenen Methode, das Nitril durch Einwirkung von Hydroxylamin in ein Amidoxim überzuführen, sind ebenfalls fehlgeschlagen.

Pentamethylirtes Phenol. Zur Darstellung dieses Körpers wurde das schwefelsaure Salz der Base (3 Gew.-Thle.) mit einer Lösung von Kaliumnitrit (1 Gew.-Thl.) übergossen und alsdann in einer Kälte-

[1] Friedel und Crafts, Ann. Chim. phys. [VI] I, 472.
[2] Hofmann, Ber. chem. Ges. XVII, 1915.
[3] Radziszewski, ebendaselbst XVIII, 355.
[4] Tiemann, ebendaselbst XVII, 126.

Digitized by Google

mischung bis zur Lösung mit verdünnter Schwefelsäure versetzt. Bald schied sich unter Gasentwickelung ein weisses Pulver aus, welches man abfiltrirte und nach der Destillation im Wasserdampfstrome aus Alkohol umkrystallisirte. So wurden feine, weisse Nadeln von charakteristischem Phenolgeruch erhalten, welche bei 125° schmelzen und bei 267° sieden. Die Ausbeute beträgt etwa 70 Procent der theoretischen. Mit Eisenchlorid zeigt dieses Phenol keinerlei Färbung. Bemerkenswerth ist die geringe Löslichkeit dieses Körpers in Alkalien. Kalte Natronlauge scheint fast ohne Wirkung. Beim Erwärmen erfolgt aber dann die Lösung. Einmal gelöst, scheidet sich das Phenol erst auf Zusatz einer Säure wieder aus. Das Phenol verbrennt nur schwierig, die Analyse musste im Sauerstoffstrome ausgeführt werden. Der Formel

$$C_6(CH_3)_5OH = C_{11}H_{16}O$$

entsprechen folgende Werthe:

		Theorie	Versuch
C_{11}	132	80.48	80.84
H_{16}	16	9.76	9.83
O	16	9.76	—
	164	100.00.	

Methyläther des pentamethylirten Phenols. Derselbe wird leicht gewonnen, wenn man Methyljodid in methylalkoholischer Lösung auf das Phenol (1 Mol.) in Gegenwart von Kalihydrat (1 Mol.) im Rohr bei 120° einwirken lässt. Aus dem Reactionsproducte wird der Überschuss von Alkohol und Methyljodid verdampft; auf Wasserzusatz fällt alsdann der Äther als Öl aus, welches schnell erstarrt. Durch Umkrystallisiren aus Alkohol, in welchem derselbe leicht löslich ist, werden schöne lange Nadeln vom Schmelzpunkte 63—64° erhalten. Die Formel

$$C_6(CH_3)_5OCH_3 = C_{12}H_{18}O$$

verlangt:

		Theorie	Versuch
C_{12}	144	80.90	80.77
H_{18}	18	10.11	10.35
O	16	8.99	—
	178	100.00.	

Senföl des pentamethylirten Amidobenzols. Es ist schon früher darauf aufmerksam gemacht worden, dass die Monamine mit mehrfach methylirtem Benzolkern bei der Einwirkung des Schwefelkohlenstoffs vorwiegend Senföl liefern, während die Bildung von Dialkylsulfoharnstoff mehr und mehr zurücktritt. Dies ist auch bei dem pentamethylirten Monamin der Fall. Erhitzt man die Base (ohne Zusatz von

Digitized by Google

Alkali) mit Schwefelkohlenstoff, bis sich nur noch sehr wenig Schwefelwasserstoff entwickelt — was immerhin mehrere Tage erfordert —, so hinterbleibt schliesslich eine krystallinische Masse, welche eine Mischung von Senföl und Sulfoharnstoff ist. Durch Destillation mit Wasserdampf geht ersteres als farbloses, nur noch sehr schwach senfölartig riechendes Öl über, welches schnell erstarrt. Aus siedendem Alkohol werden Nadeln erhalten, welche bei 86° schmelzen. Die Formel

$$C_6(CH_3)_5NCS$$

wurde durch eine Schwefelbestimmung bestätigt. Obiger Formel entsprechen 15.60 Procent Schwefel; gefunden wurden 15.87 Procent.

Mit alkoholischem Ammoniak digerirt, verwandelt sich das Senföl in den aus Alkohol in Nadeln krystallisirenden Monoalkylsulfoharnstoff,

$$CS<\begin{matrix}N[C_6(CH_3)_5]H\\NH_2\end{matrix},$$

welcher bei 224° schmilzt. Er ist nicht analysirt worden. Der

Dialkylsulfoharnstoff, welcher bei der vorher beschriebenen Operation als Rückstand bleibt, ist in Alkohol sehr schwer löslich. In Eisessig löst er sich leichter; er krystallisirt aus demselben in weissen Nadeln, welche bei 225° schmelzen. Die Formel

$$CS<\begin{matrix}N[C_6(CH_3)_5]H\\N[C_6(CH_3)_5]H\end{matrix}$$

erheischt 8.7 Procent Schwefel; gefunden wurden 9.29 Procent.

Bei Ausführung der im Vorstehenden beschriebenen Versuche ist mir von den HH. Dr. J. Frentzel und Dr. S. Ruhemann sehr dankenswerthe Hülfe geleistet worden.

Digitized by Google

43. Über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel.

Von L. KRONECKER.

(Vorgetragen am 16. Juli; — gedruckt im Bericht vom 30. Juli [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 27. August.)

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ eindeutige Functionen der reellen Variabeln x und $f^{(h)}(x)$, $g^{(h)}(x)$ ihre $h$ten Ableitungen bedeuten, so ist:

$$f^{(h)}(x)\,g^{(n-h)}(-x) - f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h+1)}(-x) = \frac{d\left(f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h)}(-x)\right)}{dx}.$$

Nimmt man hierin $h = 1, 2, \ldots n$ und summirt, so resultirt die Differentialformel:

$$(\mathfrak{D}) \quad f^{(n)}(x)\,g(-x) - f(x)\,g^{(n)}(-x) = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{d\left(f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h)}(-x)\right)}{dx},$$

und also auch die Integralformel:

$$(\mathfrak{J}) \quad \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx = \sum_{h=1}^{h=n} \int_{x_0}^{x} d\left(f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h)}(-x)\right),$$

durch welche die verschiedenen Anwendungen der partiellen Integration schematisirt werden.

I. Die Formel $(\mathfrak{J})$ geht unmittelbar in die TAYLOR'sche über, wenn man die Integrationsvariable z an Stelle von x nimmt und dann:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz, \quad g(z) = \frac{(x+z)^n}{n!}$$

setzt. Denn das erste Integral auf der linken Seite von $(\mathfrak{J})$ wird alsdann das »Restintegral« der TAYLOR'schen Formel:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^n\,F^{(n+1)}(z)\,dz,$$

das zweite, nämlich:

$$-\int_{x_0}^{x} f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx \text{ wird gleich } -F(x) + F(x_0),$$

Digitized by Google

und endlich wird, wenn $f^{(h-1)}(x)$ in dem Intervalle (x_0, x) stetig ist:

$$\int_{x_0}^{x} d\left(f^{(h-1)}(x)\, g^{(n-h)}(-x)\right) = -F^{(h)}(x_0)\frac{(x-x_0)^h}{h!},$$

so dass in der That die TAYLOR'sche Formel:

$$(1)\quad F(x) = F(x_0) + \sum_{h=1}^{h=n}\frac{(x-x_0)^h}{h!}F^{(h)}(x_0) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^n F^{(n+1)}(z)\,dz$$

resultirt.

II. Unter Festhaltung der Voraussetzung der Stetigkeit von $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$ und bei Annahme von:

$$g(x) = e^{ux}$$

resultirt ferner aus der Formel (J) die Gleichung:

$$(2)\quad \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x)e^{-ux}dx - u^n\int_{x_0}^{x} f(x)e^{-ux}dx = \sum_{h=1}^{h=n} u^{n-h}\left(f^{(h-1)}(x)e^{-ux} - f^{(h-1)}(x_0)e^{-ux_0}\right).$$

III. Nimmt man in der Formel (J):

$$g(x) = [(x+x_0)(x+x_1)]^n$$

und erstreckt die Integration von x_0 bis x_1, so verschwinden, unter Voraussetzung der Stetigkeit von $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$, die sämmtlichen Integrale auf der rechten Seite. Man erhält demnach die Formel:

$$(3)\quad \int_{x_0}^{x_1} f^{(n)}(x)\,[(x-x_0)(x-x_1)]^n\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\frac{d^n[(x-x_0)(x-x_1)]^n}{dx^n}\,dx,$$

welche die charakteristische Eigenschaft dieser Function $g^{(n)}(-x)$, dass der Werth des Integrals $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx$, für irgend welche ganze Functionen $(n-1)$ten Grades $f(x)$, verschwindet, in Evidenz setzt. Dies ist aber jene Eigenschaft, auf welcher JACOBI in seiner Abhandlung: »Über GAUSS' neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden« die Bestimmung der hier mit $g^{(n)}(-x)$ bezeichneten Function:

$$\frac{d^n[(x-x_0)(x-x_1)]^n}{dx^n}$$

basirt, und er gebraucht dazu a. a. O. im §. 4 auch eine Formel für die Darstellung von $\int uv\,dx$, welche von der Gleichung (J) nur formal verschieden ist und aus ihr hervorgeht, wenn $u = f(x)$ und $v = g^{(n)}(-x)$ gesetzt wird.

IV. Nicht bloss in dem hier behandelten speciellen Falle, sondern überhaupt, wenn die Functionen:

$$f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h)}(-x) \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

Digitized by Google

stetig sind und an beiden Integrationsgrenzen einerlei Werth haben, verschwindet der Ausdruck auf der rechten Seite der Formel (J) und es kommt:

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{x_1} f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, g^{(n)}(-x)\, dx .$$

Die angegebenen Voraussetzungen sind erfüllt, wenn die Integration in der Formel (J) von o bis 1 erstreckt, ferner:

$$g(x) = \cos 2k(x+y)\pi$$

gesetzt und für k irgend eine ganze Zahl, für $f(x)$ aber irgend eine Function genommen wird, die ebenso wie jede ihrer $n-1$ Ableitungen:

$$f'(x)\,,\ f''(x)\,,\ \ldots\ldots f^{(n-1)}(x)$$

von $x=0$ bis $x=1$ stetig ist und an den beiden Grenzen des Intervalls $x=0$ und $x=1$ denselben Werth hat. Die Gleichung (4) geht alsdann, da:

$$g^{(n)}(x) = (2k\pi)^n \cos(2kx + 2ky + \tfrac{1}{2}n)\pi$$

wird, in folgende über:

$$(5) \quad \int_0^1 f^{(n)}(x) \cos 2k(y-x)\pi dx = (2k\pi)^n \int_0^1 f(x) \cos(2ky - 2kx + \tfrac{1}{2}n)\pi dx ,$$

in welcher y eine Variable bedeutet. Bestimmt man nun $c_k, c_k^{(n)}, v_k, v_k^{(n)}$ gemäss den Bedingungen:

$$\int_0^1 f(x) \cos 2k(y-x)\pi dx = c_k \cos(2ky - v_k)\pi$$

$$\int_0^1 f^{(n)}(x) \cos 2k(y-x)\pi dx = c_k^{(n)} \cos(2ky - v_k^{(n)})\pi ,$$

so gelten — unter der einzigen Voraussetzung, dass die Function $f^{(n)}(x)$ überhaupt durch eine FOURIER'sche Reihe darstellbar ist — die Reihenentwickelungen:

$$f(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} c_k \cos(2kx - v_k)\pi\,,\quad f^{(n)}(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} c_k^{(n)} \cos(2kx - v_k^{(n)})\pi .$$

$$(0<x<1)$$

Aus der Gleichung (5) folgt aber, dass:

$$c_k^{(n)} \cos(2ky - v_k^{(n)})\pi = \frac{d^n c_k \cos(2ky - v_k)\pi}{dy^n} ,$$

also

$$c_k^{(n)} = (2k\pi)^n c_k\,,\quad v_k^{(n)} = v_k - \tfrac{1}{2}n$$

ist, und die Entwickelung von $f^{(n)}(x)$ wird daher folgende:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} (2k\pi)^n c_k \cos(2kx - v_k + \tfrac{1}{2}n)\pi \qquad (0<x<1) ,$$

Digitized by Google

d. h. sie geht durch $n$malige gliedweise Differentiation aus der Entwickelung von $f(x)$ hervor.[1]

In jeder der Entwickelungen:

$$f^{(h)}(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} (2k\pi)^h c_k \cos(2kx - v_k + \tfrac{1}{2}h)\pi \qquad (h=1,2,\ldots n;\ 0<x<1)$$

fehlt das von x unabhängige, dem Werthe $k = 0$ entsprechende Glied. Denkt man sich dieses Glied der FOURIER'schen Reihe für $f^{(h)}(x)$ durch das Integral: $\int_0^1 f^{(h)}(x)\,dx$ dargestellt, so kommt:

$$\int_0^1 f^{(h)}(x)\,dx = f^{(h-1)}(1) - f^{(h-1)}(0) = 0.$$

Man kann also, von irgend einer, in eine FOURIER'sche Reihe entwickelbaren, im Intervalle von $x = 0$ bis $x = 1$ durchweg endlich bleibenden Function $\psi(x)$ ausgehend, zuerst die Function $f^{(n)}(x)$ durch die Gleichung:

$$f^{(n)}(x) = \psi(x) - \int_0^1 \psi(x)\,dx,$$

hiernächst die Function $f^{(n-1)}(x)$ durch die beiden Relationen:

$$f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}, \quad \int_0^1 f^{(n-1)}(x)\,dx = 0$$

definiren, ferner ebenso die Function $f^{(n-2)}(x)$ gemäss den Bedingungen:

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{df^{(n-2)}(x)}{dx}, \quad \int_0^1 f^{(n-2)}(x)\,dx = 0$$

und endlich in analoger Weise nach einander die übrigen Functionen $f^{(n-3)}(x), f^{(n-4)}(x), \ldots f'(x), f(x)$ bestimmen.

Für die so bestimmten $n + 1$ Functionen $f^{(h)}(x)$ gelten dann die Reihenentwickelungen:

$$f^{(h)}(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} (2k\pi)^h c_k \cos(2kx - v_k + \tfrac{1}{2}h)\pi \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots n-1;\ 0\leqq x\leqq 1 \\ h=n;\ 0<x<1 \end{pmatrix};$$

und die Werthe der darin vorkommenden Grössen c_k, v_k können aus der Entwickelung irgend einer dieser $n + 1$ Functionen $f^{(h)}(x)$ entnommen werden.

V. Nimmt man in der Formel (3) für $f(x)$ eine Function, welche nebst ihren Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$ in dem ganzen Intervalle

[1] Vergl. Hrn. P. DU BOIS-REYMOND's Aufsatz »Über die Integration der trigonometrischen Reihe« Math. Annalen Bd. XXII. S. 260.

Digitized by Google

von x_0 bis x_r endlich und stetig ist, für $g(x)$ aber eine solche, deren $(n-1)$te Ableitung an einzelnen durch die Werthe:

$$-x = x_1, x_2, \ldots x_{r-1} \qquad (x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{r-1} < x_r)$$

bezeichneten Stellen des Intervalls (x_0, x_r) unstetig, dabei jedoch durchweg endlich ist,[1] so verwandelt sich die Gleichung (J) in eine ganz allgemeine Summenformel, und hierin besteht wohl die merkwürdigste Anwendung, welche man von jener Integralformel (J) machen kann.

Unter der angegebenen Voraussetzung wird nämlich das erste, dem Werthe $h=1$ entsprechende Integral auf der rechten Seite von (J):

$$\int_{x_0}^{x_r} d\left(f(x)\, g^{(n-1)}(-x)\right)$$

gleich der Summe:

$$(\mathfrak{S}^0) \quad -f(x_0)g^{(n-1)}(-x_0) + \sum_{k=1}^{k=r-1} f(x_k) \lim_{\varepsilon=0} [g^{(n-1)}(\varepsilon^2 - x_k) - g^{(n-1)}(-\varepsilon^2 - x_k)] + f(x_r)g^{(n-1)}(-x_r),$$

und diese wird daher gemäss der Integralformel (J) durch den Ausdruck:

$$(\mathfrak{J}^0) \quad \int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx - \int_{x_0}^{x_r} f(x)\, g^{(n)}(-x)\, dx + \sum_{h=2}^{h=n} f^{(h-1)}(x_0) g^{(n-h)}(-x_0) - \sum_{h=2}^{h=n} f^{(h-1)}(x_r)\, g^{(n-h)}(-x_r)$$

dargestellt, wenn die Function $g^{(n-1)}(x)$ innerhalb jedes einzelnen Intervalles (x_k, x_{k+1}), in welchem sie stetig ist, zugleich Ableitungen $g^{(n)}(-x)$ mit endlichen Werthen besitzt.

Man kann also irgend welche r stetige, differentiirbare Functionen:

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots \phi_r(x)$$

annehmen und alsdann die Function $g^{(n-1)}(x)$ durch die Bedingung:

$$g^{(n-1)}(-x) = \phi_k(x) \text{ für } x_{k-1} < x < x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots r),$$

d. h. also dadurch definiren, dass sie in jedem der r Intervalle:

$$x_{k-1} < x < x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots r)$$

mit der bezüglichen Function $\phi_k(x)$ übereinstimmen soll.

Es ist dann auch:

$$-g^{(n)}(-x) = \phi_k'(x) \text{ für } x_{k-1} < x < x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots r)$$

zu setzen, wo $\phi_k'(x)$ die erste Ableitung von $\phi_k(x)$ bedeutet, und die Functionen $g^{(n-2)}(x), g^{(n-3)}(x), \ldots g(x)$ sind durch die Gleichung:

$$\int_{u_h}^{x} g^{(h)}(x)\, dx = g^{(h-1)}(x)$$

[1] Die Functionen $g(x), g'(x), \ldots g^{(n-2)}(x)$ sind alsdann offenbar endlich und stetig.

Digitized by Google

zu bestimmen, wenn man darin der Reihe nach $h = n-1, n-2, \ldots 1$ und die unteren Grenzen $u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots u_1$ ganz beliebig annimmt.

Da nun bei den angegebenen Bestimmungen:

$$\lim_{\varepsilon=0} g^{(n-1)}(\varepsilon^2 - x_k) = \phi_k(x_k), \quad \lim_{\varepsilon=0} g^{(n-1)}(-\varepsilon^2 - x_k) = \phi_{k+1}(x_k) \qquad (k=1,2,\ldots r)$$

wird, so erhält man die ganz allgemeine Summenformel:

$$(\mathfrak{S}) \quad \sum_{k=0}^{k=r} [\phi_k(x_k) - \phi_{k+1}(x_k)] f(x_k) = \int_{x_0}^{x_r} f(x)\phi'(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x)\, g(-x)\,dx$$
$$+ \sum_{h=2}^{h=n} f^{(h-1)}(x_0)\, g^{(n-h)}(-x_0) - \sum_{h=2}^{h=n} f^{(h-1)}(x_r)\, g^{(n-h)}(-x_r),$$

in welcher:

$$\phi_0(x_0) = 0, \quad \phi_{r+1}(x_r) = 0$$

und für $x_{k-1} < x < x_k$:

$$\phi'(x) = \phi'_k(x) \qquad (k=1,2,\ldots r)$$

zu setzen ist. Nimmt man speciell:

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_{n-1} = x_0,$$

so wird $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \ldots = g^{(n-2)}(x_0) = 0$ und der Ausdruck:

$$\sum_{h=2}^{h=n} f^{(h-1)}(x_0)\, g^{(n-h)}(-x_0)$$

auf der rechten Seite der Formel $(\mathfrak{S})$ fällt alsdann weg.

VI. Setzt man:

$$\phi_k(x) = x - x'_{k-1} \qquad (k=1,2,\ldots r)$$

und wählt dabei die Grössen x' so, dass:

$$x_{k-1} \leqq x'_{k-1} \leqq x_k \qquad (k=1,2,\ldots r)$$

wird, so ist $\phi'(x) = 1$, und die Formel $(\mathfrak{S})$ ergiebt alsdann (bei Festhaltung jener über die Grössen u getroffenen Bestimmung: $u_1 = u_2 = \ldots = u_{n-1} = x_0$) den Ausdruck:

$$(A) \quad \int_{x_0}^{x_r} f(x)\,dx - \sum_{h=1}^{h=n-1} f^{(h)}(x_r) g^{(n-h-1)}(-x_r) + \int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x)\, g(-x)\,dx$$

als den Werth der Summe:

$$(x'_0 - x_0) f(x_0) + (x'_1 - x'_0) f(x_1) + (x'_2 - x'_1) f(x_2) + \ldots + (x_r - x'_{r-1}) f(x_r).$$

Diese Summe, in welcher je ein Functionswerth $f(x_k)$ mit dem absoluten Werthe eines das Argument enthaltenden Intervalls (x'_{k-1}, x'_k) multiplicirt ist, stellt in allgemeinster Weise einen Näherungswerth jenes Integrals:

$$\int_{x_0}^{x_r} f(x)\,dx$$

Digitized by Google

dar, welches den ersten Theil des Ausdrucks (A) bildet. Der Unterschied zwischen dem Näherungswerthe und dem Integralwerthe selbst wird daher durch den übrigen Theil des Ausdrucks, nämlich durch:

$$-\sum_{h=1}^{h=n-1} f^{(h)}(x_r)\, g^{(n-h-1)}(-x_r) + \int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x) g(-x)\, dx$$

dargestellt. Dabei ist

$$g^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x} g^{(n-1)}(x)\, dx,$$

also, wenn x zwischen x_{k-1} und x_k liegt:

$$g^{(n-2)}(x) = -\sum_{h=1}^{h=k-1} \int_{x_{h-1}}^{x_h} (x + x'_{h-1})\, dx - \int_{x_{k-1}}^{x} (x + x'_{k-1})\, dx$$

oder:

$$-g^{(n-2)}(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + x'_{k-1}x - \tfrac{1}{2}x_0^2 - x_{k-1}x'_{k-1} + \sum_{h=1}^{h=k-1} x'_{h-1}(x_h - x_{h-1}),$$

und die Functionen $g^{(n-3)}(x)$, $g^{(n-4)}(x)$, ... sind durch weitere Integrationen zu bilden.

VII. Bedeutet $\psi(x)$ irgend eine, für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ endliche, stetige und differentiirbare Function, deren Werthe für die beiden Intervallgrenzen von einander verschieden sind, und setzt man:

$$\psi(x) - \int_0^1 \psi(x)\, dx = g^{(n-1)}(-x),$$

so kann $g^{(n-1)}(-x)$ durch eine FOURIER'sche Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \cos(2kx + v_k + \tfrac{1}{2})\,\pi \qquad (0 < x < 1)$$

dargestellt werden, in welcher die Summation deshalb nur von $k = 1$ an zu erstrecken ist, weil nach der über $g^{(n-1)}(-x)$ getroffenen Festsetzung:

$$\int_0^1 g^{(n-1)}(-x)\, dx = 0$$

wird. Man kann nun von der Function $g^{(n-1)}(-x)$ ausgehend — gemäss den Darlegungen am Schlusse des art. IV — durch successive Integration zu $n-1$ Functionen:

$$g^{(n-2)}(-x),\ g^{(n-3)}(-x),\ \ldots\ldots g'(-x),\ g(-x)$$

gelangen, für welche die Relationen:

$$g^{(h)}(x) = \frac{dg^{(h-1)}(x)}{dx},\quad \int_0^1 g^{(h)}(-x)\, dx = g^{(h-1)}(-1) - g^{(h-1)}(0) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots n-1)$$

Digitized by Google

und die Reihenentwickelungen:

$$g^{(n-h)}(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^h} \cos(2kx + v_k + \tfrac{1}{2}h)\pi \qquad (h=1,2,\ldots n)$$

gelten.

Hierbei sind also:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots; \; v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots$$

beliebige Grössen, welche nur die Bedingung erfüllen müssen, dass die Reihe:

$$(A_1) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \cos(2kx + v_k + \tfrac{1}{2})\pi$$

für alle Werthe von x convergire und eine innerhalb des Intervalles von $x = 0$ bis $x = 1$ durchweg endliche, stetige, differentiirbare, aber bei $x = 0$ und $x = 1$ unstetige Function darstelle, welche, wenn man einerseits x bis zu Null abnehmen, andererseits bis zu Eins zunehmen lässt, sich zwei verschiedenen Grenzwerthen nähert. Die übrigen $n - 1$, durch die Reihen:

$$(A_h) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^h} \cos(2kx + v_k + \tfrac{1}{2}h)\pi$$

für $h = 2, 3, \ldots n$ dargestellten Functionen sind dann

durchweg endliche, stetige, differentiirbare, periodische Functionen,

von denen eine jede die Ableitung der folgenden, negativ genommen, ist, und für welche also, wenn sie beziehungsweise mit:

$$g^{(n-2)}(-x), g^{(n-3)}(-x), \ldots g'(-x), g(-x)$$

bezeichnet werden:

$$g^{(h)}(x) = \frac{dg^{(h-1)}(x)}{dx} \qquad (h=1,2,\ldots n-2)$$

ist. Diese Relation gilt ferner auch für $h = n - 1$, wenn man $g^{(n-1)}(-x)$ als den Werth der Reihe (A_h) für $h = 1$ definirt. Wenn man endlich den — der Voraussetzung nach existirenden — Differentialquotienten von $g^{(n-1)}(x)$ mit $g^{(n)}(x)$ bezeichnet, so sind die $n + 1$ den Werthen $h = 0, 1, \ldots n$ entsprechenden Functionen $g^{(h)}(-x)$ durch die Gleichungen:

$$g^{(h)}(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^{n-h}} \cos(2kx + v_k + \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}h)\pi \qquad (h=0,1,\ldots n-1)$$

$$g^{(n)}(-x) = -\frac{dg^{(n-1)}(-x)}{dx}, \quad g^{(n)}(x) = g^{(n)}(x+1)$$

für alle reellen Werthe von x definirt.

Digitized by Google

Setzt man nun diese Functionen $g^{(h)}(-x)$ in die Integralformel (J) ein, nimmt man ferner für $f(x)$ eine nebst ihren ersten $n-1$ Ableitungen stetige Function und integrirt von Null bis zu einer ganzen Zahl r, so resultirt die Gleichung:[1]

$$(6)\qquad \int_0^r f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx - \int_0^r f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx$$
$$= -\gamma_0 \sum_{k=0}^{k=r-1} f(k) + \gamma_1 \sum_{k=1}^{k=r} f(k) + \sum_{h=2}^{h=n} g^{(n-h)}(0)\left(f^{(h-1)}(r) - f^{(h-1)}(0)\right),$$

in welcher γ_0, γ_1 folgendermaassen bestimmt sind:

$$\gamma_0 = \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \cos(2k\varepsilon^2 + v_k + \tfrac{1}{2})\pi\,,\quad \gamma_1 = \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \cos(2k\varepsilon^2 - v_k - \tfrac{1}{2})\pi.$$

Bezeichnet man die Differenz $\gamma_0 - \gamma_1$ durch δ, so dass:

$$\delta = -2 \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \sin 2k\varepsilon^2\pi \cos v_k\pi$$

wird, und setzt man der Gleichförmigkeit halber:

$$\gamma_h = g^{(n-h)}(0),$$

so kann die obige Gleichung (6) in folgender Weise als eine

»allgemeine Summenformel«

dargestellt werden:

$$(\mathfrak{S}')\qquad \delta \sum_{k=0}^{k=r-1} f(k) = \int_0^r f(x) g^{(n)}(-x)\,dx + \sum_{h=0}^{h=n-1} \gamma_{h+1}\left(f^{(h)}(r) - f^{(h)}(0)\right) - \int_0^r f^{(n)}(x) g(-x)\,dx\,,$$

in welcher:

$$g(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^n} \cos(2kx + v_k + \tfrac{1}{2}n)\pi\,,\quad g^{(n)}(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}\,,$$

$$\gamma_h = \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^h} \cos(2k\varepsilon^2 - v_k - \tfrac{1}{2}h)\pi \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

$$\delta = -2 \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \sin 2k\varepsilon^2\pi \cos v_k\pi$$

ist.

VIII. Nimmt man in der Formel ($\mathfrak{S}'$):

$$n = 2m\,,\ a_k = -2\,,\ v_k = 0\,,$$

so wird:

$$g(-x) = (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2}{(2k\pi)^{2m}} \cos 2kx\pi\,,$$

$$g^{(n-1)}(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2kx\pi}{k\pi} = \tfrac{1}{2} - x\,,\ \text{also}\ g^{(n)}(-x) = 1\,,$$

$$\gamma_{2h} = (-1)^{h+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2}{(2k\pi)^{2h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots m),$$

$$\gamma_1 = -\tfrac{1}{2},\ \gamma_3 = \gamma_5 = \ldots = \gamma_{2m-1} = 0\,,\ \delta = 1\,,$$

[1] Vergl. die Ausdrücke ($\mathfrak{S}^0$) und ($\mathfrak{J}^0$) im art. V.

Digitized by Google

und die obige allgemeine Summenformel (𝔖′) geht alsdann in die folgende specielle über:

$$(\mathfrak{S}'') \qquad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\ldots.+f(r-1)+\tfrac{1}{2}f(r)= \\ &\int_0^r f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{k=m}\left(f^{(2k-1)}(0)-f^{(2k-1)}(r)\right)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^k 2}{(2k\pi)^{2k}}+(-1)^m\int_0^r f^{(2m)}(x)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}\,dx. \end{aligned}$$

welche zuerst von Poisson in seiner, am 11. December 1826 in der Pariser Akademie gelesenen, Abhandlung: »Sur le calcul numérique des Integrales définies« entwickelt worden ist.[1]

Eben dieselbe Formel hat Jacobi auf einem von dem Poisson-schen verschiedenen Wege in der vom 2. Juni 1834 datirten, im XII. Bande des Crelle'schen Journals abgedruckten Abhandlung: »*De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae*« hergeleitet. Sie findet sich a. a. O. auf S. 265 unter Nr. 10 und wird dort als »*formula memorabilis*« bezeichnet. Nur äusserlich unterscheidet sich diese Jacobi'sche Formel von der Poisson'schen dadurch, dass die oben in der Gleichung (𝔖″) auf der rechten Seite unter dem Restintegrale (ebenso wie bei Poisson) vorkommende Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}$$

bei Jacobi durch eine sogenannte Bernoulli'sche Function, d. h. durch diejenige ganze Function von x ersetzt ist, welche den Werth der Reihe für alle zwischen Null und Eins liegenden Werthe von x darstellt. Da die Übereinstimmung dieser Reihe mit der von Jacobi benutzten ganzen Function von x (im Intervalle $0<x<1$) bekannt und übrigens auch aus der citirten Poisson'schen Abhandlung selbst — nämlich aus den dort mit (13) und (14) bezeichneten Gleichungen — zu entnehmen war, so erscheinen mir die Worte[2] nicht gerechtfertigt, mit denen Jacobi nur ganz kurz auf die Poisson'sche Formel hinweist, welche doch das Hauptresultat der Jacobi'schen Abhandlung schon vollständig enthält.

IX. Im Anfange des vorhergehenden Artikels (VIII) ist:

$$g^{(n-1)}(-x)=\tfrac{1}{2}-x$$

gesetzt worden. Hiermit sind aber auch, gemäss den in art. IV und

---

[1] Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France. Tome VI, 1827, p. 571.

[2] Der Schluss der citirten Jacobi'schen Abhandlung lautet folgendermaassen: *Residui seriei summatoriae Maclaurinianae expressionem a nostra diversam dedit ill. Poisson in commentatione egregia. »Sur le calcul numérique des Intégrales définies«.* (Acad. des Sciences Vol. VI. p. 571 sqq.)

Digitized by Google

art. VII enthaltenen Darlegungen, die übrigen Functionen $g(x)$ völlig bestimmt; sie gehen nämlich mit Hülfe der Relationen:

$$g^{(h)}(x) = \frac{dg^{(h-1)}(x)}{dx}, \quad \int_0^1 g^{(h)}(-x)\,dx = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots n-1)$$

der Reihe nach durch Integration aus einander hervor. Es ergeben sich also auf diese Weise nach einander jene ganzen Functionen, welche die Werthe der Reihen:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}} \qquad (0 < x < 1)$$

für $m = 1, 2, 3, \ldots$ darstellen. Aber man gelangt dazu auch ganz direct, wenn man die Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung:

$$(7) \qquad \frac{we^{2wx\pi i}}{1 - e^{2w\pi i}} = \frac{w}{2\pi i} \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} \frac{e^{2kx\pi i}}{k - w}$$

nach steigenden Potenzen von w entwickelt; denn der Coefficient von w^n wird dann auf der rechten Seite die Reihe:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^n} \left(e^{2kx\pi i} + (-1)^n e^{-2kx\pi i} \right),$$

und auf der linken Seite eine ganze Function von x, deren Coefficienten die Entwickelungscoefficienten von:

$$\frac{1}{1 - e^{2w\pi i}}$$

und also die BERNOULLI'schen Zahlen enthalten.

Wenn man in der Formel ($\mathfrak{S}''$) an Stelle der Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}$$

— wie es bei JACOBI und seitdem in fast allen Arbeiten über diesen Gegenstand geschehen ist — ihre Summe als ganze Function von x einführt, so verliert die Formel wesentlich an Eleganz. Denn dieser Summenausdruck ist für die verschiedenen Intervalle $0 < x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x < 3, \ldots r-1 < x < r$ verschieden, und das von 0 bis r erstreckte Integral muss deshalb in r Integrale getheilt werden, deren jedes sich nur über eines der r Intervalle erstreckt. Wenn man alsdann die Integrationsvariabeln so ändert, dass sich alle Integrationen von Null bis Eins erstrecken, so erscheint an Stelle der Function $f^{(2m)}(x)$ unter dem letzten Integralzeichen in der Formel ($\mathfrak{S}''$) eine Summe solcher Functionen, wie sie sich in der That in der citirten JACOBI'schen Formel findet.

Digitized by Google

X. Die oben benutzte Gleichung (7) habe ich schon in meiner Mittheilung vom April 1883[1] angegeben. Sie gilt für reelle, nicht negative Werthe von x, die kleiner als Eins sind, und aber für ganz beliebige (auch complexe) Werthe von w. Sie lässt sich übrigens noch in folgender eleganten Weise darstellen:

$$(8) \qquad (e^{2w\pi i}-1)\lim_{\nu=\infty}\sum_{k=-\nu}^{k=+\nu}\frac{e^{-2(w+k)x\pi i}}{2(w+k)\pi i}=1,$$

und, indem $e^{2w\pi i}=u$ gesetzt wird, auch so:

$$(9) \qquad (u-1)\lim_{\mu=\infty}\sum\frac{e^{-x\log u}}{\log u}=1 \qquad (0\leqq x<1),$$

wenn unter u eine beliebige complexe Grösse verstanden und die Summation auf alle Werthe von $\log u$ ausgedehnt wird, deren absoluter Werth kleiner als μ ist. Aus der Gleichung (9) ergiebt sich endlich die für jede reelle Grösse x geltende bemerkenswerthe Relation:

$$(10) \qquad \lim_{\mu=\infty}\sum\frac{e^{-x\log u}}{\log u}=\frac{1}{u^{[x+1]}-u^{[x]}},$$

in welcher mit $[x]$ nach Gauss'scher Weise die durch die Ungleichheits-Bedingungen:

$$[x]\leqq x<[x]+1$$

bestimmte ganze Zahl bezeichnet ist.

Die Gleichung (7) lässt sich aus den schon oben citirten, in der Poisson'schen Abhandlung mit (13) und (14) bezeichneten, Formeln erschliessen; sie geht aber in ganz directer Weise aus der Entwickelung von:

$$\cos 2wx\pi+i\sin 2wx\pi$$

in eine nach cosinus und sinus der Vielfachen von $2x\pi$ fortschreitende Reihe hervor. In ähnlicher Weise gelangt man dazu, wenn man die $w$te Potenz einer complexen Variabeln ζ durch das Cauchy'sche Integral darstellt. Offenbar ist nämlich:

$$2\pi i\zeta^w=\int\frac{z^w}{z-\zeta}dz,$$

wenn man die Integration von einem Punkte $z=Re^{vi}$ an, bei festem R, bis zum Punkte $z=Re^{(v+2\pi-\varepsilon)i}$ erstreckt, dann bei Festhaltung des Bogenwerthes $v+2\pi-\varepsilon$ und abnehmendem Radius vector bis zum Punkte $z=re^{(v+2\pi-\varepsilon)i}$, ferner bei festem r und abnehmenden Bogenwerthen bis zum Punkte $z=re^{vi}$ und endlich von da bei Festhaltung des Bogenwerthes v und wachsendem Radius vector zurück zum Ausgangspunkt $z=Re^{vi}$. Hierbei ist angenommen, dass:

[1] Zur Theorie der elliptischen Functionen. Sitzungsbericht XX, XXI, S. 499.

Digitized by Google

$$r < |\zeta| < R$$

sei, oder also, wenn $\zeta = \rho e^{\sigma i}$ gesetzt wird:

$$r < \rho < R.$$

Es ist ferner angenommen, dass der Werth von ε positiv aber beliebig klein sei, und dass der Bogenwerth σ jedenfalls zwischen v und $v + 2\pi - \varepsilon$ liege. Alsdann umschliesst der angegebene Integrationsweg den Punkt ζ, und die Function z^w ist für alle Werthe von z in dem umschlossenen Gebiete eindeutig.

Von den vier Integralen, welche auf die angegebene Weise resultiren, lassen sich die beiden, bei denen der Radius vector fest bleibt, beziehungsweise nach positiven Potenzen von:

$$\frac{\zeta}{R} \text{ und } \frac{r}{\zeta}$$

entwickeln und die anderen beiden Integrale können in eines vereinigt werden. Man erhält hiernach die folgende Darstellung von ζ^w für alle Werthe von ζ, deren absoluter Betrag zwischen r und R liegt:

$$(11)\quad \frac{2\pi i \zeta^w}{e^{vwi}(e^{2w\pi i}-1)} = \frac{R^w}{w} + \sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\frac{R^w}{w-k}(R^{-1}e^{-vi}\zeta)^k + \frac{r^w}{w+k}(r^{-1}e^{-vi}\zeta)^{-k}\right\} - \int_r^R \frac{t^w\,dt}{t-\zeta e^{-vi}}$$

Setzt man hierin $\zeta = \rho e^{\sigma i}$, $\sigma = v + 2x\pi$, $\rho = \delta R$, $r = \delta\rho$, so resultirt die für alle zwischen Null und Eins liegenden Werthe von x und δ gültige Formel:

$$(12)\quad \frac{2\pi i e^{2wx\pi i}}{1-e^{2w\pi i}} = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} \frac{\delta^{\varepsilon(k-w)}\, e^{2kx\pi i}}{k-w} + \int_\delta^{\frac{1}{\delta}} \frac{t^w\,dt}{t-e^{2x\pi i}},$$

$$(\varepsilon = 1 \text{ für } k \geqq 0;\ \varepsilon = -1 \text{ für } k < 0)$$

welche in die oben mit (7) bezeichnete Formel übergeht, wenn sich δ dem Grenzwerthe $\delta = 1$ nähert.

Die Gleichung (12) kann noch, wenn man, wie oben, $e^{w\pi i} = u$ setzt, in folgende transformirt werden:

$$(13)\quad \int_\delta^{\frac{1}{\delta}} \frac{z^w\,dz}{z-1} = \frac{2\pi i}{u^{[x]} - u^{[x+1]}} + \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} \frac{(\delta^{-\varepsilon} z_0)^{w-k}}{w-k}.$$

Die Integration ist hier in Beziehung auf die complexe Variable z, bei Festhaltung des Bogenwerthes, von demjenigen Werthe an, bei dem $|z| = \delta$ ist, bis zu dem, bei welchem $|z| = \frac{1}{\delta}$ ist, zu erstrecken, und der Werth des Integrals wird alsdann durch den Ausdruck auf

Digitized by Google

der rechten Seite dargestellt, wenn darin z_0 dem bei der Integration fest bleibenden Werthe: $\frac{z}{|z|}$ gleich genommen, und dann $\log z_0 = -2\pi i$ gesetzt wird.

XI. Dass das Restintegral der EULER'schen oder MACLAURIN'schen Reihe[1] bei POISSON in eleganterer Form erscheint als bei JACOBI, ist schon oben, am Schlusse des art. IX, bemerkt worden. Aber ein noch grösserer Vorzug der POISSON'schen Form des Restintegrals ist darin zu finden, dass bei Anwendung der Cosinus-Reihe der typische Charakter der allgemeinen Formel ($\mathfrak{S}'$) des art. VII besser erhalten bleibt und also auch besser zu erkennen ist, als bei Einführung jener BERNOULLI'schen Function, welche die Summe der Cosinus-Reihe für ein bestimmtes Intervall des Arguments darstellt.

Dabei ist hervorzuheben, dass die Verallgemeinerung der POISSON'schen Summenformel, welche in der mit ($\mathfrak{S}'$) bezeichneten Gleichung gegeben ist, nicht etwa eine bloss formale, sondern vielmehr eine wichtige sachliche Bedeutung hat. Soll nämlich, wie in jener POISSON'schen Formel ($\mathfrak{S}''$), eine Summe:

$$\tfrac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \ldots\ldots + f(r-1) + \tfrac{1}{2}f(r)$$

durch einen Ausdruck mit dem »Haupttheile«:

$$\int_0^r f(x)\,dx$$

dargestellt werden, so enthält diese Aufgabe insofern eine wesentliche Unbestimmtheit, als bei der Summe $\frac{1}{2}f(0) + f(1) + \ldots$ nur die Werthe der Function $f(x)$ für $x = 0, 1, \ldots r$, bei dem Integrale $\int_0^r f(x)\,dx$ aber die Werthe für alle Argumente zwischen $x = 0$ und $x = r$ in Anwendung kommen.

Diesem Umstande, welcher offenbar bei jener Frage der Darstellung von Summen:

$$\tfrac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \ldots\ldots + f(r-1) + \tfrac{1}{2}f(r)$$

eine besondere Beachtung verdient, wird in der allgemeinen Summenformel ($\mathfrak{S}'$) bis zu einem gewissen Grade dadurch Rechnung getragen, dass in dem »Haupttheile« des Ausdrucks auf der rechten Seite:

$$\int_0^r f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx$$

[1] Man vergleiche die historischen Notizen, welche unser Ehrenmitglied, Hr. MALMSTEN, über die erwähnte Reihe in der Einleitung seiner im 35. Bande des CRELLE'schen Journals abgedruckten Abhandlung gegeben, sowie auch die Abänderungen, welche er bei dem Wiederabdruck im 5. Bande der Acta Mathematica angebracht hat.

Digitized by Google

die Function $f(x)$ mit einer Function $g^{(n)}(-x)$ multiplicirt ist, welche in dem ersten Intervalle von $x = 0$ bis $x = 1$ ganz willkürlich angenommen werden kann, deren übrige Werthe aber alsdann durch die Periodicitätsgleichung:

$$g^{(n)}(-x) = g^{(n)}(-x-1)$$

zu bestimmen sind.

Um die hier betonte Willkürlichkeit der Function $g^{(n)}(-x)$ genauer darzulegen, erinnere ich daran, dass den Entwickelungen im art. VII irgend eine für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ endliche, stetige und differentiirbare, der Ungleichheitsbedingung $\psi(0) \gtrless \psi(1)$ genügende Function $\psi(x)$ zu Grunde gelegt und dann:

$$\psi(x) - \int_0^1 \psi(x)\,dx = g^{(n-1)}(-x)$$

$$g^{(n)}(-x) = -\frac{dg^{(n-1)}(-x)}{dx}$$

gesetzt worden ist. Geht man nun von irgend einer endlichen, integrirbaren Function $g^{(n)}(-x)$ aus, deren Wahl einzig und allein durch die Bedingung: $\int_0^1 g^{(n)}(-x)\,dx \gtrless 0$ beschränkt wird, so hat man — um eine für die weitere Deduction geeignete Function $g^{(n-1)}(-x)$ daraus abzuleiten — nur $g^{(n-1)}(-x)$ durch die Differentialgleichung:

$$g^{(n)}(-x) = -\frac{dg^{(n-1)}(-x)}{dx}$$

und die Constante der Integration so zu bestimmen, dass:

$$\int_0^1 g^{(n-1)}(-x)\,dx = 0$$

wird.

XII. Für die Abschätzung des Werthes des Restintegrals:

$$\int_0^r f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx$$

in der Summenformel ($\mathfrak{S}'$) ist man bei der Allgemeinheit der Function $g(-x)$ auch nur auf die allgemeine Untersuchung von Integralen angewiesen, deren Integrand das Product zweier Functionen ist.

Sind nun $\phi(x), \psi(x)$ eindeutige Functionen, $\phi'(x), \psi'(x)$ ihre Ableitungen und $\xi_2, \xi_4, \ldots \xi_{2\nu-2}$ die sämmtlichen zwischen ξ_0 und $\xi_{2\nu}$ liegenden, ihrer Grösse nach geordneten Werthe von x, wofür $\phi'(x)$ verschwindet, so lassen sich Werthe $\xi_1, \xi_3, \ldots \xi_{2\nu-2}$ so bestimmen, dass:

$$\text{(J)} \qquad \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi'(x)\psi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{k=\nu} \big(\phi(\xi_{2k}) - \phi(\xi_{2k-2})\big)\,\psi(\xi_{2k-1})$$

$$(\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \ldots < \xi_{2\nu-2} < \xi_{2\nu-1} < \xi_{2\nu})$$

Digitized by Google

wird. Dies erhellt unmittelbar, wenn das Integrations-Intervall $(\xi_0, \xi_{2\nu})$ in die Theilintervalle $(\xi_0, \xi_2), (\xi_2, \xi_4), \ldots$ zerlegt wird, innerhalb deren $\phi'(x)$ sein Vorzeichen bewahrt.

Ersetzt man das Integral auf der linken Seite der Gleichung (J) durch:

$$\phi(\xi_{2\nu})\psi(\xi_{2\nu}) - \phi(\xi_0)\psi(\xi_0) - \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi(x)\psi'(x)\,dx$$

und ordnet alsdann die Glieder auf der rechten Seite nach den einzelnen Functionen ϕ, so ergiebt sich die Formel:

$$(J') \qquad \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi(x)\psi'(x)\,dx = \sum_{k=0}^{k=\nu} \big(\psi(\xi_{2k+1}) - \psi(\xi_{2k-1})\big)\,\phi(\xi_{2k}),$$

in welcher:

$$\xi_{-1} = \xi_0, \quad \xi_{2\nu+1} = \xi_{2\nu}$$

zu nehmen ist, und in welcher die Argumente der Functionen ϕ auf der rechten Seite deren Minimal- oder Maximalstellen bezeichnen. Man kann daher die beiden Formeln (J), (J') auch in folgender Weise darstellen:

$$(J_0) \qquad \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi'(x)\psi(x)\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi'(x)\overline{\psi}(x)\,dx$$

$$(J_0') \qquad \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi(x)\psi'(x)\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi(x)\psi'(x)\,dx,$$

wo erstens

$\overline{\phi}(x)$ durch die Bedingung:

$$\overline{\phi}(x) = \phi(\xi_{2k}) \text{ im Intervalle } \xi_{2k-1} < x < \xi_{2k+1}$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots \nu$ bestimmt ist, also eine Function bedeutet, welche in gewissen, je eine der Minimal- oder Maximalstellen einschliessenden Intervallen den festen Minimal- oder Maximalwerth beibehält,

und wo zweitens

$\overline{\psi}(x)$ durch die Bedingung:

$$\overline{\psi}(x) = \psi(\xi_{2k-1}) \text{ im Intervalle } \xi_{2k-2} < x < \xi_{2k}$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots \nu$ definirt ist, also eine Function bedeutet, welche in den verschiedenen Intervallen, in denen $\phi'(x)$ sein Vorzeichen nicht ändert, einen festen (Mittel-) Werth beibehält.

Die zweite Formel (J') braucht nicht — wie hier geschehen ist — aus der ersten Formel (J) abgeleitet zu werden. Sie resultirt vielmehr

Digitized by Google

direct, und unabhängig von der Voraussetzung der Existenz einer Derivirten $\phi'(x)$, wenn das Integrations-Intervall in Theilintervalle $(\xi_0, \xi_4), (\xi_4, \xi_8), \ldots$ zerlegt wird, innerhalb deren nur ein Maximum oder Minimum von $\phi(x)$ liegt. Denn wenn das Integral:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_4} \big(\phi(x) - \phi(\xi_2)\big)\, \psi'(x)\, dx$$

als Grenzwerth der Summe:

$$\sum_k (x_{2k} - x_{2k-2}) \big(\phi(x_{2k-1}) - \phi(\xi_2)\big)\, \psi'(x_{2k-1}) \qquad (k = 1, \ldots m, m+1, \ldots n)$$

bei wachsendem m und n und bei Festhaltung der Werthe:

$$x_0 = \xi_0\,,\quad x_{2m} = \xi_2\,,\quad x_{2n} = \xi_4$$

aufgefasst und die auf die Werthe $k = 1, 2, \ldots m$ bezügliche Theilsumme mittels der abkürzenden Bezeichnungen:

$$\phi(x_{2k-1}) - \phi(\xi_2) = a_k\,,\ (x_{2k} - x_{2k-2})\psi'(x_{2k-1}) = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

in der Form:

$$\sum_k a_k b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

dargestellt wird, so ist für den Fall, dass die Function $\phi(x)$ bei $x = \xi_2$ ein Minimum hat:

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_m > 0.$$

Nun liegt der Werth von:

$$\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{k=m} a_k b_k\,,$$

wie bei jener ABEL'schen Schlussweise erhellt, zwischen dem grössten und dem kleinsten der verschiedenen Werthe, welchen die Summe:

$$\sum_{k=1}^{k=\nu} b_k$$

für $\nu = 1, 2, \ldots m$ annimmt. Für zwei von diesen m Summen:

$$\sum_{h=1}^{h=\lambda} b_h\,,\quad \sum_{h=1}^{h=\mu} b_h\,,$$

die der Grösse ihres Werthes nach unmittelbar auf einander folgen, muss demnach eine Ungleichheit:

$$a_0 \sum_{h=1}^{h=\lambda} b_h < \sum_{h=1}^{h=m} a_h b_h < a_0 \sum_{h=1}^{h=\mu} b_h$$

bestehen, und aus dieser resultirt, wenn man zur Grenze übergeht, eine Gleichung:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_2} \big(\phi(x) - \phi(\xi_2)\big)\, \psi'(x)\, dx = \phi(\xi_0) \int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi'(x)\, dx\,,$$

Digitized by Google

in welcher ξ_1 einen zwischen ξ_0 und ξ_2 liegenden Werth von x bedeutet. Ganz ebenso resultirt eine Gleichung:

$$\int_{\xi_2}^{\xi_4} \big(\phi(x) - \phi(\xi_2)\big)\psi'(x)\,dx = \phi(\xi_4)\int_{\xi_3}^{\xi_4} \psi'(x)\,dx,$$

in welcher ξ_3 ein zwischen ξ_2 und ξ_4 liegender Werth von x ist, und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen folgt:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_4} \phi(x)\psi'(x)\,dx = \phi(\xi_0)\int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi'(x)\,dx + \phi(\xi_2)\int_{\xi_1}^{\xi_3} \psi'(x)\,dx + \phi(\xi_4)\int_{\xi_3}^{\xi_4} \psi'(x)\,dx,$$

so dass in der That:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_4} \phi(x)\psi'(x)\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_4} \bar{\phi}(x)\psi'(x)\,dx$$

wird.

Die Formel (J′) geht, wenn die Integration nur von ξ_0 bis ξ_2 erstreckt wird, in jene über, welche Hr. P. du Bois-Reymond in seiner im LXIX. Bande des Journals für Mathematik abgedruckten Abhandlung[1] entwickelt und dort als »Mittelwerthsatz« bezeichnet hat; doch tritt ihre eigentliche Bedeutung bei dieser Beschränkung des Integrationsgebietes weniger hervor.

Die Formel (J′) lässt sich andererseits auch aus der specielleren P. du Bois-Reymond'schen Gleichung ableiten, wenn man das Integral auf der linken Seite von (J′) in ν Theilintegrale mit den Grenzen $(\xi_0, \xi_2), (\xi_2, \xi_4), \ldots (\xi_{2\nu-2}, \xi_{2\nu})$ zerlegt.

Für die Abschätzung des Restintegral-Werthes in der allgemeinen Summenformel (S′) braucht man nur eine der beiden Formeln (J), (J′) zu benutzen. Denn wenn man:

$$\phi(x) = f^{(n-1)}(x), \quad \psi(x) = g(-x)$$

nimmt, so erhält man durch die Formel (J) einen Ausdruck für das Restintegral:

$$\int_0^r f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx,$$

aus welchem derjenige unmittelbar hervorgeht, welchen die Formel (J′) für das Integral:

$$\int_0^r f^{(n-1)}(x)\,g'(-x)\,dx,$$

also für ein Restintegral liefert, in dem die Zahl n durch die Zahl $n-1$ ersetzt ist.

[1] A. a. O. S. 82, Gleichung (9).

Digitized by Google

Aber man hat, um das Restintegral $\int f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx$ mit dem Integral der Formel (J) zu identificiren, nicht nur, wie eben angenommen wurde:

$$\phi'(x) = f^{(n)}(x), \quad \psi(x) = g(-x),$$

sondern auch andererseits:

$$\phi'(x) = g(-x), \quad \psi(x) = f^{(n)}(x)$$

zu setzen. Doch kann statt dessen, wenn das Integral:

$$\int_0^r f^{(n-1)}(x)\,g'(-x)\,dx$$

als Restintegral betrachtet wird:

$$\phi'(x) = g'(-x), \quad \psi(x) = f^{(n-1)}(x)$$

gesetzt werden. Man erhält hiernach mittels der Formel (J) zur Abschätzung des Restintegral-Werthes die beiden Gleichungen:

$$(K_1) \qquad \int_0^r f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx = \sum_{k=1}^{k=\nu} \Big(f^{(n-1)}(\xi_{2k}) - f^{(n-1)}(\xi_{2k-2})\Big)\,g(-\xi_{2k-1}),$$

$$(K_2) \qquad \int_0^r f^{(n-1)}(x)\,g'(-x)\,dx = \sum_{k=1}^{k=\nu'} \Big(g(-\xi'_{2k}) - g(-\xi'_{2k-2})\Big)\,f^{(n-1)}(\xi'_{2k-1}),$$

in denen

$$\xi_2, \xi_4, \ldots \xi_{2\nu-2} \qquad (\xi_2 < \xi_4 < \ldots < \xi_{2\nu-2})$$
$$\xi'_2, \xi'_4, \ldots \xi'_{2\nu'-2} \qquad (\xi'_2 < \xi'_4 < \ldots < \xi'_{2\nu'-2})$$

alle diejenigen Argumentwerthe zwischen o und r bedeuten, für welche einerseits die Functionswerthe:

$$f^{(n-1)}(\xi_2), f^{(n-1)}(\xi_4), \ldots f^{(n-1)}(\xi_{2\nu-2})$$

und andererseits die Functionswerthe:

$$g(-\xi'_2), g(-\xi'_4), \ldots g(-\xi'_{2\nu-2})$$

abwechselnd die Maxima und Minima sind.

Wenn nun die Summe der absoluten Werthe:

$$\left| f^{(n-1)}(\xi_{2k}) - f^{(n-1)}(\xi_{2k-2}) \right| \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu)$$

mit $V\big(f^{(n-1)}(x)\big)$ und in analoger Weise die Summe der absoluten Werthe:

$$\left| g(-\xi'_{2k}) - g(-\xi'_{2k-2}) \right| \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu')$$

mit $V\big(g(-x)\big)$ bezeichnet wird, wenn ferner $M\big(f^{(n-1)}(x)\big)$, $M\big(g(-x)\big)$ Grössen bedeuten, für welche in dem ganzen Intervalle $o < x < r$:

$$\left| f^{(n-1)}(x) \right| \leqq M\big(f^{(n-1)}(x)\big), \quad g(-x) \leqq M\big(g(-x)\big)$$

bleibt, so ist gemäss der Gleichung (K_1):

Digitized by Google

$$(\mathrm{M}) \qquad \int_0^r f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx \leqq M\big(g(-x)\big)\, V\big(f^{(n-1)}(x)\big),$$

und gemäss der Gleichung (K_2):

$$\int_0^r f^{(n-1)}(x)\, g'(-x)\, dx \leqq M\big(f^{(n-1)}(x)\big)\, V\big(g(-x)\big).$$

Setzt man in dieser letzteren Ungleichheit $f^{(n)}(x)$ an die Stelle von $f^{(n-1)}(x)$ und $g(-x)$ an die Stelle von $g'(-x)$, so kommt:

$$(\mathrm{M}') \qquad \int_0^r f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx \leqq M\big(f^{(n)}(x)\big)\, V\Big(\int g(-x)\, dx\Big).$$

Die hier mit (M), (M') bezeichneten Ungleichheiten werden unmittelbar evident, wenn man berücksichtigt, dass:

$$V\big(f^{(n-1)}(x)\big) = \int_0^r |f^{(n)}(x)|\, dx, \quad V\Big(\int g(-x)\, dx\Big) = \int_0^r |g(-x)|\, dx$$

ist; ihre eigentliche Bedeutung aber tritt erst dann hervor, wenn man die Bedeutung der mit V bezeichneten Grössen näher in's Auge fasst.

Man kann nämlich $V\big(f^{(n-1)}(x)\big)$ als den Gesammtbetrag der Veränderungen charakterisiren, welche die Function $f^{(n-1)}(x)$ in dem Intervalle von $x = 0$ bis $x = r$ erfährt, und die Ungleichheit (M) zeigt hiermit die wahre Bedeutung der allgemeinen Summenformel $(\mathfrak{S}')$ darin, dass der Ausdruck rechts ohne das Restintegral den Werth der Summe mit wachsendem n immer genauer darstellt, sobald nur einerseits die mit g bezeichneten Functionen ihrem Werthe nach stets in gewissen Grenzen eingeschlossen bleiben, und andererseits die durch weitere Differentiation entstehenden Functionen f — wenigstens innerhalb des Summations-Intervalls — immer mehr an Veränderlichkeit verlieren und sich also immer näher an eine Constante anschliessen. Wenn zugleich die durch weitere Integration aus einander entstehenden Functionen $g(-x)$ immer kleinere Werthe erhalten, so wächst auch hiermit die Genauigkeit jener Darstellung.

Die Ungleichheit (M') zeigt, dass die Werthverminderung des Restintegrals der Summenformel $(\mathfrak{S}')$ mit wachsendem n auch durch die Verminderung der Werthe der Ableitungen $f^{(n)}(x)$ selbst bewirkt wird, vorausgesetzt dass dabei die Veränderlichkeit der Functionen $g(-x)$ sich ebenfalls vermindert oder wenigstens nicht vergrössert.

Nimmt man in der Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^n} \cos\left(2kx + v_k + \tfrac{1}{2}n\right)\pi,$$

Digitized by Google

welche die Function $g(-x)$ darstellt, $n = 2m$ und die Grössen v_k sämmtlich gleich Null, so ist die Anzahl der Maxima und Minima, durch welche die Anzahl der Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (K_2) bestimmt wird, für jede der Functionen:

$$g(x)\,,\ g''(x)\,,\ g^{(4)}(x)\,,\ \ldots\ g^{(2m-2)}(x)\,,$$

d. h. also für jede der Reihen:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^{2h}} \cos 2kx\pi \qquad (h = 1, 2, \ldots m)$$

nicht grösser als für die vorhergehende. Dies ist für den Fall der POISSON'schen Formel, d. h. für den Fall, dass sämmtliche Grössen a_k einander gleich sind, zuerst von Hrn. MALMSTEN in seiner oben citirten Abhandlung entwickelt worden, und es ist auch für den allgemeineren Fall in derselben Weise, wie dort, zu erschliessen.

Wenn nämlich $g^{(2h)}(x)$ innerhalb des Intervalls von $x = 0$ bis $x = 1$ genau μ Maxima und Minima hat, so hat $g^{(2h-1)}(x)$ in eben diesem Intervalle genau μ Nullstellen. Die Function $g^{(2h-1)}(x)$ hat also, da sie auch an den beiden Grenzen des Intervalls verschwindet, innerhalb dieses Intervalls mindestens $\mu + 1$ Maxima oder Minima. Die Derivirte $g^{(2h-2)}(x)$ hat demzufolge eine gleiche Anzahl Nullstellen und daher wiederum mindestens μ Maxima und Minima, d. h. also mindestens ebenso viele als für die Function $g^{(2h)}(x)$ vorausgesetzt worden sind.

XIII. Von besonderem Interesse ist auch der specielle Fall, wo ausser den Grössen v_k noch eine Anzahl von den ersten Grössen a, z. B. $a_1, a_2, \ldots a_{s-1}$ gleich Null sind, die folgenden Grössen a aber sämmtlich einen und denselben von Null verschiedenen Werth haben,

Nimmt man nämlich in der mit $(\mathfrak{S}')$ bezeichneten allgemeinen Summenformel des art. VII:

$$n = 2m\,,\ v_1 = v_2 = \ldots = 0\,,$$
$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{s-1} = 0\,,$$
$$a_s = a_{s+1} = a_{s+2} = \ldots = -2\,,$$

so wird:

$$g(-x) = (-1)^{m+1} \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}$$

$$g^{(2m-1)}(-x) = \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{\sin 2kx\pi}{k\pi} = \tfrac{1}{2} - x - \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{\sin 2kx\pi}{k\pi}$$

$$g^{(2m)}(-x) = \sum_{k=-s+1}^{k=s-1} \cos 2kx\pi = \frac{\sin(2s-1)x\pi}{\sin x\pi}$$

$$\gamma_{2h} = (-1)^{h+1} \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{2}{(2k\pi)^{2h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots m)$$

$$\gamma_1 = -\tfrac{1}{2}\,,\ \gamma_3 = \gamma_5 = \ldots = \gamma_{2m-1} = 0\,,\ \delta = 1\,,$$

Digitized by Google

und es resultirt die speciellere Summenformel:

$$(\mathfrak{S}'_0) \qquad \tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(r-1)+\tfrac{1}{2}f(r)=$$
$$\int_0^r f(x)\frac{\sin(2s-1)x\pi}{\sin x\pi}dx+\sum_{h=1}^{h=m}\left(f^{(2h-1)}(0)-f^{(2h-1)}(r)\right)\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{(-1)^h 2}{(2k\pi)^{2h}}+(-1)^m\int_0^r f^{(2m)}(x)\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^m}dx.$$

Hier wird nicht nur das Restintegral, sondern auch jedes der übrigen Glieder auf der rechten Seite, mit Ausnahme des ersten, um so kleiner, je mehr man s wachsen lässt; und die Formel liefert daher auch eine immer bessere Reihe für den Werth der Summe:

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(r-1)+\tfrac{1}{2}f(r),$$

je grösser man die Zahl s annimmt. Vor Allem aber erscheint die Formel $(\mathfrak{S}'_0)$ wohl dadurch bemerkenswerth, dass sie eine Verbindung zwischen der Poisson'schen (oder Euler-Maclaurin'schen) Summenformel und zwischen derjenigen herstellt, welche Dirichlet in seiner Abhandlung: »*Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies*« im XVII. Bande des Crelle'schen Journals (S. 60) angegeben, und von welcher er dort so interessante Anwendungen gemacht hat. Während nämlich die Formel $(\mathfrak{S}'_0)$ einerseits für $s=1$ mit der im art. VIII $(\mathfrak{S}'')$ angeführten Poisson'schen Formel identisch wird, geht sie andererseits für den Grenzwerth $s=\infty$, für welchen sich der Ausdruck auf der rechten Seite auf

$$\lim_{s=\infty}\int_0^r f(x)\frac{\sin(2s-1)x\pi}{\sin x\pi}dx$$

reducirt, in die erwähnte Dirichlet'sche Summenformel über.

Digitized by Google

44. Das Tertiär im Bereiche der Mark Brandenburg.

Von Hrn. G. Berendt.

(Vorgelegt von Hrn. Beyrich am 25. Juni: — gedruckt im Bericht vom 30. Juli [St. XXXVIII]: — ausgegeben am 27. August.)

Hierzu Tafel V und 1 in den Text gedruckter Holzschnitt.

Das Tertiär der Mark Brandenburg, soweit es seither zu Tage anstehend oder durch Bergbau bekannt geworden ist, besteht einerseits aus marinem Septarienthon, andrerseits aus Braunkohlen führenden Sanden und Letten. Bei weitem an den meisten Punkten sind es letztere Bildungen, welche an die Oberfläche treten, oder durch Bergbau zunächst unter den, im übrigen die Oberfläche ausmachenden Quartärbildungen aufgeschlossen sind.

Während sich das Vorkommen des Septarienthones auf die Punkte Joachimsthal, Hermsdorf, Freienwalde, Buckow und Frankfurt a. O. beschränkt, zählt die »von Dechen'sche Geologische Karte von Deutschland« innerhalb der Grenzen der Mark Brandenburg 55 Tertiärpunkte, oder, da nur Joachimsthal und Hermsdorf in Abzug zu bringen sind, allein 53 Punkte des Auftretens der märkischen Braunkohlenbildung, von denen viele für sich allein den zwanzig- und mehrfachen Flächenraum einnehmen, als die genannten Vorkommen des Septarienthones. Während aber, zuerst in Hrn. Beyrich's bezüglicher Monographie vom Jahre 1847[1], für den Septarienthon die ihm auf Grund seiner Fauna zukommende, später als Mittel-Oligocän bezeichnete Altersstellung festgestellt wurde, konnte, trotz der weit grösseren Oberflächenverbreitung und trotz der zahlreichen in die Tiefe gehenden bergbaulichen Aufschlüsse, das geognostische Alter der märkischen Braunkohlenbildung seither nur durch Vergleichung mit Lagerungsverhältnissen ganz ausserhalb der Grenzen der Mark Brandenburg liegender Punkte gefolgert werden.

Als Hr. Beyrich im Jahre 1847 obengenannte Monographie über den Septarienthon von Hermsdorf schrieb und nicht minder im

[1] »Zur Kenntniss des tertiären Bodens der Mark Brandenburg« enth. in Karsten's Archiv, Jahrgang 1848.

Digitized by Google

Jahre 1856, in welchem die Abhandlung desselben Autors »Über den Zusammenhang der norddeutschen Tertiärbildungen« erschien, war über die Lagerungsverhältnisse mariner und Braunkohlen führender Tertiärbildungen in Norddeutschland nichts weiter bekannt, als dass letztere in der Gegend von Cöthen (bei Görzig) vom Septarienthone mit Zwischenlagerung mariner glauconitischer Sande gleichen Alters, (dem sogenannten Magdeburger Sande) und nordwestlich von dort in der Gegend von Aschersleben und Biere von einer petrographisch durchaus gleichen, aber noch älteren, ebenfalls zum Theil unmittelbar vom Septarienthon überlagerten marinen Sandbildung, dem unter-oligocänen Lager von Egeln bedeckt werden.[1]

Hieraus, wie aus der Thatsache, dass man damals durchaus keinen Grund hatte, im nördlichen Deutschland Braunkohlenbildungen verschiedenen Alters anzunehmen, folgte naturgemäss die Ansicht, dass »die Schichten der Magdeburger Fauna, ebenso wie der Septarienthon, eine gleichförmige Decke des Braunkohlengebirges« seien und dass letzteres, sich in gleichmässigem Zusammenhange von der Elbe bis Königsberg und Warschau erstreckend, älter sei als jenes unter-oligocäne Lager von Egeln.

Plettner und Girard vertraten dieselbe Ansicht. Erst Giebelhausen, welcher zuletzt (im Jahre 1871) ein zusammenfassendes Bild der märkischen Braunkohlenbildung gegeben hat[2], neigte der von Zaddach[3] kurz vorher zuerst ausgesprochenen Meinung zu, dass die sächsische als eine ältere Braunkohlenbildung von der übrigen nordostdeutschen abzutrennen und letztere entweder dem Mittel-Oligocän zuzurechnen, oder als eine besondere Stufe in die Zeit zwischen dem Septarienthon und dem Lager von Egeln zu stellen sei; er wollte aber schliesslich die endgültige Entscheidung über das Altersverhältniss der märkischen Braunkohlenablagerung weiteren Aufschlüssen vorbehalten wissen.

In erfreulicher Weise und jeden Zweifel ausschliessend, sind nun diese Aufschlüsse durch die neueren Tiefbohrungen in der Mark Brandenburg gewonnen, deren Ergebnisse im Folgenden, auf Grund aktenmässiger Feststellung, eigener Beobachtung und der von jedem Bohrloche in der Sammlung der hiesigen geologischen Landesanstalt aufbewahrten Bohrproben zunächst gegeben werden sollen. Die Lage der Bohrpunkte wird aus dem beigegebenen Übersichtskärtchen ersichtlich und sind die Namen der entscheidenden Bohrlöcher insbesondere

---

[1] Beyrich 1848 a. a. O. S. 6 u. 76. 1856, S. 12 u. 18.

[2] »Die Braunkohlenbildungen der Mark Brandenburg und des nördl. Schlesiens« enth. in Zeitsch. f. Berg-, Hütten- und Salinenwesen, Bd. XIX.

[3] Beobachtungen über das Vorkommen des Bernsteins und die Ausdehnung des Tertiärgebirges in Westpreussen und Pommern, S. 78.

Digitized by Google

durch etwas kräftigere Schrift hervorgehoben. Die Grundlage des Kärtchens bildet die VON DECHEN'sche Karte von Deutschland in Verbindung mit der EUG. GEINITZ'schen Übersichtskarte der Flötzformationen Mecklenburgs vom Jahre 1883 und der EWALD'schen Karte der Gegend zwischen Magdeburg und dem Harz.

A. Bohrungen in der Nieder-Lausitz und im Vläming.

1. Bohrloch am Priorfliess bei Cottbus.

Die Bohrung wurde im April 1878 begonnen und im Januar 1879 beendet. Schon bei 31.58^{m} traf dieselbe das Tertiärgebirge und zwar zunächst unter dem Diluvium die, zwei mächtige Kohlenflötze einschliessende Braunkohlenbildung, unterlagert von marinem Ober-Oligocän. Die Bohrproben geben für die Braunkohlenbildung ein Profil, welches mit dem von Muskau und Gr. Kölzig[1] gut übereinstimmt.

Im Übrigen ergiebt sich folgende Bohrtabelle:

Tiefe in Metern.	Gesteinsart.	Mächtigkeit in Metern.	Formation.
0 — 31.6	Sande und Grande	31.6	Diluvium (GIRARD's südliche Bildungen).
31.6 — 65.7	Sande, Letten und Kohlen	34.1	Obere Abtheilung (nördl. Bildung). — Märk. Braunkohlenbildung.
65.7 — 129.3	Letten, bezw. Thone von dunkler und heller Farbe	63.6	Horizont des Flaschenthons.[2] — Märk. Braunkohlenbildung.
129.3 — 177.9	Feine Quarz- bis Glimmersande mit marinen Schaalresten	48.6	Marines Ober-Oligocän.
177.9 — 183.0	Braune und an der Basis glauconitische Letten mit Kalksteinknollen und marinen Schaalresten	5.1	Marines Ober-Oligocän.
183.0 — 276.0	Kalkstein, Sandstein und Letten, letztere zum Theil mit Gyps...	93.0	KEUPER.

Das oberoligocäne Alter der Schichten von 129.3 bis 183.0 ergiebt sich aus der darin gefundenen reichen Molluskenfauna.

[1] Cfr. GIEBELHAUSEN, Braunkohlenbildungen der Mark Brandenburg, S. 6.

[2] Der bläulichweisse, diesem Niveau eigenthümliche Thon verdankt seinen Namen der in der Lausitz schon von Alters her in grossartigem Maassstabe stattfindenden Verwendung zur Flaschen- oder Kruken-Fabrikation.

Digitized by Google

Es fanden sich nach den Bestimmungen Speyer's und von Könen's

a) im Glimmersande der Tiefe von 151.6 — 177.6m

Murex Deshayesii Nyst.
Tiphys cuniculosus Nyst.
Cancellaria subangulosa Wood.
Cancellaria evulsa Sol.
Nassa pygmaea Schloth.
Pleurotoma turbida Sol.
Pleurotoma Duchastelii Nyst.
» » *var. juv.*
Fusus? Waelii Nyst.
Natica Nysti (juv.) d'Orb.
Terebra Beyrichii Semp.
Eulima subula d'Orb.
Eulima Naumanni v. Koen.
Bulla acuminata Brug.
Actaeon Philippii Koch.
Spindel-Bruchstück von Cassis.
Dentalium Kickxii Nyst.
Corbula gibba Olivi.
Corbulomya spec.
Tellina Nysti Desh.
Nucula peregrina Desh.
Nucula Chastelii Nyst.
Leda sp. nova (? pygmaea Münst.).
Pectunculus Philippi Desh.

und verschiedene unbestimmbare Bruchstücke von Zweischaalern;

b) in den glauconitischen Schichten von 180.1 — 181.6m

Gehörknochen von Fischen.
Pyrula concinna Beyr.
Pleurotoma laticlavia Beyr.
Pleurotoma Duchastelii Nyst.
Natica Nysti d'Orb.
Actaeon punctatosulcatus Phil.
Dentalium Kickxii Nyst.
Robulina polyphragma Reuss.
Dentalina soluta Reuss.
» *capitata* Boll.
Marginulina tumida Reuss.
Globulina? guttula Reuss.
Triloculina orbicularis Reuss.

c) in den glauconitischen Schichten von 181.6 — 183.0m

Gehörknochen von Fischen.
Natica Nysti d'Orb.
Eulima Naumanni v. Koen.
Pecten? pictus Goldf.
Triloculina gibta d'Orb.
» *acutangula* Reuss.
Lunulites hippocrepis F. A. Roem.
Guttulina sp.

Ein sehr ähnliches Profil hatte schon zwei Jahre früher das folgende etwa halbwegs zwischen Dahme und Dobrilugk in der Gegend von Schlieben niedergebrachte Bohrloch ergeben.

2. Bohrloch Hilmersdorf bei Schlieben.

Die Bohrung wurde am 4. October 1876 begonnen. Nach Durchsinken von 4.48m Torf folgten bis 17.48m Diluvialbildungen und zwar Sande, Grande und Gerölle. Bei 17.48m begann jedoch, soweit eine genaue Grenzbestimmung bei den zum Theil vom Wasserstrom der Bohrung aufbereiteten und mit Bestandtheilen der oberen Schichten

Digitized by Google

verunreinigten Proben möglich ist, das Tertiär-Gebirge, welches aus einer steten Wechsellagerung von Kohlensanden und Kohlenletten der Braunkohlenbildung besteht, mit einem dem Bohrbericht nach 2.43^{m} mächtigen Braunkohlenflötz bei circa 70^{m} Tiefe. Ein zweites, vom Bohrbericht bei 134.33—138.05^{m} Teufe verzeichnetes Braunkohlenflötz ergab sich nach den eingesandten Proben als vorwiegend nur durch Braunkohlen stark gefärbter Kohlenletten. Im Übrigen zeigen die Bohrproben das folgende Profil:

Bohrtabelle.

Tiefe in Metern.	Gesteinsart.	Mächtigkeit in Metern.	Formation.
0 — 4.5	Torf	4.5	Alluvium.
4.5 — 16.5	Sande und Grande	12.0	Diluvium.
16.5 — 54.5	Quarzsande und Kiese (diluvial umgelagert und gemengt)	38.0	Ob. Abth. — Märkische Braunkohlenbildung.
54.5 — 87.8	Vorwiegend Sande mit Letten und Kohlen.....	33.3	Ob. Abth. — Märkische Braunkohlenbildung.
87.8 — 156	Vorwiegend Letten mit Sanden und Kohlen.....	68.2	Unt. Abth. — Märkische Braunkohlenbildung.
156 — 189.2	Sehr feinkörnige Quarzsande.....	33.2	Marines Ober-Oligocän.
189.2 — 189.7	Thon bez. Letten mit zerstossenen Schaalresten (verunreinigt durch Diluvialgeröll in Folge der Wasserspülung	0.5	Marines Ober-Oligocän.
189.7 — 342.2	Sandsteine sowie Sandstein- und Porphyr-Conglomerate	152.5	Rothliegendes.

Die 33^{m} mächtige Folge sehr feinkörniger Quarzsande wird zwar nicht wie im Bohrloche Priorfliess durch einliegende marine Schaalreste charakterisirt, bei ihrer ausgesprochenen Feinkörnigkeit, Mächtigkeit und vollkommenen Übereinstimmung der Lagerung nehme ich aber umsoweniger Anstand, sie den oberoligocänen Sanden vom Priorfliess und Gr. Ströbitz (s. unten) gleichzustellen, als auch in weiterer Übereinstimmung an ihrer Basis eine thonige muschelführende Bank nicht zu fehlen scheint, aus welcher leider bestimmbare Reste nicht erhalten sind, während das folgende Bohrloch Rakow desto mehr aus dieser Schicht lieferte. In dem ersten und entscheidenden dieser beiden Bohrlöcher hat man es augenscheinlich noch mit den von GIEBELHAUSEN[1] unterschiedenen, durch vorherrschend sandige Bildungen gekennzeichneten nördlichen Braunkohlen-Bildungen zu thun, wie solches durch den, aus den Bohrproben sich ergebenden petrogra-

[1] a. a. O. S. 51.

Digitized by Google

phischen Charakter und die ihr Liegendes bildende mächtige Folge, wenn auch nur zum Theil hellfarbiger Thone bewiesen wird.

Ob im Bohrloche Hilmersdorf bei 87.8^m aber bereits auch die, durch vorherrschend thonige Bildungen gekennzeichnete südliche Abtheilung GIEBELHAUSEN's getroffen sei, könnte vor der Hand noch zweifelhaft sein (s. unten S. 870). Als ein besonderes Glück ist es daher anzusehen, dass schon ein, wenige Kilometer von Priorfliess entferntes Bohrloch, das Bohrloch Gr. Ströbitz, eine auf die Giebelhausen'sche Scheidung hindeutende Trennung der Braunkohlenbildung durch beinahe 24^m hellgraue fette Thone (Flaschenthone)[1] deutlich zeigt und endlich ein ziemlich auf der Grenze der nördlichen und südlichen Braunkohlenbildungen, bei Rakow unweit Drebkau, eines Bahnhofes der Cottbus-Grossenhainer Eisenbahn, angesetztes Bohrloch alle Zweifel löst.

3. Bohrloch Rakow.

Das am 25. Mai 1881 begonnene Bohrloch hat, wie die unten folgende Bohrtabelle nachweist, nach Durchsinkung von 81.5^m der nördlichen Braunkohlenbildungen, noch 58^m der durch ihre grauweissen Thone (Flaschenthone) charakterisirten südlichen Abtheilung durchörtert, ehe es die auch hier schliesslich darunter folgenden Ober-Oligocänbildungen traf. Diese letzteren bestehen wieder, wie in den vorgenannten Bohrlöchern aus 21.7^m feinen Quarzsanden ohne Schaalreste und 5.17^m Letten, aus welchen ich an Ort und Stelle die folgenden durch Professor VON KOENEN bestimmten Schaalreste sammelte:

Tritonium cf. flandricum DEKON.	*Buccinum Bolli* BEYR.
Fusus elongatus NYST.	**Nassa cf. Schlotheimi* BEYR.
Pleurotoma laticlavia BEYR.	*Natica Nysti* d'ORB.
Pleurotoma subdenticulata MÜNST.	*Dentalium Kickxii.*
» *Selysi* DEKON.	**Nucula praemissa* SEMP.
» *Duchastelii* NYST.	* » *compta* GOLDF.
Pleurotoma regularis DEKON.	* » *peregrina* DESH.
Cassis Rondeletii BAST.	*Arca cf. rudis* LINK.
Cassidaria nodosa SCH.	*Astarte cf. gracilis* MÜNST.

Tellina Nysti DESH.

Die mit einem * bezeichneten Arten sind nur aus Ober-Oligocän bekannt.

[1] S. d. Anmerk. auf S. 865.

Digitized by Google

Bohrtabelle
des Bohrloch Rakow bei Drebkau.

Tiefe in Metern.	Gesteinsart.	Mächtigkeit in Metern.	Formation.
0 — 9.5	Sand und Thonmergel	9.5	Diluvium.
9.5 — 91.0	Kiese, Sande, Letten und Kohlen	81.5	Märkische Braunkohlenbildung. — Obere Abtheilung (nördliche Bildung).
91.0 — 125.0	Vorwiegend blaugraue und weisse Thone mit eingelagerten Sandbänken	34.0	Märkische Braunkohlenbildung. — Horizont des Flaschenthones.
125.0 — 149.0	Sand, Kies und Kohlen	24.0	Märkische Braunkohlenbildung. — Untere Abtheilung (südliche Bildung).
149.0 — 175.9	Feiner Quarzsand mit grobsandiger Muschelbank an der Basis	26.9	Marines Ober-Oligocän.
175.9 — 268.5	Feste Kalksteine	92.6	Muschelkalk.

4. Das Bohrloch Gr. Ströbitz bei Cottbus.

Begonnen wurde dasselbe am 26. August 1878, beendet Anfang März 1879. Die Bohrproben ergeben folgende

Bohrtabelle.

Tiefe in Metern.	Gesteinsart.	Mächtigkeit in Metern.	Formation.
0 — 2.0	Sandiger Thon.....	2.0	Alluvium.
2.0 — 82.6	Sand, Grand und Thonmergel ...	80.6	Diluvium.
82.6 — 95.5	Sande, Kohlen und Letten	12.9	Märkische Braunkohlenbildung. — Obere Abtheilung (nördliche Bildung).
95.5 — 120.1	Weissgraue fette Thone.....	24.6	Märkische Braunkohlenbildung. — Horizont des Flaschenthones.
120.1 — 138.0	Sand, Letten und Kohlen	17.9	Märkische Braunkohlenbildung. — Untere Abtheilung (südliche Bildung).
138.0 — 177.0	Reine Quarz- bis Glimmersande an der Basis glauconitisch und mit Schaalresten	39.0	Marines Ober-Oligocän.
177.0 — 334.0	Kalksteine, Mergel und Sandstein	157.0	Kreideformation.
334.0 — 360.0	Letten und Dolomit	26.0	Keuperformation.

Die oberoligocänen glauconitischen Schichten in der Tiefe von 170.3—174.4^{m} enthielten folgende Mollusken:

Voluta fusus PH.
Fusus elegantulus juv. PH.
Cassis Rondeletii BAST.
Pleurotoma Duchastelii NYST.
Dentalium Kickxii NYST.
Leda gracilis DESH.
Nucula Chastelii NYST.
Venericardia tuberculata v. MST.
Cardium cingulatum GOLDF.
Pectunculus Philippi DESH.

Ausserdem fanden sich unbestimmbare Spindelstücke, *Serpula spec.*, Gehörknöchelchen von Fischen, sowie endlich *Lunulites hippocrepis* und *Dentalina spec.*

Digitized by Google

Die letzten beiden Bohrlöcher sind somit von doppeltem Werthe, da sie nicht nur die GIEBELHAUSEN'sche Annahme, nach welcher die südliche Abtheilung die untere bez. ältere ist, bestätigen, sondern auch beide Abtheilungen für mindestens oberoligocän, wo nicht jünger als oberoligocän, erkennen lassen. Nunmehr ist man auch im Stande, in dem oben bereits beschriebenen Bohrloch Hilmersdorf, wo die Braunkohlenbildung die, für eine der Abtheilungen ungewöhnliche Mächtigkeit von 101.5, oder vielmehr richtiger, das diluvial umgelagerte Braunkohlengebirge mitgerechnet, von 139.5^{m} erlangt, eine diese Mächtigkeit sofort erklärende directe Aufeinanderlagerung beider Abtheilungen der Braunkohlenbildung zu erkennen. Es beginnt hier deutlich bei einer Tiefe von 87.84^{m} das für die südliche Abtheilung charakteristische Vorherrschen thoniger Bildungen als Nebengestein, wenn auch die in den übrigen Bohrlöchern eine schärfere Trennung beider Abtheilungen abgebende Zwischenlagerung der hellen sogenannten Flaschenthone der Lausitz hier schon fehlt. Dieses Auskeilen der Flaschenthone nach Norden zu scheint somit eher stattzufinden, als das der südlichen Bildungen überhaupt, wenngleich auch deren Vorkommen sich bis jetzt nur auf den Rand des grossen Oligocänmeeres beschränkt.

Am wenigsten ergiebig für die Altersfeststellung der märkischen Braunkohlenbildung im Tertiär, aber keineswegs im Widerspruch mit den bisherigen Erfahrungen, waren die Bohrlöcher Dobrilugk und Bahnsdorf.

5. Das Bohrloch Dobrilugk.

Die Bohrung wurde schon in den Jahren 1872 bis 75 ausgeführt. Wie das im dritten Abschnitte folgende Profil ergiebt, steht das Bohrloch dem Südrande des Tertiärbeckens am nächsten und wurde demgemäss das ältere Gebirge hier schon bei 168.5^{m} erreicht. Darin ist denn auch wohl der Grund zu suchen, dass nichts von den marinen Oligocänschichten der vorbeschriebenen Bohrlöcher unter der märkischen Braunkohlenbildung erhalten worden, bez. zum Absatz gelangt ist. Die Braunkohlenbildung selbst aber kennzeichnet sich auf's Deutlichste als zu den nördlichen Bildungen GIEBELHAUSEN's gehörig, d. h. als obere Abtheilung in Folge ihrer Unterlagerung durch die sogenannten Flaschenthone der Lausitz.

Digitized by Google

Bohrtabelle.

Tiefe in Metern.	Gesteinsart.	Mächtigkeit in Metern.	Formation.
0 — 9.4	Geschiebemergel	9.4	Diluvium.
9.4 — 37.7	Quarzsande und Letten mit Braunkohlengeröll .....,	28.3	Umgelagertes Braunkohlengebirge.
37.7 — 127.0	Letten, Sande und Kiese mit Braunkohlenflötzen.....	89.3	Märk. Braunkohlenbildung. (Obere Abtheilung).
127.0 — 168.5	Weissgraue Thone	41.5	Flaschenthone der Braunkohlenbildung.
168.5 — 299.7	Thonstein, Kieselschiefer und Sandsteine mit Quarz-, Kalkspath- und anderen Einschlüssen	131.2	Älter als Rothliegendes.

6. Das Bohrloch Bahnsdorf.

Die Bohrung fand während des Winters 1880 auf 81 statt. Auch sie steht bereits ganz nahe dem Südrande des Tertiärbeckens, nur etwas östlicher als das vorgenannte Bohrloch. Von den Tertiärbildungen zeigte sich nur noch die der Lausitz eigenthümliche untere Abtheilung der märkischen Braunkohlenbildungen, die sogenannten südlichen Bildungen GIEBELHAUSEN's, mit den sie bedeckenden Flaschenthonen ausgebildet, obgleich möglicher Weise die Schichten von 118 bis 174^{m} sich in der Folge als ein besonderes Niveau nachweisen liessen. Darunter wurde bei 174^{m}, wie die folgende Tabelle zeigt, unmittelbar älteres Gebirge getroffen.

Bohrtabelle.

Tiefe in Metern.	Gesteinsart.	Mächtigkeit in Metern.	Formation.
0 — 1.3	Feinsandiger Lehm	1.3	Alluvium des Thales.
1.3 — 29	Sande und Grande mit Geschieben	27.7	Diluvium.
29 — 45.3	Blauweisser Thon	16.3	Flaschenthon der märk. Braunkohlenbildung. } Tertiär.
45.3 — 118	Sande, Kiese, Letten und Braunkohlen in Wechsellagerung	72.7	Märk. Braunkohlenbildung. (Untere Abtheilung.) } Tertiär.
118 — 174	Weissgraue Thone, Kiese und Sande in Wechsellagerung.....	56	Fraglicher Stellung.
174 — 213.1	Thonschiefer und Quarzconglomerat	38.9	Paläozoisch.

Digitized by Google

Bohrlöcher auf dem Vläming.

Im Vläming wurden bereits in den Jahren 1865—1868 drei Bohrlöcher bei Blönsdorf, Ottmannsdorf und Kropstedt niedergebracht, erreichten jedoch bei ihrer geringen, 100^{m} wenig überschreitenden Tiefe nicht die Unterlage des Tertiärgebirges. Dasselbe Resultat hatte schon früher ein, auf Privatkosten in Grüna, unweit Zinna bei Jüterbogk bis 800 Fuss tief niedergebrachtes Bohrloch ergeben. Das Bohrloch Blönsdorf mit seiner, 100^{m} nicht einmal voll erreichenden Tiefe (287$^{1}/_{2}$ Fuss) durchsank sogar nicht einmal die Diluvialschichten. Das zweite bei Ottmannsdorf wurde 501$^{1}/_{4}$ Fuss oder 157.32^{m} tief und stand allerdings von 261 Fuss oder 82^{m} bis zu Ende im Tertiär, hat aber ebensowenig wie das Dritte, bei Kropstedt niedergebrachte, 416 Fuss oder 130.5^{m} tiefe Bohrloch überhaupt andere als die aus wechselnden Sanden, Letten und Kohlen bestehenden Schichten der Braunkohlenbildung durchsunken.

7. Bohrloch Dahme.

Die im Jahre 1875 im östlichen oder sogenannten Niederen-Vläming in der Nähe von Dahme unter Anwendung des damals noch neuen Wasserspülverfahrens bis 318^{m} niedergebrachte Bohrung gab dagegen die gewünschten Aufschlüsse. Wie die unten folgende Bohrtabelle ergiebt, wurde bei 64^{m} das Tertiär erreicht und erwies sich bis zur Tiefe von 144^{m} als regelrecht ausgebildete Braunkohlenbildung, in welcher von 139—144^{m} Braunkohle erbohrt wurde, die bei der Analyse 8.8 und 8.6 Procent Asche, sowie nach der Bertier'schen Probe 3944.6 und 4742.9 Wärmeeinheiten ergab, also als gute Kohle zu bezeichnen ist. Dieselbe wurde denn auch Gegenstand staatlicher Muthung. Die Glimmersande, welche von 144—191^{m} folgen, müssen nach ihrer Lagerung und petrographischen Beschaffenheit den oberoligocänen Sanden aus 151—177 bez. 138—166^{m} der Bohrlöcher Priorfliess und Gr. Ströbitz parallel gestellt werden. Der Schichtencomplex von 191 bis 231^{m} kann als aus glauconitischen Mergeln und Sanden mit einliegenden rundlichen Kalksteinconcretionen bestehend, bezeichnet werden, ohne dass den Abgrenzungen derselben unter einander bei dem Mangel an Proben ein besonderes Gewicht beizulegen wäre.

Die Proben erschienen sogar zum Theil nur als verschiedenes Aufbereitungs-Material ein und derselben Schicht. Durch die nachträglich aus Nachfall dieser Schichten gewonnenen Schaalreste: *Cardium, Cardita spec., Cyprina* oder *Isocardia spec., Pleurotoma (regularis) Natica, Buccinum spec., Dentalium Kickxii* und einem Fischzahnfragmente lässt sich der geognostische Horizont als Mittel- oder Unter-Oligocän be-

Digitized by Google

stimmen, wenigstens befindet sich nichts auf ein jüngeres Niveau hinweisendes darunter.

Der durchgehends erhebliche Kalkgehalt, das Vorwiegen der thonigen gegenüber den sandigen Bildungen und die röthliche Färbung der sodann von 231^{m} an durchbohrten Schichten sprechen für deren Altersbestimmung als Unterer Buntsandstein.

Bohrtabelle
des Bohrloch Dahme.

Tiefe in Metern.	Gesteinsart.	Mächtigkeit in Metern.	Formation.
0 — 3	Moorerde	3	Alluvium.
3 — 64	Unterer Geschiebemergel wechsellagernd mit Spathsand und Grand	61	Diluvium.
64 — 144	Sande, Letten und Kohlen	80	Märk. Braunkohlenbildung.
144 — 191	Glimmersande	47	Marines Ober-Oligocän.
191 — 231	Glauconitsande und Mergel mit Kalksteinkugeln und Schaalresten	40	Marines Mittel- und Unter-Oligocän.
231 — 318	Sandstein und Schieferthon	87	Buntsandstein.

B. Bohrungen in der Berliner Gegend.

1. Das Wigankow'sche Bohrloch,
Berlin N. Chausseestr. 70.[1]

Zum Zwecke der Aufsuchung reichlichen Wassers für den Maschinenbetrieb des Wigankow'schen Geschäfts wurde die Bohrung im Jahre 1879 angesetzt.

Leider hielt man die den Diluvialschichten angehörenden Proben der oberen Teufe von 0—40^{m} nicht der Mühe des Aufhebens werth und konnten dieselben auch, als ich Kunde von dem Bohrloche erhielt, nicht mehr sicher ausfindig gemacht werden. Die erste als fremdartig, ihres Glimmergehaltes wegen aus 40^{m} aufbewahrte Probe eines tertiären Glimmersandes beweist aber deutlich den Beginn des Tertiärs in mindestens 40, wahrscheinlich schon bei 35^{m} unter Oberfläche, welche hier auf 4.5^{m} über Null des Berliner Dammmühlen-

[1] Vergl. Zeitschrift der Deutschen Geolog. Gesellsch. 1880, S. 821.

Digitized by Google

Pegels gerechnet wird. In den von 50 bis etwa 100^{m} folgenden Kohlensanden, welche nach ihrem Ansehen keinen Zweifel über ihre Zugehörigkeit zur Märkischen Braunkohlenbildung lassen konnten, führten die in der Tiefe von 85^{m} besonders grobkörnigen Schichten so reichliches und unter Druck stehendes Wasser, dass dasselbe zum Bohrloche ausspruddelte, auch in dem aufgesetzten Rohre noch bei etwa 1.5^{m} über dem Pankespiegel ausfloss und noch gegenwärtig fliesst. Der erste artesische Brunnen Berlins war somit gestossen und hätte als solcher schon der Wigankow'schen Bohrung eine allgemeine Bedeutung ertheilt. Aber, obgleich der eigentliche Zweck der Bohrung, da die Wasser auch reichlich genug flossen, vollständig erreicht war, hatte der Besitzer doch Interesse genug, sich des Weiteren durch Fortsetzung der Bohrung über den tieferen Untergrund seines Besitzthums zu unterrichten. Bei etwa 100^{m} begann eine Folge feiner weisser Glimmersande, welche bis 135^{m} fortsetzte. Hier traf man einen hellgrauen zähen Thon bez. Thonmergel, welcher mich in seinem Aussehen sofort an den, in kaum 10^{km} geradliniger Entfernung anstehenden Septarienthon von Hermsdorf erinnerte. Anfangs ganz versteinerungsleer, zeigten die, bei Fortsetzung der Bohrung bis zu 143^{m} gewonnenen letzten Bohrproben zwar zahlreiche Schaalreste, jedoch waren dieselben durch den Bohrer so zertrümmert, dass eine sichere Altersbestimmung des Thones trotzdem nicht möglich war. Erst die Ergebnisse einer fast gleichzeitigen Tiefbohrung in der Citadelle Spandau lösten durch paläontologische Beweise alle Zweifel und stellten das mitteloligocäne Alter des Thones klar.

2. Bohrung im Admiralsgartenbade
Berlin NW. Friedrichstrasse 102.

Im Juli 1879 begonnen, wurde die Bohrung zur Erschrotung geeigneter Wasser für die Badeanstalt während des Jahres 1880 von der Verwaltung fortgesetzt.

Da die Ansatzstelle ein früherer Brunnen ist, so fehlen demgemäss die Proben aus oberen Teufen (0—46^{m}), werden aber durch das, nur durch die Strasse getrennte, in der Literatur bereits durch von Bennigsen-Förder bekannt gewordene alte Otto'sche Bohrloch im Hofe des gegenüberliegenden Königlichen medicinisch-chirurgischen Friedrich-Wilhelms-Institutes ergänzt, und sind hiernach als diluvial zu bestimmen. Die durch von Bennigsen-Förder[1] seiner Zeit gemachten, auch von Lossen[2] wieder gegebenen Mittheilungen über dieses

[1] Erläuterung zur geog. Karte der Umgegend von Berlin 1843 S. 868 und S. 878.
[2] Reinigung und Entwässerung Berlins, S. 971 (Tabelle) und S. 1092.

Digitized by Google

OTTO'sche Bohrloch, lassen sich durch die noch in der Sammlung der Königlichen Geologischen Landesanstalt aufgefundenen Originalproben genauer feststellen oder berichtigen. Darnach bestätigt sich die lange angezweifelte von BENNIGSEN'sche Bestimmung der tieferen Proben als echte Braunkohlenletten vollständig.

Im OTTO'schen Bohrloch beginnt bei 52.8, im Admiralsgartenbade schon bei 46^{m} unter Oberfläche eine aus sandigen Letten und Sanden bestehende charakteristische Folge der Braunkohlenbildung, welche in dem neueren Bohrloche zum wenigsten bis 92^{m} Tiefe verfolgt worden ist. Tiefer folgten von 92 bis 130^{m} die gleichen Glimmersande, wie in dem WIGANKOW'schen Bohrloche, und wurde bei 130^{m} wieder der charakteristische fette, hellblaugraue Septarienthon erreicht, auch in demselben bis 149^{m} niedergegangen.

Bei der inzwischen durch die Tiefbohrung in der Citadelle Spandau bekannt gewordenen Mächtigkeit des Septarienthones von 160^{m} konnte eine baldige Durchbohrung dieses Thones und dem entsprechende Erschrotung von Wassern nicht in Aussicht gestellt werden, und erfolgte demgemäss die Einstellung der Bohrung.

3. Bohrung im Hofe des Königlichen Generalstabsgebäudes
Berlin NW. Moltkestrasse.

Auf dem Hofe des Erweiterungsbaues des Königlichen Generalstabs-Dienstgebäudes (Bureau der Landesvermessung) war im Jahre 1879 zur Gewinnung von Trinkwasser ein Abessynier-Brunnen bis auf 31^{m} Tiefe gesenkt worden. Da die Wasser aus dieser Tiefe sich als zu Genusszwecken unbrauchbar erwiesen, wurde die Bohrung fortgesetzt, blieb jedoch bis 76.9^{m} in Sanden und Granden der Diluvialformation, welche neben Braunkohlengeröllen mehrfach Schaalen von *Paludina diluviana* KUNTH führten. Aber auch in dem, bei genannter Tiefe erreichten Braunkohlengebirge wurden nur Kohlensande ohne irgend eine wasserabschliessende Schicht getroffen. Eine solche folgte erst innerhalb der bei 88.5^{m} beginnenden Glimmersande in einem sandigen Letten von 124.5—126.8^{m}. Leider waren jedoch die hierunter getroffenen Glimmersande mit eingelagerten sandigen Letten von 126.8—129.4 so fein, dass sie nur wenige und schwach aufsteigende Wasser gaben. Das Wasser erwies sich nach den angestellten Analysen theils als ein völlig brauchbares (2. Analyse), theils als ein salzhaltiges, geradezu ungeniessbares (1. und 3. Analyse) und scheinen selbst die kleinen dem Glimmersande eingelagerten Lettenbänkchen eine völlige Trennung der Wassercirculation bewirkt zu haben. In Rechnung auf grobkörnige, das Wasser leichter abgebende

Digitized by Google

Schichten zu kommen, war man indessen mit der Bohrung tiefer gegangen und bei 129.4^{m} in den fetten und festen Septarienthon gerathen, in welchem man, ohne Verrohrung, noch mehrere Meter tiefer hinabging, worauf die Bohrung eingestellt wurde.

4. Städtische Bohrung.

Berlin N. vor dem Grundstück Ackerstrasse 94.

Die Bohrung wurde im Jahre 1880 und 1881 von der städtischen Verwaltung ganz in der Nachbarschaft des früher in der Fabrik von Kraft und Knust, Ackerstrasse 92/96, niedergebrachten von Lossen[1] beschriebenen Bohrloches, des ersten Tertiärbrunnens Berlins, ausgeführt und erlaubt daher eine sichere Feststellung der Grenze zwischen Diluvium und Tertiär auch in letzgenanntem Bohrloche. Nach der in der Sammlung der geologischen Landes-Anstalt aufbewahrten vollständigen Bohrprobenfolge der neuen und tieferen Bohrung ist schon der bituminöse Sand des Kraft und Knust'schen Bohrloches von — 53.04 bis — 64.97 unter Null echter Kohlensand und das fraglich gewesene Gebilde von — 67.79 bis — 68.73 echter Kohlenletten, so dass also die Grenze zwischen Diluvium und Tertiär um fast genau 20^{m}, bis 53.04^{m} unter Null des Berliner Dammmühlen-Pegels (23.1 unter NN) hinaufrückt. In Übereinstimmung damit reicht, wie die städtische Bohrtabelle (s. a. S. 880) zeigt, dort die Diluvialformation bis 57.75 unter Oberfläche (20.15 unter NN) und wird die hier beginnende, ein 3.8^{m} mächtiges Braunkohlenflötz führende märkische Braunkohlenbildung abermals durch eine mächtige Folge feiner Glimmersande von dem mitteloligocänen Septarienthon getrennt.

5. Bohrung auf dem Hamburger Bahnhofe.

Berlin N. Invalidenstrasse.

Die jüngste der Tiefbohrungen Berlins, welche nach Durchsinkung der märkischen Braunkohlenbildung den mitteloligocänen Septarienthon erreicht hat, wurde Seitens der Direction der Berlin-Hamburger Eisenbahn-Gesellschaft zu dem Zwecke der Beschaffung eines guten Kesselspeisewassers in den Jahren 1880 bis 1882 ausgeführt. Sie erreichte das regelrechte Tertiärgebirge und zwar wieder die überall unter Berlin verbreitete Braunkohlenbildung erst bei 62 oder sogar erst bei 64.9^{m}, in welcher Tiefe sich noch eingeschobene deutliche Diluvialbildungen fanden, während darüber umgelagerte und zum Theil mit Diluvium gemengte Tertiärschichten schon bei 35^{m} unter Oberfläche beginnen. Auch hier tritt wiederum die schon mehr erwähnte Glimmer-

[1] Reinigung und Entwässerung Berlins, S. 1116.

Digitized by Google

sandfolge in fast genau derselben Mächtigkeit, wie im vorhergehenden Bohrloche und mit derselben schwachen Letten- oder Thoneinlagerung an der Basis, zwischen Braunkohlenbildung und Septarienthon auf. Der deutliche Glauconitgehalt der tiefsten etwa 2^m dieser Folge zeigt hier bereits — in voller Übereinstimmung mit der am meisten nach Westen d. h. in der Richtung nach Spandau gerückten Lage des Bohrpunktes — den Beginn der in Spandau zu grösserer Mächtigkeit entwickelten mitteloligocänen Stettiner Sande unmittelbar auf dem Septarienthon. Bei Erreichung des Septarienthones selbst wurde die Bohrung eingestellt.

Andere Tiefbohrungen Berlins haben gegenüber den im Vorstehenden beschriebenen ein geringeres Interesse, da sie nichts Neues bieten und nur die regelmässige Forterstreckung der märkischen Braunkohlenbildung unter ganz Berlin beweisen.

Bis jetzt giebt es im eigentlichen Berlin, wenigstens in der ganzen Breite des Berliner Hauptthales, keine Bohrung, welche bei 100^m Tiefe nicht im Braunkohlengebirge steht, und nur zwei [die beschriebene Bohrung im Generalstabsgebäude und eine 100^m überhaupt nicht erreichende in der Kürassier-Kaserne (Alexandrinenstrasse)] welche dieselben nicht in spätestens 58^m Tiefe erreicht haben. Eine jener flacheren Bohrungen, die Bohrung in der Leipzigerstrasse 58 bei den Colonnaden, hat die Braunkohlenbildung sogar auch durchsunken und bei 97.4^m noch die den Septarienthon unmittelbar bedeckenden Glimmersande erreicht.

6. Tiefbohrung in der Citadelle Spandow.

Zum Zwecke der Erlangung brauchbaren Trinkwassers war im Hofe der Citadelle zu Spandow im Jahre 1879 ein Bohrloch auf 107^m Tiefe niedergebracht. Da dasselbe aber kein gutes Wasser lieferte, so wurde dicht daneben ein auf grössere Tiefe berechnetes neues Bohrloch mittelst Wasserspülverfahrens abgeteuft. Das Abteufen begann am 15. Februar 1880 und durchsank das Bohrloch zunächst bis zu 119.6^m Tiefe Diluvialschichten. Darunter folgten bis auf 389^m Schichten der Tertiärformation und zwar bis 137.6^m Glimmersande, wie sie schon aus sämmtlichen Tiefbohrungen Berlins als eine Zwischenstufe zwischen der märkischen Braunkohlenbildung und dem mitteloligocänen Septarienthon beschrieben worden sind, dann zunächst bis 141.7^m glauconitische Letten, und sodann bis 154.1^m glauconitische muschelreiche Sande, die durch ihre, hauptsächlich aus Pelecypoden (*Pectunculus Philippi* Desh., *Cardium cingulatum* Goldf., *Cyprina rotundata* A. Braun) bestehenden Schaalreste, sowie durch den Umstand, dass unter ihnen Septarien-

Digitized by Google

thon folgt, sich als Äquivalent des Stettiner Sandes (oberen Meeressandes Sachsens) erwiesen haben und das Mittel-Oligocän beginnen.

Unter dem Stettiner Sande endlich folgt bis zu einer Tiefe von 313.6^{m} echter Septarienthon, der sich durch nichts von dem im Wigankow'schen Bohrloche in Berlin angetroffenen unterscheidet, aber durch die in ihm aufgefundene Fauna auch mit Sicherheit als solcher festgestellt werden konnte. Ich sammelte aus den Bohrproben, namentlich der Tiefe von 250 — 313^{m}: *Nucula Chastelii* Nyst., *Leda Deshayesiana* Nyst. *Cardium comatulum* Braun, *Pecten permistus* Beyr., *Natica glaucinoides* Nyst., *Cancellaria evulsa* Sal., *Fusus rotatus* Beyr., *Pleurotoma Moreni?* de Kon., *Fusus elongatus* Nyst., *Dentalium seminudum* Desh., *Dentalium Kickxii* Nyst. In Proben des Thones aus gleicher Tiefe,[1] welche ich Herrn Dr. Bornemann jun. übersandte, fand derselbe des Weiteren an Foraminiferen: *Textularia lacera* Rss., *Textularia attenuata* Rss., *Rotalia Akneriana* d'Orb., *Globigerina spirata* Born. sen., *Guttulina rotundata* Born. sen., *Guttulina (Polymorphina) lanceolata* Rss., von denen die ersten fünf von Hermsdorf, die letzten von Offenbach bekannt sind, sodass auch dadurch das mitteloligocäne Alter des Thones bestätigt wird.

Es folgte in einer Mächtigkeit von 72.2^{m} von 314 bis 385.75^{m} Tiefe eine Ablagerung von glaukonitischem Sande und darunter als tiefste dem Tertiär angehörende Schicht bis 389^{m} Mächtigkeit ein glaukonitischer Letten. In dem grünen, Schwefelkies-Concretionen enthaltenden Sande wurden zwei Bänkchen festen Gesteines von 0.1 resp. 0.15^{m} Mächtigkeit getroffen. Dieselben stellen nur eine in den Sanden liegende, zu festem Kalksandstein erhärtete Austernbank dar, welche andere Reste nicht zu enthalten scheint. Die Auster erwies sich als der *Ostrea Ventilabrum* Goldf. angehörig, welche als bezeichnende Versteinerung ebenso in den unteroligocänen Sanden von Egeln, wie in Belgien und im Osten bei Gross- und Klein-Kuhren, in dem sogenannten Krant der bernsteinführenden Tertiärbildung des Samlandes verbreitet ist. Die Annahme ist hiernach wohl begründet, dass dem erbohrten Schichtensysteme unter dem Septarienthone in Spandow das gleiche unteroligocäne Alter zukommt

Unter dem Tertiär folgen nun von 385 bis 411^{m} lichte, hellgraue bis ins weissliche gehende, zum Theil dolomitische Kalksteine und Mergel. Nach unten werden die Mergel dunkler grau, thoniger, und gehen in eine Folge von kalkarmen Thonen und Letten mit grauen, grüngrauen und rothen Färbungen über, in welchen sich überall Gyps

[1] Verschiedentliche Proben des Thones aus oberen Teufen, wo derselbe von grösseren Schaalresten leer war, hatten auch keine mikroskopische Fauna ergeben.

Digitized by Google

eingelagert findet. Diese Schichtenfolge reicht bis zu der überhaupt erbohrten Tiefe von 487.77^{m} und konnte mit Sicherheit in ihrer geognostischen Stellung nicht erkannt werden, da mit Ausnahme einiger winziger Ganoiden-Schuppen aus der Tiefe von 462^{m} keinerlei organische Reste gefunden wurden, nach dem petrographischen Charakter aber die gesammte Schichtenfolge ebenso gut dem mittleren Keuper (event. dem oberschlesischen vergleichbar), als dem mittleren Muschelkalke zugerechnet werden kann.

C. Gesammtergebniss.

In der, auf nächstem Blatte folgenden Tabelle gebe ich zunächst eine Zusammenstellung sämmtlicher im Vorhergehenden besprochener Bohrergebnisse. Aus denselben ergiebt sich zunächst, dass die aus den früheren Beobachtungen in der Provinz Sachsen und am Harzrande genügend bekannte unteroligocäne Braunkohlenbildung in keinem der Bohrlöcher getroffen wurde. Auch von dem südlich Burg, in Pietzpuhl, seiner Zeit gestossenen Bohrloche, dem einzigen, welches ausserdem östlich der Elbe das marine Oligocän bisher durchsunken hatte, sagt BEYRICH ausdrücklich,[1] dass unter dem Septarienthon »von 405—591′ sandige und thonige Schichten jedoch keine Braunkohle« folgen. Es scheint somit, dass die unteroligocäne Braunkohlenbildung sich auf den Harzrand bis in die Gegend von Halle und Leipzig beschränkt, und somit vielleicht passend jetzt als ältere, subherzyne Braunkohlenbildung zu bezeichnen sein wird. Demgegenüber erweist sich die, in den sämmtlichen Bohrlöchern gefundene Braunkohlenbildung der Mark durchweg auf marinem Oligocän ruhend und stimmen hiermit auch die bei Leipzig gemachten Beobachtungen[2] überein, denen zu Folge auch dort eine jüngere Braunkohlenbildung über marinem Oligocän lagert, während unter demselben auch die ältere noch nachgewiesen ist. Der Altersfolge entsprechend gehe ich erst später auf diese, somit jüngeren Braunkohlenbildungen ein.

Von besonderer Wichtigkeit für das Verständniss des märkischen wie des nordostdeutschen Tertiärs überhaupt, erscheint nunmehr in erster

---

[1] Zeitsch. d. D. G. G. I. S. 85.

[2] CREDNER, das Oligocän des Leipziger Kreises in Zeitsch. d. D. G. G. 1878 S. 641.

Digitized by Google

Zusammenstellung der Bohrergebnisse aus der Nieder-Lausitz, dem Vläming und der Berliner Gegend.

Durchbohrtes Gebirge.		Nieder-Lausitz										Vläming		Berliner Gegend											
		Linie (Dobrilugk-Dahme)								(Senftenberg-Cottbus)															
		Bahnsdorf bei Senftenberg.		Rakow.		Gr. Ströbitz bei Cottbus.		Priorfliess bei Cottbus.		Dobrilugk.		Hilmersdorf bei Schlieben.		Dahme.		Wigankow Chausseestrasse 70.		Generalstab Moltkestrasse.		Admiralsg. Bad Friedrichstrasse 102.		Städtischer Brunnen Ackerstrasse 94.		Hamburger Bahnhof Invalidenstrasse.		Spandau.	
Alluvium und Diluvium.	von	0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0	
	bis	29	29m	10	10m	83	83m	32	32m	38	38m	18	18m	64	64m	35	35m	77	77m	46	46m	58	58m	62	62m	120	120m
Sande, Letten und Kohlen der Braunkohlenbildung (märkische)	von	fehlt		10	81	83	13	32	34	38	89	18	70	64		35	65	77	12	46	46	58	31	62	35	fehlt	
	bis			91		96		66		127		88				100		89		92		89		97			
Meist grauweisse Thone (Flaschenthone)	von	29	16	91	34	96	24	66	63	127	41	88			80												
	bis	45		125		120		129		168																	
Sande, Letten und Kohlen der Braunkohlenbildung (subsudetische)	von	45	129	125	24	120	18	fehlt		fehlt			68			fehlt		fehlt		fehlt		fehlt		fehlt		fehlt	
	bis	174		149		138						156		144													
Feine Quarz- bis Glimmersande mit etwas Letten an der Basis (Marines Ober-Oligocän)	von	fehlt		149	27	138	39	129	54	fehlt		156	34	144	47	100	35	89	40	92	38	89	43	97	42	120	22
	bis			176		177		183				190		191		135		129		130		132		139		142	
Stettiner Sand- und Septarienthon (Marines Mittel-Oligocän)	von	fehlt		fehlt		fehlt		fehlt		fehlt		fehlt		191		135	28*	129	4*	130	19*	132	12*	139	2*	142	172
	bis													163	40			133		149		144		141		314	
Glauconitische Sande mit etwas Letten a. d. Basis (Marines Unter-Oligocän)	von															*Bohrung im Septarienthon eingestellt										314	75
	bis													231												389	
Älteres Gebirge	von	174	39	176	92	177	183	183	184	168	132	190	152	231	87											389	97
	bis	213		268		360		367		300		342		318												486	

Digitized by Google

Linie die durch die Tiefbohrungen möglich gewordene Erkenntniss der oberoligocänen Meeressande, welche sich durch grosse Feinheit des Korns und grösstentheils Glimmergehalt auszeichnen. Sie wurden in den Lausitzer Bohrlöchern direct durch marine Schaalreste gekennzeichnet (S. 866, 868 und 869) und liessen sich in der Mittelmark (Spandau und Berlin) wie auf dem niederen Vläming (Dahme) in sämmtlichen Bohrlöchern wiedererkennen (s. die Tabelle auf S. 18) und ist die Übereinstimmung nicht nur in Beschaffenheit und Lagerung, sondern selbst in der ungefähren Mächtigkeit eine vollständige. Aber sie bedecken auch, wie an anderer Stelle nachgewiessen werden soll, das marine Mittel-Oligocän von Buckow, lassen sich in den schon von BEHM seiner Zeit unterschiedenen,[1] aber später unbeachtet gelassenen Glimmersanden von Züllchow, Cavelwisch und Neuendorf bei Stettin wiedererkennen, sind unter den zahlreichen mecklenburgischen Glimmersanden, namentlich der, durch ihre, die gleiche Fauna aufweisenden, Sternberger Kuchen gekennzeichneten Gegend zu vermuthen und verstecken sich jedenfalls auch noch unter den von CREDNER[3] bereits für oberoligocän erkannten, aber noch zu der sie bedeckenden Braunkohlenbildung der Leipziger Gegend gerechneten mächtigen Glimmersanden.

Was nun die marinen Oligocänbildungen im Ganzen anbetrifft, so fällt es auf, dass sowohl da, wo sämmtliche drei Abtheilungen des Oligocän ausgebildet getroffen wurden (Bohrloch Dahme und Spandau), als auch da, wo nur Ober- und Mittel-Oligocän aufgeschlossen wurde (sämmtliche fünf Bohrungen in Berlin) dieselben durch keine Braunkohlen- oder sonstige Süsswasserbildung getrennt gefunden wurden, und somit auf einen ununterbrochenen Absatz aus dem Oligocänmeere schliessen lassen. Das marine Unter-Oligocän des Spandauer Bohrloches ist in einer Mächtigkeit von 75^m dem älteren festen Gebirge unmittelbar aufgelagert und durch eine, aus *Ostrea Ventilabrum* GOLDF. zusammengesetzte Austernbank, s. S. 878, charakterisirt. In regelrechter Auflagerung folgt das marine Mittel-Oligocän als Thon- und Sandfacies (Septarienthon und Stettiner Sand) vertreten und zu seiner bisher grössten Mächtigkeit von zusammen 172^m entwickelt. Unmittelbar darüber lagert das marine Ober-Oligocän der eben besprochenen Folge von Glimmersanden in einer Mächtigkeit von 22^m, welche sich schon unter dem benachbarten Berlin bis zu 43^m aufnimmt und in Spandau offenbar nur durch eine ungewöhnlich tiefe diluviale Auswaschung beeinträchtigt ist.

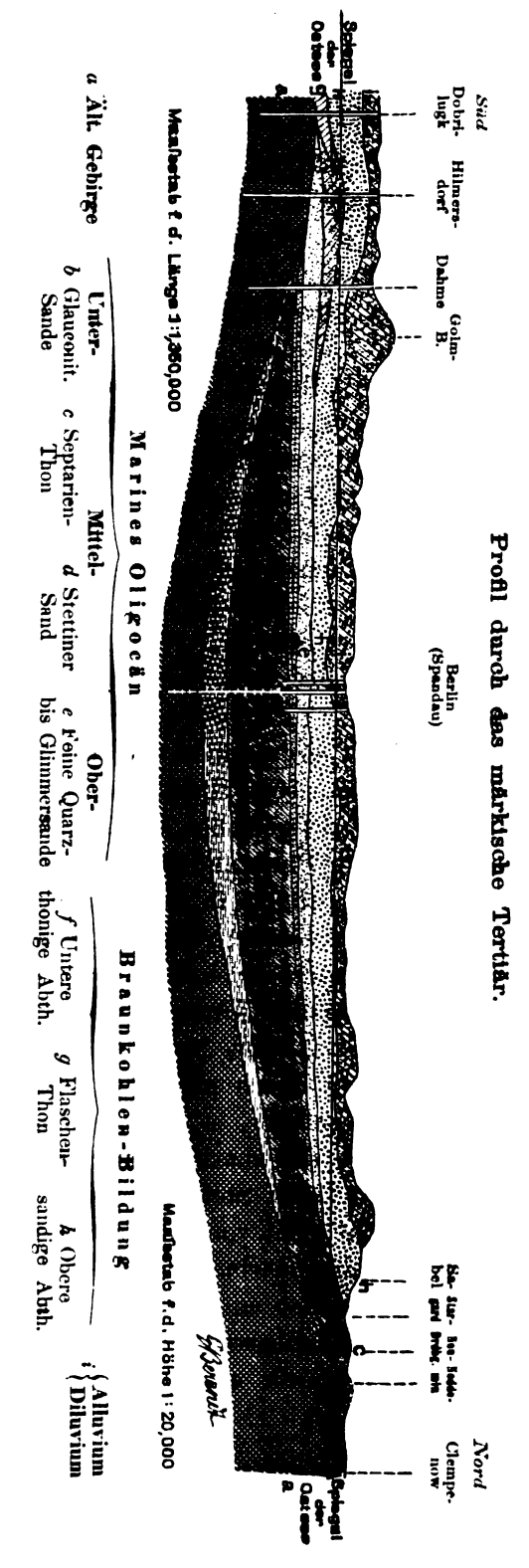
---

[1] Zeitsch. d. D. G. G. 1857, S. 342.
[2] A. a. O. S. 639.

Digitized by Google

Das nebenstehende, auf einfacher Wiedergabe der Bohrergebnisse und Verbindung derselben mit den nördlicher gelegenen Tagesaufschlüssen beruhende Profil, dessen genauerer Verlauf auf dem Übersichtskärtchen zu ersehen ist, durchschneidet die grosse nordostdeutsche Oligocän-Mulde ziemlich in ihrer ganzen Breite. Der südliche Rand dieser Mulde, oder besser des tiefsten Theiles derselben wird — abgesehen von der grossen Halle-Leipziger-Bucht — durch eine Linie von Hohenwarte und Magdeburg über Pietzpuhl und Königsborn, Möckern-Lohburg, Dahme-Hilmersdorf und Cottbus-Rakow ziemlich gut angedeutet, während der entsprechende nördliche Rand noch klarer durch zu Tage tretende Schichten von Malchin über Neu-Brandenburg und Stettin zu verfolgen ist.

In der Tiefenlinie dieser grossen nordostdeutschen Tertiär-Mulde gelegen, zeigt das Spandauer Bohrloch somit die gesammte Folge des marinen Oligocäns, ohne jegliche Unterbrechung durch Braunkohlenbez. Süsswasserbildungen, gerade so wie an den Stellen, wo man überhaupt marines Ober-Oligocän bisher durchsunken hat, d. h. in der Fortsetzung dieser Muldenlinie bei Wiebke und noch weiter westlich am Doberg bei Bünde in



Westphalen. Während am erstgenannten Punkte, soweit mir bekannt, bisher aus Mangel an Aufschlüssen unter dem Ober-Oligocän nur Mittel-Oligocän aufgedeckt worden ist, bestimmt von KOENEN schon in seiner diesbezüglichen Mittheilung vom Jahre 1866[1] die Schichten von der Schwarzhorst beim Doberg für zweifellos unteroligocän und schliesst mit den Worten (S. 290) »Falls der blaue Thon sich nun als mitteloligocän erweisen sollte, so hätten wir hier die sämmtlichen Oligocänschichten in directer Überlagerung zusammen.«

Die nächste nach Süden zu befindliche Tiefbohrung (s. die Karte) ist, da das tiefe Bohrloch in Sperenberg, als auf einer Insel älteren Gebirges angesetzt und niedergebracht, nicht in Betracht kommt, daher auch gar nicht erwähnt wurde, das etwa 80^{km} entfernte Bohrloch bei Dahme. Als dem Rande des grossen Oligocänbeckens bereits erheblich nahe gerückt, ist marines Unter- und Mittel-Oligocän, das der schlecht erhaltenen Bohrproben halber nicht von einander getrennt werden konnte, hier schon auf eine Gesammtmächtigkeit von 40^{m} zusammen geschmolzen, lagert aber auch hier direct dem älteren festen Gebirge auf, während das marine Ober-Oligocän noch in der gleichen Mächtigkeit wie in der Mittelmark und der Lausitz durch eine 47^{m} mächtige Glimmersandfolge ausgebildet erscheint.

Die Reihe der noch südlicher gelegenen, schon dem Rande des Oligocänbeckens selbst angehörenden Bohrlöcher der Nieder-Lausitz, deren nur zwei in das auf Seite 882 gegebene Profil hineinfallen, zeigt nichts mehr von marinem Unter- oder Mittel-Oligocän. Statt dessen lagert aber das noch immer zu voller Mächtigkeit entwickelte marine Ober-Oligocän überall unmittelbar dem älteren festen Gebirge auf.

Über dieser — wo also nicht direct älteres Gebirge nachgewiesen ist (Bahnsdorf, Dobrilugk und Sperenberg) in allen Tiefbohrungen der Mark Brandenburg nachgewiesenen marinen Oligocändecke des älteren Gebirges und zwar über der oberoligocänen Glimmersandfolge, zeigen, wie bereits Eingangs dieses Abschnittes erwähnt, sämmtliche Bohrlöcher, mit einziger Ausnahme des Spandauer Bohrloches, in welchem die diluviale Auswaschung bis in ungewöhnliche Tiefe hinabreicht, die durch den Bergbau hinlänglich bekannten Sande, Letten und Kohlen der märkischen Braunkohlenbildung.

Betrachtet man nun aber die Bohrergebnisse genauer, so zeigt sich, dass auch diese jüngere oder märkische Braunkohlenbildung noch in zwei Abtheilungen zu sondern ist, wie solches schon seiner Zeit von GIEBELHAUSEN erkannt, erst jetzt durch die Tiefbohrungen aber ausser Zweifel gestellt worden ist. Während die jüngere Abtheilung,

[1] Zeitsch. d. D. G. G. 1866, S. 287.

Digitized by Google

die sogenannten nördlichen Bildungen GIEBELHAUSEN's, welche bis nach Mecklenburg und Pommern hinein in auffälliger Übereinstimmung der Oberfläche nahe liegt, sich bis weit in die Lausitz hinauf zieht [s. die vorstehende Tabelle und das darauf gegründete Profil (S. 882), und eigentlich nur in Bohrloch Bahnsdorf nicht getroffen wurde] scheint sich die ältere, GIEBELHAUSEN's südliche Bildungen, nur auf die Lausitz zu beschränken (s. S. 870) und zwar hier einerseits nach Sachsen bis in die Gegend von Leipzig,[1] andererseits nach Schlesien hinein eine gewisse Randbildung, um den nördlichen Fuss der Sudeten zu bilden, so dass ich sie mit dem Namen der subsudetischen von den märkischen unterscheiden möchte. Wie aus den Bohrlöchern Bahnsdorf, Rakow und Gross-Ströbitz am deutlichsten hervorgeht, trennt beide Abtheilungen eine 20 bis einige 30^m mächtige Zwischenlagerung von weissen Thonen, dem sogenannten Flaschenthone der Lausitz.[2] Aber auch, wo solches nicht direct der Fall (Hilmersdorf, Dahme), kennzeichnet diese in der Lausitz vielfach zu Tage tretende subsudetische Braunkohlenbildung, gegenüber dem vorherrschend sandigen Charakter der märkisch-pommerschen Braunkohlenbildung, eine häufige Einlagerung thoniger Schichten, ja zuweilen geradezu ein Vorwiegen des Thones, welcher eine enge Zusammengehörigkeit, stellenweise sogar eine stattgefundene Verschmelzung mit dem Flaschenthone um so mehr nahe legt, als letzterer auch hinsichts seiner Verbreitung sich eng an die genannte Braunkohlenbildung, oder, was dasselbe sagen will, an den südlichen Rand des grossen Oligocänbeckens anschliesst.

Es erübrigt noch zu prüfen, welche Anhaltspunkte zur Bestimmung des speciellen Alters der märkischen wie der subsudetischen Braunkohlenbildung gegeben sind. Dass beide mindestens oberoligocän sind, folgt aus der regelmässigen Unterlagerung beider durch marine Ober-Oligocänbildungen (s. Seite 880).

Wenn aber schon einmal ein Altersunterschied zwischen beiden Abtheilungen besteht, von denen sich schon GIEBELHAUSEN schwer vorstellen konnte, wie beide »aus derselben Wasserbedeckung nebeneinander gleichzeitig sich absetzen konnten«, so liegt wohl die Vermuthung nahe, dass die subsudetischen Braunkohlen eine schmale, südliche Umrandung des Oligocänmeeres zum Schluss der Oligocänzeit bildeten, gerade sowie die subherzynischen eine solche zum Beginn der Oligocänzeit ausmachten, während die überall, bis hinab zur Ostsee, die Oberfläche bedeckenden märkischen Braunkohlen schon

[1] Die von CREDNER a. a. O. S. 640 beschriebenen »weissen oder lichtgrauen plastischen Thone« sind hier entscheidend.

[2] S. Anmerk. S. 865.

Digitized by Google

den Beginn der Miocänzeit bezeichnen. Es stimmt damit nicht nur der nach den Untersuchungen HEER's, GÖPPERT's, ENGELHARDT's u. A. stets auffallend jugendlich gefundene Charakter unserer ganzen nordostdeutschen Braunkohlenflora, sondern vor Allem auch die von KOCH schon seiner Zeit behauptete,[1] von EUG. GEINITZ unlängst nachgewiesene,[2] Zugehörigkeit der Braunkohlen Mecklenburgs und der Priegnitz zum Miocän.

[1] Zeitschr. d. D. G. G. VIII S. 266.
[2] Die Flötzformationen Mecklenburgs S. 116 ff.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALTSVERZEICHNISS

Seite

30. Aus dem Bericht über die Leibniz-Sitzung: Antrittsrede von Hrn. Fr. Eilhard Schulze und Antwort des Classensecretars Hrn. E. du Bois-Reymond 315
31. Weierstrass: Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Erste Mittheilung 321
32. Kronecker: Über das Dirichlet'sche Integral 329
33. E. du Bois-Reymond: Lebende Zitterrochen in Berlin. Zweite Mittheilung 355
34. Himstedt: Eine Bestimmung des Ohms. 415
35. Kronecker: Zur Theorie der elliptischen Functionen 421
36. Kronecker: Über den Cauchy'schen Satz 445
37. Weierstrass: Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Zweite Mittheilung 449
38. Noetling: Vorläufiger Bericht über die geognostische Beschaffenheit des Ost-Jordanlandes . . 467
39. Weber: Das Wärmeleitungsvermögen der tropfbaren Flüssigkeiten 469
40. Wien: Über den Einfluss der ponderabeln Theile auf das gebeugte Licht 477
41. Hofmann: Über die Sulfocyanursäure 481
42. Hofmann: Über das Amin des Pentamethylbenzols 493
43. Kronecker: Über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel 501
44. Berendt: Das Tertiär im Bereiche der Mark Brandenburg (hierzu Taf. V) 523

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE

aus den Jahren 1883 und 1884.

(In Commission in Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.)

Schrader: Gedächtnissrede auf Justus Olshausen . . . . . M. 1.00
Hagen: Geschwindigkeit des strömenden Wassers in verschiedenen Tiefen, untersucht nach den von Brünings ausgeführten Messungen . . . . . » 4.00
Tobler: Die altvenezianische Übersetzung der Sprüche des Dionysius Cato . . . . . » 3.50
Eichler: Beiträge zur Morphologie und Systematik der Marantaceen . . . . . » 6.30
Kronecker: Über bilineare Formen von vier Variabeln . . . . . » 2.50
Schrader: Zur Frage nach dem Ursprunge der altbabylonischen Cultur . . . . . » 3.00
Tobler: Über das Buch des Uguçon da Laodho . . . . . » 5.00
Dillmann: Über die Regierung, insbesondere die Kirchenordnung des Königs Zar'a-Jacob . . » 5.00
Imhoof-Blumer: Die Münzen der Dynastie von Pergamon . . . . . » 5.00
Roth: Beiträge zur Petrographie plutonischer Gesteine. IV. . . . . » 7.50
Virchow: Über alte Schädel von Assos und Cypern. . . . . » 5.00
Wiedemann: Über die Bestimmung des Ohm . . . . . » 4.50

Studer: Über die von S. M. S. Gazelle auf der Reise um die Erde 1874—1876 gesammelten Isopoden . . . . . » 2.50
Marshall: Agilardiella radiata . . . . . » 1.50
Krabbe: Über das Wachsthum des Verdickungsringes und der jungen Holzzellen in seiner Abhängigkeit von Druckwirkungen . . . . . » 4.50
Studer: Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—1876 gesammelten Asteriden und Euryaliden . . . . . » 4.50
Freudenthal: Die durch Averroes erhaltenen Fragmente Alexander's zur Metaphysik des Aristoteles » 3.00
Bohn: Der Tempel des Dionysos zu Pergamon . . . . . » 1.50

Register für die Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie zu Berlin vom Jahre 1874 bis 1881 M. 3.00

Digitized by Google

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschaften in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch die Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht

---

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, und zwar

die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,

» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,

» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Ausgabe des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1884 nicht zugekommen sein sollten, werden hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamationen nur in Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1885 angebracht werden.

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchhändlerischen Bezuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann) in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungsberichte« oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten zu liefern. Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der Buchhandlung in Verbindung setzen.

Digitized by Google

13,892

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT VIII.

OCTOBER 1885.

MIT TAFEL VI.

BERLIN 1885.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN.

Digitized by Google

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verrichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Separatabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt der geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. Für alle übrigen Theile derselben sind nur in jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

Digitized by Google

45. Über Scheitelwachsthum und Blattstellungen.

Von S. Schwendener.

(Vorgetragen am 22. October; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XL]; — ausgegeben am 29. October.)

Hierzu Taf. VI.

Über die Zelltheilungen, welche das Scheitelwachsthum der Gefässpflanzen charakterisiren, sind in neuerer Zeit verschiedene Abhandlungen erschienen, welche zum Theil mit meinen früheren Angaben »über Scheitelwachsthum mit mehreren Scheitelzellen«[1] im Widerspruch stehen und direct oder indirect auch die Schlussfolgerungen berühren, die ich in meiner Theorie der Blattstellungen in Bezug auf die Anlegung der seitlichen Organe gezogen habe.[2] Von diesen Veröffentlichungen seien hier bloss die Arbeiten von H. Dingler[3] und P. Korschelt[4] erwähnt, welche beide für die Ansicht eintreten, der Phanerogamenscheitel wachse mit einer einzigen Scheitelzelle. Der erstgenannte Autor bringt zugleich, dem Ideengang Nägeli's folgend, die obersten Blattanlagen mit den von der Scheitelzelle abgeschnittenen Segmenten in einen bestimmten Zusammenhang, dessen Vorhandensein ich bestreite. Sodann hat G. Berthold bezüglich meiner Auffassung der Spiralstellungen bei Florideen sich in der Erwiderung auf meine Kritik[5] der einschlägigen Darlegung in seinen Beiträgen zur Morphologie und Physiologie der Meeresalgen[6] abermals dahin ausgesprochen,[7] dass bei den Florideen unzweifelhaft Spiralstellungen vorkommen, welche nicht durch Contactwirkungen bedingt sein können. Alle diese Controversen habe ich in letzter Zeit nochmals sorgfältig geprüft, und die folgenden Mittheilungen sollen darthun, dass ich keine Veranlassung habe, meine früher ausgesprochene Ansicht zurück zu nehmen.

[1] Sitzungsber. der Gesellschaft naturf. Freunde zu Berlin, 1879.

[2] Theorie der Blattstellungen, S. 87—93 (1878).

[3] Hermann Dingler, Über das Scheitelwachsthum des Gymnospermen-Stammes, 1882.

[4] Paul Korschelt, Zur Frage über das Scheitelwachsthum bei den Phanerogamen. Pringsheim's Jahrb. Bd. XV.

[5] Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. 1883, S. 769.

[6] Pringsheim's Jahrb. Bd. XIII (1882).

[7] Bot. Zeitung, 1883, S. 729.

Digitized by Google

1. Das Scheitelwachsthum.

Das Vorkommen von vier Scheitelzellen in den von mir untersuchten Wurzeln der Marattiaceen betrachte ich als eine wohl constatirte Thatsache, die keinen Zweifel gestattet. Die Präparate, auf die ich mich stütze, waren so klar, das Gewebe überdies so grosszellig, dass mir ein Irrthum in der Deutung ausgeschlossen erscheint. Auch bemerke ich ausdrücklich, dass ich neuerdings wieder einige Medianschnitte (durch die Wurzel von *Marattia Verschaffelti*) beobachtet habe, welche mit den in meiner früheren Veröffentlichung[1] abgebildeten durchaus übereinstimmten. Ob ausnahmsweise auch andere Theilungen stattfinden, mag dahingestellt bleiben; ich betone aber, dass ich im Ganzen eine ziemliche Anzahl von mehr oder weniger gelungenen Schnitten gemustert habe, ohne auch nur einen zu finden, der entschieden auf ein abweichendes Scheitelwachsthum hingewiesen hätte. Nach meiner Überzeugung liegt also hier eine unabweisbare Thatsache vor, neben welcher die von Dingler geäusserten »theoretischen« Bedenken nicht aufkommen können.

Aus einer in neuester Zeit erschienenen Abhandlung von F. O. Bower[2] geht ferner hervor, dass ganz ähnliche Wachsthumsvorgänge, characterisirt durch zwei nebeneinander liegende Scheitelzellen im Medianschnitt, auch bei den Osmundaceen vorkommen. Ich wüsste wenigstens nicht, welche andere Deutung man den vom Autor beigegebenen Abbildungen (deren Richtigkeit vorausgesetzt) noch geben könnte.

Was sodann die Gymnospermen betrifft, so hat der Beobachter hier allerdings grössere Schwierigkeiten zu überwinden. Die Zellen der Scheitelkuppe sind nämlich erheblich kleiner als bei *Marattia* oder *Angiopteris* und ihre Gruppirung lässt die erwarteten gemeinsamen Züge häufig genug gar nicht erkennen. Man ist also immer auf diejenigen Präparate angewiesen, die irgend ein Zellnetz und einige Hauptwände desselben sicher zu zeichnen gestatten. Wenn nun Dingler und Korschelt vorzugsweise nach dreiseitigen Scheitelzellen gesucht und solche auch gefunden und abgebildet haben, so bin ich natürlich nicht in der Lage, die Richtigkeit ihrer Angaben für die concreten Fälle, auf die sie zunächst Bezug haben, zu bestreiten; denn die Dinge, um die es sich handelt, lassen sich nur am Präparat, nicht an der Zeichnung controliren. Ich glaube aber dieselbe Rücksichtnahme auch für meine eigenen Angaben, soweit sie sich auf bestimmte Beobachtungen beziehen, beanspruchen zu dürfen.

---

[1] Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1882, S. 183.

[2] On the Apex of the Root in Osmunda and Todea. Quarterly Journal of microscopical science, vol. XXV. New Ser. p. 75 (1885).

Digitized by Google

Bleiben wir also einen Augenblick bei der Annahme stehen, die verschiedenen Beobachtungen über die Art des Scheitelwachsthums seien alle gleich zuverlässig und die entsprechenden Zellgruppirungen kommen sämmtlich mehr oder weniger häufig vor. Dann würde sich als allgemeine Schlussfolgerung doch nur ergeben, dass das Scheitelwachsthum der Gymnospermen — und der Phanerogamen überhaupt — nicht immer in derselben Weise stattfindet und wohl auch am nämlichen Spross nach Zeit und Umständen variirt. Die dreiseitige Scheitelzelle würde also in unregelmässigem Wechsel bald durch eine vierseitige, bald durch eine Mehrzahl von Scheitelzellen ersetzt.

Wenn DINGLER[1] gegen die Annahme von Tetraden, ganz abgesehen von den abweichenden Beobachtungen, in Übereinstimmung mit NÄGELI noch den theoretischen Einwand erhebt, dass die Kante zwischen den sich berührenden opponirten Zellen nicht wachsen dürfe, da ja sonst die beiden anderen ihren Charakter als Scheitelzellen verlieren müssten, so kann ich die Berechtigung einer solchen Betrachtungsweise nicht anerkennen. Ich denke mir die vier Scheitelzellen vollkommen gleichwerthig, und wenn sich zeitweise zwei derselben in einer Kante, statt in einem Punkte berühren, so ist das nach meiner Auffassung bloss eine Folge der kleinen Unregelmässigkeiten, die bei keinem Wachsthumsprocess ganz ausbleiben. Eine solche Kante entsteht zufällig und verlängert sich eine Zeit lang oder nimmt abwechselnd ab und zu, um endlich wieder zu verschwinden und durch eine andere ersetzt zu werden, welche dann ähnliche Wandlungen durchläuft. Hin und wieder mag es auch vorkommen, dass die entstandene Kante wirklich zu lang wird und die beiden etwas zurückgebliebenen Scheitelzellen für immer auf die Seite drängt; dann ändert sich eben die Physiognomie der Scheitelkuppe und mit ihr die Art des Scheitelwachsthums. Ich gestehe, dass ich heute mehr als früher geneigt bin, solche Verschiebungen als möglich zu betrachten.

Um mich indessen nicht bloss auf allgemeine Erwägungen, wie die vorstehenden, beschränken zu müssen, habe ich die in Rede stehende Frage einer abermaligen Prüfung unterzogen und dabei mein Augenmerk vorzugsweise auf die Laubsprosse der Gymnospermen gerichtet, weil ich bei diesen am ehesten einen stationären Zustand zu finden hoffte. Blosse Erstarkungsstadien, wie sie vielleicht bei Keimpflanzen und ganz jungen Trieben vorkommen, wollte ich diesmal bei der Wahl der Objecte möglichst ausschliessen.

Bei diesen Untersuchungen sind mir nun ebenfalls einige wenige Scheitelkuppen mit dreiseitiger Scheitelzelle zu Gesicht gekommen und

[1] A. a. O. S. 15.

Digitized by Google

auch die zwei bis drei jüngsten Segmente waren noch deutlich zu erkennen. Allein solche Vorkommnisse waren bei diesen Laubtrieben doch äusserst selten und bildeten nur einen kleinen Bruchtheil der beobachteten Wachsthumsmodalitäten. Die Mehrzahl der Stammspitzen zeigte in der Scheitelansicht ein durchaus abweichendes Zellnetz, mit dessen Hauptwänden die Annahme einer dreiseitigen Scheitelzelle absolut unvereinbar war. Nach dieser negativen Seite ist für mich die Frage entschieden: die dreiseitige Scheitelzelle ist für die Laubsprosse der Gymnospermen eine Ausnahme, nicht die Regel.

Fragt man nun aber, welches denn das positive Ergebniss, die herrschende Regel für die fraglichen Wachsthumsvorgänge sei, so wage ich kaum noch, hierauf eine bestimmte Antwort zu geben. Die vier kreuzweis gestellten Zellen der Scheitelregion und die zugehörigen, durch stärkere Wände begrenzten Quadranten habe ich auch bei diesen Untersuchungen wiederholt und auch relativ ziemlich häufig gesehen; ich halte es deshalb heute noch für mehr als wahrscheinlich, dass dieselben, so lange sie ihre Stellung beibehalten, als gleichwerthige Scheitelzellen fungiren. Dagegen ist es mir zweifelhaft geworden, ob irgend ein Wachsthumsmodus für eine bestimmte Pflanze oder auch nur für einen bestimmten Spross als constant zu betrachten sei. Die Erfahrung lehrt nämlich, dass Zweigspitzen, die von demselben Exemplar stammen, sich in Bezug auf die Gruppirung der Zellen in der Scheitelregion zum Theil auffallend verschieden verhalten. Liegt da nicht die Vermuthung nahe, dass solche Verschiedenheiten vielleicht auch im Entwickelungsgange des nämlichen Sprosses successive zur Geltung kommen? Einzelne Scheitelansichten schienen mir ziemlich deutlich zu Gunsten dieser Annahme zu sprechen.

Das Vorkommen von vier Scheitelzellen betrachte ich also nach wie vor auch für die Gymnospermen als erwiesen; aber für die unbegrenzte Dauer einer solchen Gruppirung möchte ich ebenso wenig einstehen, als für irgend eine andere Wachsthumsnorm. In diesem Punkte sehe ich mich durch die Thatsachen noch weiter als früher von der Nägeli'schen Einheitsidee abgedrängt.

Zur Begründung dieser Ansicht sei auf einige der beobachteten Zellgruppirungen in der Scheitelansicht der Laubtriebe noch specieller hingewiesen. Fig. 1 stellt eine solche Ansicht von *Araucaria excelsa* dar. Das Centrum der Scheitelkuppe liegt annähernd da, wo der kleine punktirte Kreis gezogen wurde. In seiner Umgebung liegen zunächst die vier Zellgruppen, welche in unserer Figur durch Schattirung der beiden opponirten besonders hervorgehoben sind. Die trennenden Hauptwände gehen jedoch nicht bis zum Rande, so dass die Annahme von vier kreuzweis gestellten Scheitelzellen nur für das letzte Stadium,

Digitized by Google

in welchem die erwähnten Gruppen entstanden, berechtigt erscheint. Wie das Zellnetz vor diesem Stadium beschaffen war, ist unbekannt.

Eine ähnliche Scheitelansicht von *Araucaria excelsa*, und zwar von einem Spross der nämlichen Pflanze, ist in Fig. 2 veranschaulicht. Wie vorhin wurde die Lage des Centrums so genau als möglich durch einen kleinen punktirten Kreis angedeutet und die Abgrenzung der Quadranten durch Schattirung verdeutlicht. Als Scheitelzellen sind selbstverständlich diejenigen zu betrachten, welche in der Spitze der Quadranten liegen; die beiden nicht schattirten bilden auch hier eine Kante. Die wirkliche Zusammengehörigkeit der Zellen, die in der Figur als Theile eines Quadranten dargestellt sind, ergiebt sich zum Theil (z. B. für den Quadranten rechts) ohne Weiteres aus der Lage der Scheidewände. Überdies steht fest, und dies wurde mit besonderer Sorgfalt constatirt, dass die vier Zellen, die ich als Scheitelzellen bezeichnet habe, nur mit den benachbarten Zellen ihrer Quadranten, aber nicht unter sich, zu genetischen Paaren oder Gruppen vereinigt werden können.

Zu diesen beiden Ansichten mag noch eine dritte (Fig. 3) hinzugefügt werden, welche ausnahmsweise auf eine dreiseitige Scheitelzelle schliessen lässt. Die wahrscheinliche Reihenfolge der Wände wurde durch Schattirung des voraussichtlich ältesten Segmentes angedeutet. Auch diese Ansicht bezieht sich auf einen jungen Trieb des nämlichen Exemplars von *Araucaria excelsa*, welchem auch die beiden vorhergehenden Scheitel entnommen wurden.

Endlich ist in Fig. 4 noch eine Scheitelansicht abgebildet, die mit keiner der vorhergehenden übereinstimmt. Das Centrum der Scheitelkuppe ist in gewohnter Weise bezeichnet, und es mag noch ausdrücklich bemerkt werden, dass die Zelle *d*, die wie eine dreiseitige Scheitelzelle aussieht, entschieden seitlich lag. Zwei opponirte Zellgruppen, die ich als genetische betrachte, sind schattirt. Alles Übrige mag sich der Leser nach Gutfinden zurechtlegen. Für mich ist nur so viel klar, dass hier eine dreiseitige Scheitelzelle nicht vorliegt.

In Fig. 5 ist die Scheitelansicht einer Stammspitze von *Ephedra monostachya* wiedergegeben. Ein Blick auf die Umgebung des kleinen punktirten Kreises, welcher dem Centrum entspricht, genügt vollständig, um sofort die Überzeugung zu gewinnen, dass hier eine Scheitelzelle mit regelmässiger Segmentirung nicht vorhanden ist. Ebenso wenig lässt sich aus der Lage der Wände die Annahme einer Tetrade von Scheitelzellen begründen.

Fig. 6 *A*, *B* und *C* endlich stellt die Flächen- und Seitenansicht eines Stammscheitels von *Retinospora ericoides* dar. Die Flächenansicht *A* zeigt in der Mitte eine fünfeckige Zelle *s*, welche thatsächlich das

Digitized by Google

Centrum der Scheitelwölbung bildet. In ihrer Umgebung liegen die Zellen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, welche in den Seitenansichten *B* und *C* mit den nämlichen Buchstaben bezeichnet sind. Ich ziehe nun aus dieser Zellgruppirung zunächst bloss den Schluss, dass hier eine dreiseitige Scheitelzelle sicher nicht vorliegt, ebenso wenig eine vierseitige. Auch für die Annahme, dass die vorausgegangene Segmentirung der Zelle *s* ihren fünf Seiten parallel stattgefunden habe, war kein Anhaltspunkt vorhanden. Eine feste Regel lässt sich also auch hier für die Art des Scheitelwachsthums nicht aufstellen.

Andere Laubtriebe derselben Pflanze, ebenso solche von *Cupressus glauca*, lieferten ähnliche, wenn auch in den Einzelheiten abweichende Bilder; eine dreiseitige Scheitelzelle habe ich hier niemals gesehen.

Was nun noch die Stammspitzen der Angiospermen betrifft, welche nach Korschelt eine dreiseitige Scheitelzelle besitzen sollen, so kann ich mich hierüber auf wenige Worte beschränken, da ich eine bestimmte abweichende Ansicht über diesen Gegenstand nicht ausgesprochen und somit auch nicht zu vertheidigen habe. Ich will indessen nicht verhehlen, dass ich die Richtigkeit der Korschelt'schen Angaben für manche der aufgeführten Beispiele, vor allem mit Bezug auf *Elodea*, *Myriophyllum* und *Ceratophyllum*, bezweifle. Bezüglich dieser Gattungen hat sich auch bereits John de Klercker,[1] ein Schüler Warming's, auf Grund eingehender Untersuchungen in demselben Sinne ausgesprochen. Er sagt in der Anmerkung auf S. 6 seiner Schrift: »Quant aux figures et aux descriptions de M. Korschelt, je crois que si ses coupes longitudinales, montrant les cellules terminales, sont en réalité correctement conçues, elles constituent l'exception et non la règle en ce qui concerne *Ceratophyllum*, *Myriophyllum* et *Elodea*.« Mit dieser Ansicht stimmt auch die meine überein.

Nach alledem erscheint mir das Bestreben, die Gleichheit des Scheitelwachsthums für die sämmtlichen höheren Gewächse zur Anerkennung zu bringen, zwar begreiflich, aber völlig aussichtslos. Selbst wenn wir von den vorstehend besprochenen Objecten gänzlich absehen, lehrt doch schon das Verhalten der Phanerogamenwurzeln, dass in Bezug auf die Vorgänge in der Scheitelregion tiefgreifende Verschiedenheiten vorkommen, darunter auch solche, welche die Zahl der Initialen betreffen. Wie diese verschiedenen Wachsthumsnormen phylogenetisch zu Stande gekommen, mag hier ausser Betracht bleiben, es genügt mir zu constatiren, dass sie vorhanden sind.

Eben so entschieden, wie für das Vorkommen mehrerer Scheitelzellen, muss ich aber andererseits auch für den Satz eintreten, dass

[1] Sur l'anatomie et le développement de *Ceratophyllum*. Mémoire présenté à l'acad. des sciences de Suède le 14 Mai 1884. Stockholm 1885.

Digitized by Google

unter den Bedingungen, welche bei den höheren Pflanzen verwirklicht sind, auf medianen Längsschnitten stets nur die beiden rechts und links an die Mittellinie stossenden Zellen als Scheitelzellen zu betrachten sind. Wenn Graf SOLMS,[1] gestützt auf die Wachsthumsverhältnisse bei *Chylocladia*, die Möglichkeit betont, dass auch mehr als zwei Scheitelzellen im Medianschnitt vorkommen können, so ist dagegen zu erwidern, dass diese Stütze nicht Stich hält. Das Wachsthum der Florideen, zu denen die genannte Pflanze gehört, weicht so vollständig von dem der höheren Gewächse ab, dass es viel naturgemässer erscheint, diese Algen in entwickelungsgeschichtlicher Hinsicht den aus Hyphen aufgebauten Pilzen und Flechten (*Usnea* u. dergl.) an die Seite zu stellen. Wir haben es offenbar auch bei *Chylocladia* mit verwachsenen Zellfäden zu thun, welche am Thallusscheitel zusammenneigen und sich unterhalb desselben verästeln, wobei natürlich jeder Ast wieder seine eigene Scheitelzelle besitzt; intercalare Theilungen finden voraussichtlich nicht statt.[2] Dass ein so eigenthümlicher Wachsthumsmodus auch zu ganz anderen Scheitelansichten führen muss, als der bei Aufstellung meines Satzes vorausgesetzte, ist selbstverständlich und ich habe dies in der Anmerkung ausdrücklich hervorgehoben.

2. Scheitelwachsthum und Blattstellung.

Als ich durch meine Untersuchungen über die Blattstellungen zu der Ansicht geführt wurde, dass bei den Gefässpflanzen der Entstehungsort neuer Blattanlagen oberhalb der schon vorhandenen im Allgemeinen bloss von der Lage dieser letzteren, nicht aber von den Theilungsvorgängen in der Scheitelregion abhängig sei, war ich mir wohl bewusst, dass diese ausschliessliche Betonung der Anschlussverhältnisse nicht bloss mit der SCHIMPER-BRAUN'schen Spiraltheorie, sondern auch mit den Anschauungen NÄGELI's in schroffem Gegensatze steht. Denn die ortbestimmenden Einflüsse, die nach NÄGELI von dem Alles beherrschenden Scheitel ausgehen, wirkten nun mit einem Male von der anderen Seite jener Gürtelzone aus, in welcher die jungen Anlagen zum Vorschein kommen; die oberhalb liegende Scheitelregion war in Bezug auf Stellungsverhältnisse zu vollständiger Neutralität degradirt.

Diese Auffassung war in theoretischer Hinsicht eine unvermeidliche Consequenz. Wenn die Systeme seitlicher Organe sich auf der

---

[1] H. Graf zu SOLMS-LAUBACH, der Aufbau des Stockes von *Psilotum triquetrum*. Ann. du jardin bot. de Buitenzorg. Vol. IV. p. 153.

[2] Vergl. NÄGELI, Theorie der Abstammungslehre, S. 370. Specielle aber unvollständige Daten über den Bau von *Chylocladia* giebt BERTHOLD in PRINGSH. Jahrb. Bd. XIII (1882), S. 686.

Digitized by Google

gegebenen Basis mit Nothwendigkeit nach bestimmten Regeln des Anschlusses, also von unten her aufbauen, wie ich dies in meiner Arbeit gezeigt zu haben glaube, so war es offenbar überflüssig, noch eine zweite ordnende Kraft anzunehmen, die von oben, d. h. vom Scheitel aus auf die Stellungen eingewirkt hätte. Es war ja alles vollständig geregelt, ich bedurfte keiner weiteren Beihülfe. Der Scheitel hatte bloss dafür zu sorgen, dass immer neue Organe und zwar unter möglichster Ausnutzung des Raumes hervorsprossten, und hierzu waren alle Punkte seiner Oberfläche in gleichem Maasse befähigt.

Aber nichtsdestoweniger war es immer noch denkbar, dass meine Mechanik, die ich zwar der Pflanze abgelauscht, dann aber doch selbständig durchgeführt hatte, in einzelnen Punkten nicht ganz den Bedingungen entsprach, welche am vegetativen Stammorgan gegeben sind. Darum war es nothwendig, die abgeleiteten Schlussfolgerungen durch Beobachtung zu prüfen; waren sie unrichtig, so musste sich irgendwo eine Thatsache ergeben, welche damit in klarem Widerspruche stand. Da nun die Vorgänge in der Stammspitze bei den Gefässkryptogamen mit Scheitelzelle am genauesten bekannt sind, so lag es nahe, diese Prüfung zunächst bei diesen vorzunehmen. Hier musste es sich zeigen, ob die Anlegung der Blätter mit den Theilungen der Scheitelzelle und ihrer Segmente in irgend einer Beziehung steht, welche im Sinne Nägeli's gedeutet werden könnte. Das Ergebniss war, dass weder bei *Salvinia*, *Azolla* und *Marsilia*, noch bei *Selaginella* oder den Farnkräutern eine solche Beziehung nachweisbar ist. Namentlich deutete keine einzige unzweifelhafte Thatsache auf eine gesetzmässige Abhängigkeit der Blattbildung von der Fächerung der Segmente.[1]

Diese Beurtheilung der Sachlage stützte sich auf die bekannten Arbeiten von Pringsheim, Hanstein, Strasburger und Pfeffer über die Entwickelung von *Salvinia*, *Marsilia*, *Azolla* und *Selaginella*. Über das Scheitelwachsthum dieser letzteren hatte ich überdies einige selbstständige Beobachtungen angestellt. Aus der Abhandlung von Dingler ersehe ich nun mit einiger Überraschung, dass derselbe aus den nämlichen Quellen so ziemlich das Gegentheil von dem, was ich darin zu finden vermochte, herausgelesen hat. Er sagt auf S. 4 wörtlich: »Wenn nun auch gerade bei *Equisetum* bis heute noch nicht der ganz genaue Nachweis des Verhältnisses der Mutterzelle des einzelnen Blattes zu den Scheitelzellsegmenten des Stammes geführt werden konnte, so ist dies doch, wenigstens bis zu gewissem Grade, von Reess geschehen, der bestimmt erkannte, dass je drei Abschnitte einen Blattwirtel liefern. Ebenso ist es durch Pringsheim, Hanstein, Nägeli

[1] Vergl. hierüber meine Theorie der Blattstellungen, S. 87—93.

Digitized by Google

und LEITGEB, PFEFFER und STRASBURGER für *Salvinia*, *Marsilia*, *Psilotum*, *Selaginella* und *Azolla* bis zu gewissem Grade geschehen. PRINGSHEIM's und STRASBURGER's Resultate an *Salvinia* und *Azolla* scheinen zwar nicht ganz für die NÄGELI'sche Auffassung zu sprechen, jedoch steht die endgültige Entscheidung in dieser sehr schwierigen Frage offenbar noch aus.«

Mir scheint nun gerade bei *Salvinia* und *Azolla* jeder Zweifel ausgeschlossen. Es ist sicher, dass hier die Segmente alterniren und dass die Blätter an ungleichwerthigen Punkten derselben angelegt werden, die einen im unteren, die anderen im oberen Theil des entsprechenden Segmentes. Bei *Salvinia* bleibt überdies je das dritte Segment steril, d. h. es bildet mit den beiden gegenüberliegenden, aber nicht zusammengehörigen Segmenthälften ein Internodium. Hier beschränkt sich also die vermuthete gesetzmässige Beziehung, wie ich mich zum Überfluss noch durch eigene Untersuchungen überzeugt habe, ausschliesslich darauf, dass die oberen und unteren Segmentgrenzen noch eine gewisse morphologische Bedeutung haben, indem die blattbildenden Knotenscheiben nach Lage und Zahl von diesen Grenzlinien abhängig sind; auf je drei Segmente kommt eine Knotenscheibe. Weiter reicht diese Abhängigkeit nicht; eben so wenig bei *Azolla*.

Die wurzelähnlichen Triebe von *Psilotum* betreffend, verweise ich auf die oben citirte Schrift des Grafen SOLMS,[1] welcher die Richtigkeit der NÄGELI-LEITGEB'schen Deutung hinsichtlich der rudimentären Blattanlagen in den Segmenten bezweifelt. Jedenfalls kann hier von einer feststehenden Thatsache nicht wohl die Rede sein.

Mit aller Bestimmtheit muss ich ferner der Ansicht entgegentreten, REESS habe die fraglichen Beziehungen im Scheitel von *Equisetum*, wenigstens bis zu gewissem Grade, bestimmt erkannt und nachgewiesen. Der Autor selbst glaubt allerdings diesen Nachweis geliefert zu haben; allein verschiedene seiner Angaben, wie z. B. die, dass die drei Wirtelglieder bei *E. scirpoides* ursprünglich superponirt seien, kamen mir seit Jahren so unwahrscheinlich vor, dass ich an der Zuverlässigkeit der ganzen Darstellung zu zweifeln begann. Da ich jedoch keine Gelegenheit hatte, das genannte Object selbst zu untersuchen, so ging ich in meinen »Blattstellungen« mit wenigen Worten über diese Frage hinweg. Heute jedoch bin ich im Stande den vollgültigen Beweis zu führen, dass die Darstellung von REESS in allen Punkten, auf die es hier ankommt, unrichtig ist. Die angeblich sicher beobachtete Vereinigung von je drei Segmenten zu einem Gürtel findet

[1] Der Aufbau des Stockes von *Psilotum triquetrum*, S. 161.

Digitized by Google

nicht statt, und eine gesetzmässige Beziehung zwischen diesen Segmenten und den Blattanlagen ist nicht vorhanden.

Betrachten wir zunächst die in Fig. 7 dargestellte Längsansicht der Stammspitze von *Equisetum scirpoides*. Der untere Theil der Figur entspricht der Zone, in welcher nach Reess die Vereinigung von drei Segmenten zu einem Gürtel stattfinden müsste. Die deutlich hervortretenden Segmentwände zeigen jedoch, dass eine solche Verschiebung in keiner Weise angedeutet ist, geschweige denn sich vollzogen hat. Dazu kommt, dass der nämliche Scheitel in der Querschnittsansicht (Fig. 8) bereits abgerundet dreikantig erscheint, was auf Grund einer sorgfältigen Vergleichung nicht anders gedeutet werden kann, als dass die drei abgerundeten Kanten den jungen Blattanlagen entsprechen, welche den obersten Wirtel bilden. Zur Bekräftigung dessen sei noch speciell auf die Querschnittsansicht Fig. 9 hingewiesen, wo wiederum der nämliche Scheitel, aber noch umgeben von den älteren Scheiden, dargestellt ist. Man sieht, dass die Glieder der mit I, II, III bezeichneten Wirtel alterniren und dass die abgerundeten Kanten unseres Scheitels mit denjenigen des zweitunteren Wirtels (II) im gleichen Radius liegen.

Kehren wir jetzt zu der Längsansicht Fig. 7 zurück. Die schwachen Ausbauchungen der Umrisslinie (in der Figur rechts und links mit Parenthesen bezeichnet) stellen ganz sicher zwei von den drei obersten Blattanlagen dar. Man sieht auch deutlich, dass die auf der linken Seite befindliche Anlage sich über die Segmentwand hinauf bis ungefähr zur Mitte des nächstoberen Segments erstreckt, also ganz und gar nicht von den Segmentgrenzen abhängig ist.

Eine übereinstimmende Längsansicht giebt übrigens schon Hofmeister in seiner Allgemeinen Morphologie, Fig. 148b. auf S. 512, wo offenbar die Ausbauchung der Umrisslinie ebenfalls dem obersten Blattwirtel entspricht. Dass Hofmeister dessenungeachtet die Reess'sche Angabe bezüglich der Gürtelbildung im Texte anerkennt, ändert an der Sache nichts; es ist das nicht der einzige Widerspruch dieser Art.

Die schon oben citirte Querschnittsansicht Fig. 8 zeigt uns ferner, dass die drei jüngsten Blattanlagen keineswegs genau mit den Sectoren zusammenfallen, welche von den Haupt- und Sextantenwänden gebildet werden. Auf der linken Seite der Figur ist die Abweichung sogar recht augenfällig; ebenso in Fig. 10, welche einen anderen Scheitel darstellt. Die Hauptwände sind in beiden Figuren mit *H*, die Sextantenwände mit *S* bezeichnet. Dass die Glieder der successiven dreizähligen Wirtel schon in der Anlage mit den vorhergehenden alterniren, brauche ich kaum noch besonders hervorzuheben; Fig. 9 giebt hierüber genügenden Aufschluss.

Digitized by Google

Bei *Equisetum scirpoides* fehlt demnach jede bestimmte Beziehung zwischen der Wirtelbildung und den Segmenten der Scheitelzelle. Damit fallen natürlich auch alle Analogieschlüsse, die sich auf die übrigen Arten der Gattung beziehen, dahin.

Im Anschlusse an *Equisetum* mögen auch die Farne, die ich in meinen »Blattstellungen« nur beiläufig erwähnt habe, noch eine kurze Besprechung finden. Es fehlt auch hier nicht an Angaben, welche die fragliche Beziehung zwischen Scheitelwachsthum und Blattstellung als ein unmittelbares Beobachtungsergebniss hinstellen. So sagt z. B. HOFMEISTER[1] auf Grund eigener Untersuchungen mit Rücksicht auf die Theilungen der Scheitelzelle: »Die Aufeinanderfolge dieser Theilungswände ist (soweit die sehr zahlreichen Beobachtungen reichen) rechts, seltener links umläufig, stets übereinstimmend mit der Spirale der Wedelstellung.«

Diese Angaben finde ich nun allerdings in der elf Jahre später erschienenen »Allgemeinen Morphologie« des nämlichen Autors nicht wiederholt. Sie sind aber auch nicht widerrufen. Es mag daher, um jeden Zweifel zu beseitigen, immerhin zweckmässig sein, auch hier die Belege dafür zu liefern, dass HOFMEISTER sich in diesem Punkte geirrt hat.

Untersucht man eine grössere Anzahl von Farnstämmen mit spiraliger Blattstellung und dreiseitiger Scheitelzelle, so überzeugt man sich, dass die Spirale, in welcher die Segmente auf einander folgen, keineswegs immer homodrom zur Blattspirale, sondern öfter antidrom verläuft; die Blattspirale kann z. B. rechtswendig, die Segmentspirale linkswendig sein, oder umgekehrt. Ich glaube annehmen zu dürfen, dass die Gegenläufigkeit ungefähr ebenso häufig vorkommt als die Gleichläufigkeit.

Untersuchungen dieser Art sind allerdings mit Schwierigkeiten verknüpft und man darf sich nicht abschrecken lassen, wenn manche Scheitelansicht ungenügend oder doch unsicher ausfällt. Wie oft ist zwar die Scheitelzelle selbst deutlich zu sehen, der Anschluss der Segmentwände aber nur in einer Ecke, statt in zweien, construirbar. In solchen Fällen bleibt natürlich die Richtung der Segmentspirale unbekannt. Aber trotz dieser Schwierigkeiten ist es doch gelungen, die nachstehend verzeichneten Fälle zu constatiren.

Lomaria Gibba. Von drei sicher beobachteten Fällen ergaben zwei Gegenläufigkeit und einer Gleichläufigkeit der Blatt- und der Segmentspirale. Ein nicht ganz sicherer Fall schien ebenfalls für Gleichläufigkeit zu sprechen.

[1] Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Abhandl. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1857, II, S. 636.

Digitized by Google

Cyrtomium falcatum. Von neun sicheren Beobachtungen ergaben vier Gegenläufigkeit und fünf Gleichläufigkeit der Spiralen.

Aspidium Filix mas und *Blechnum occidentale* lieferten je einen wahrscheinlichen Fall von Gegenläufigkeit.

Hieran schliessen sich zwei sichere Beobachtungen, die sich auf die Stammspitze von *Struthiopteris germanica* beziehen. Die Scheitelzelle war hier zweischneidig (Fig. 11), die Blattstellung aber spiralig mit Divergenzen aus der Hauptreihe.

Solchen Thatsachen gegenüber müssen die Angaben Hofmeister's als unhaltbar bezeichnet werden, zumal sie offenbar vorwiegend gar nicht auf directer Beobachtung der ungebrochenen Segmentwände, sondern auf Schlüssen beruhen, bei welchen die angeblich sehr ungleichseitige Form der Scheitelzelle und die daraus abgeleitete Wachsthumsweise derselben mit in Erwägung kam.

Dass übrigens an eine gesetzmässige Beziehung zwischen Scheitelwachsthum und Blattbildung nicht zu denken ist, geht für die untersuchten Farne schon aus der Lage der jüngsten Anlagen hervor, welche bald mit den Ecken der Scheitelzelle, bald mit der Mitte ihrer Seiten oder auch mit irgend einem zwischenliegenden Punkte im gleichen Radius liegen.

In diesem Punkte scheinen sich auch die dorsiventralen Farnstämme, die ja sonst durch mancherlei Eigenthümlichkeiten sich auszeichnen, übereinstimmend zu verhalten. Wenigstens giebt L. Klein[1] für *Polypodium* und *Pteris* ausdrücklich an, dass die Initiale eines jungen Blattes nicht an einen bestimmten Ort im Segmente gebunden sei. Ob seine weitere Angabe, dass »höchst wahrscheinlich« jedes Segment der beiden Dorsalzeilen einer Blattinitiale die Entstehung gebe, richtig sei oder nicht, lasse ich dahingestellt, da die zweizeiligen Blattstellungen der dorsiventralen Farne für die Beurtheilung der Spiralsysteme doch keine directen Anhaltspunkte gewähren können. Für die Spiralstellungen muss ich dagegen eine solche Übereinstimmung zwischen der Zahl der Segmente und derjenigen der Blätter als geometrisch unmöglich bezeichnen; denn wenn die Blattanlagen eine bestimmte örtliche Beziehung zu den Ecken der Scheitelzelle und folglich auch zu den Segmenten entschieden nicht zeigen, so können sie auch in der Zahl nicht wohl übereinstimmen. Es müssen entweder mehr Segmente als Blätter oder aber mehr Blätter als Segmente vorhanden sein. Für *Struthiopteris* mit zweischneidiger Scheitelzelle ist dies selbstverständlich.

So lassen denn gerade die Gefässkryptogamen kaum noch einen Zweifel übrig, dass es schlechterdings nicht angeht, die Beziehungen

[1] Bot. Zeitung 1884, S. 587 u. 594 (S. 8 u. 9 des Separatabdruckes).

Digitized by Google

zwischen Scheitelwachsthum und Organbildung, wie sie bei den Algen und Moosen in mancher Hinsicht bestehen, ohne Weiteres auf die höheren Gewächse, zumal auf Stellungsverhältnisse, zu übertragen. Mit Rücksicht auf die schraubenlinigen Stellungen der seitlichen Organe bestreite ich übrigens auch bei jenen jede gesetzmässige Beziehung der angedeuteten Art. Selbst die Moose bilden für mich keine Ausnahme, denn offenbar zeigen sie nur deshalb Übereinstimmung zwischen Blatt- und Segmentspirale, weil hier jedes Segment einem Blatt die Entstehung giebt, welches seine ganze freie Oberfläche einnimmt. Eine Abweichung ist unter solchen Umständen ja gar nicht denkbar.

3. Stellungsverhältnisse bei *Crouania annulata.*

In einer früheren Mittheilung,[1] welche sich auf verschiedene Fragen der Blattstellungslehre bezog, habe ich unter Anderem auch die Einwände beleuchtet, welche BERTHOLD[2] in Bezug auf meine 1880 aufgestellte Ansicht über die Spiralstellungen bei Florideen[3] geltend gemacht hatte. Hierauf ist in der Bot. Zeitung[4] die Eingangs erwähnte Erwiderung erschienen, in welcher BERTHOLD zwar die Berechtigung meiner Kritik in wichtigen Punkten anerkennt, dann aber doch bei der Behauptung stehen bleibt, dass bei einigen Florideen Spiralstellungen auch ohne die von mir geforderten Contactverhältnisse zu Stande kommen. Als eines der instructivsten Beispiele wird in dieser Hinsicht (neben *Polysiphonia*) die Gattung *Crouania* bezeichnet, deren Axillartriebe spiralig gestellte Organe besitzen sollen, ohne dass bei der Anlegung derselben eine Beeinflussung durch den Contact möglich sei.

Wäre diese Angabe richtig, so würden sich zwar hieraus keinerlei Schlüsse bezüglich der Gefässpflanzen ableiten lassen; es müsste aber doch anerkannt werden, dass dieselben Stellungen, die bei den höheren Gewächsen durch den Contact herbeigeführt werden, bei den Florideen in Folge unbekannter Vorgänge im Plasma zu Stande kommen. Völlig verschiedene Ursachen hätten also ganz die nämlichen Wirkungen. Das ist nun freilich keineswegs undenkbar; es fragt sich bloss: Ist es auch wirklich?

Zur Beantwortung dieser Frage untersuchte ich ein Weingeistexemplar von *Crouania annulata,* das mir Hr. BERTHOLD freundlichst

---

[1] Diese Sitzungsber. Jahrg. 1883, S. 741.
[2] PRINGSHEIM's Jahrb. Bd. XIII (1882), S. 569.
[3] Monatsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. 1880, S. 327.
[4] Jahrg. 1883, S. 729.

Digitized by Google

zur Verfügung gestellt hatte. Es wurde über ein Dutzend Scheitel von jungen Axillartrieben mehr oder weniger vollständig aufgenommen, um vor Allem die thatsächlichen Stellungsverhältnisse so genau als möglich festzustellen. Das erhaltene Resultat lässt sich im Wesentlichen in folgende Sätze zusammenfassen.

1. Es ist richtig, dass die Anlegung der in Rede stehenden seitlichen Organe durch Contactverhältnisse nicht beeinflusst wird. Demgemäss ist auch die Entwickelungsfolge keine streng akropetale, sondern häufig nahezu simultan.

2. Eine regelmässige Spiralstellung kommt niemals zu Stande. Auf mehrere Glieder in schraubenliniger Folge und mit ungefähr gleichen Divergenzen folgen gewöhnlich einige andere, die bald eine zur ersten antidrome Spirale bilden, bald aber auch ziemlich regellos inserirt sind.

3. *Crouania annulata* ist überdies ein für die Entscheidung der vorliegenden Frage ungünstiges Object, weil die seitlichen Organe, deren Stellung untersucht werden soll, nur die ersten Glieder vierzähliger Wirtel (Cyclarchen nach Schimper) darstellen und nicht selten zwei opponirte Wirtelglieder ungefähr gleichzeitig entstehen.

Zur Begründung dieser Sätze verweise ich zunächst auf die Längsansicht Fig. 12, welche den unteren Theil eines jungen Axillarsprosses veranschaulicht. Die abgekehrten seitlichen Organe sind punktirt. Von den paarweise vorhandenen Anlagen sind die mit 7 und 8 bezeichneten gleich gross; es bleibt also unentschieden, welches von den beiden opponirten Gliedern als erstes zu deuten sei. Die Stellungsverhältnisse, welche sich aus diesen Ansichten ergeben, sind in der Querschnittsansicht Fig. 13 durch Bezifferung angedeutet. Wie man sieht, geht die Spirale von 1 bis 5 nach links, dann von 5 bis 6 nach rechts, von 6 bis 7 und von 7 bis 8 entweder ebenfalls rechts oder aber links mit viel kleineren Divergenzen.

Ähnliche Unregelmässigkeiten lässt auch der in Fig. 14 abgebildete Scheitel erkennen, welcher zugleich zeigt, dass die seitlichen Organe hier nahezu simultan angelegt wurden. Aus der Vergleichung der verschiedenen Längsansichten ergab sich unter Anderem, dass die Spirale von 9 bis 7 nach links, von 7 bis 4 dagegen nach rechts geht. Die Nummern 10 und 2 deuten ebenfalls auf Abweichungen; (10) würde sich dagegen regelrecht an 9 anschliessen, ist aber etwas kleiner als 10.

Von weiteren Unregelmässigkeiten seien noch die folgenden erwähnt, die ebenso, wie die vorhergehenden, auf der Combination von Längsansichten beruhen: 1. Spirale von 12 bis 8 rechtsläufig, von 8 bis 5 links, von 5 bis 3 wieder rechts. 2. Von den Organen 1 bis

Digitized by Google

5 liegt je das zweitfolgende annähernd über dem ersten, also 3 über 1 und 5 über 3; die Nummern 6 bis 9 schliessen sich in rechtsläufiger Spirale, aber offenbar mit ungleichen Divergenzen an. 3. Spirale von 1 bis 4 rechts-, von 5 bis 7 linksläufig.

In all' diesen Fällen sind die Divergenzen als normal angenommen, wenn nicht erhebliche Abweichungen sicher constatirt werden konnten. Wären die vierzähligen Quirle genau alternirend, so würde sich als Maass für diese Normaldivergenz, d. h. für den zwischen den ersten Quirlelementen am häufigsten vorkommenden Winkelabstand = 135° oder $^3/_8$ des Umfanges ergeben. Thatsächlich bilden nun aber die correspondirenden Glieder aller zweitfolgenden Quirle keine Longitudinalreihe, sondern eine steile, mit der Grundspirale gleichsinnige Schraubenlinie, wodurch der Divergenzwinkel etwas grösser wird als $^3/_8$. Übrigens ist klar, dass die Regelmässigkeit der Spiralstellung sofort gestört werden muss, sobald von den vier Wirtelgliedern ein anderes als das, welches obiger Divergenz entsprechen würde, zuerst hervorsprosst. — Ob hierbei die Stellung der vier Glieder unter sich und die Alternanz mit den benachbarten, sowohl bei normalen wie bei abnormalen Divergenzen, ausschliesslich durch innere Ursachen bedingt sei, mag hier unerörtert bleiben.

Die mitgetheilten Beobachtungen sollen bloss darthun, dass eine regelmässige und durchgehende Spiralstellung bei *Crouania annulata* gar nicht vorkommt, sondern höchstens zonenweise und stets nur für eine beschränkte Anzahl von Gliedern verwirklicht ist. Daraus geht aber klar hervor, dass die unbekannten Vorgänge im Plasma, welche bestimmend auf die Stellungsverhältnisse einwirken, bei Weitem nicht jene Gleichmässigkeit des sichtbaren Effectes zur Folge haben, wie sie bei dem unmittelbaren Anschluss der Organe an vorhergehende erreicht wird. Es darf auch nicht übersehen werden, dass selbst die weniggliedrigen Spiralfragmente, in welche die primären Wirtelglieder der *Crouania*-Sprosse sich ordnen, bis jetzt vollständig isolirt dastehen; namentlich ist für wirkliche Spiralstellungen bis dahin nichts Ähnliches beobachtet worden.

Bis auf Weiteres bleibt somit die Ansicht berechtigt, dass vielgliedrige Spiralsysteme mit regelmässigen Stellungen, deren Zustandekommen ohne Contactwirkung sicher gestellt wäre, im Pflanzenreich nicht bekannt sind.

Wenn es aber richtig ist, dass solche Spiralsysteme auch bei den Florideen nur da vorkommen, wo die erforderlichen Contactverhältnisse bestehen, dann ist selbstverständlich jede Beihülfe des Plasmas durch Aufrichtung der Querwände u. dergl. hier ebenso entbehrlich, wie bei den Gefässpflanzen die vorbereitende Segmentirung

Digitized by Google

des Scheitels. Es ist auch keine einzige Thatsache bekannt, durch welche das Vorkommen einer selbständigen Aufrichtung der Wände in Übereinstimmung mit der später erfolgenden Anlegung schraubenliniger Organe bewiesen würde. Was man hierüber im zutreffenden Sinne beobachtet haben will, kann auch anders gedeutet werden. Über diesen Punkt glaube ich indess schon in meiner früheren Mittheilung[1] das Nöthige gesagt zu haben.

[1] Diese Sitzungsberichte, Jahrg. 1883, S. 771.

Erklärung der Abbildungen.

(Die Vergrösserung ist der Figurennummer in Parenthesen beigesetzt.)

Fig. 1 (700). Scheitelansicht eines Zweiges von *Araucaria excelsa*. Das Centrum der Scheitelkuppe ist durch den kleinen punktirten Kreis angedeutet. Es sind vier Scheitelzellen vorhanden, von denen zwei eine Kante bilden. Die beiden sich nicht berührenden Scheitelzellen sind nebst den benachbarten Descendenten schattirt.

Fig. 2 (700). Scheitelansicht eines andern Zweiges von der nämlichen Pflanze, ebenfalls mit vier Scheitelzellen, deren Gruppirung in gleicher Weise verdeutlicht ist wie in Fig. 1.

Fig. 3 (700). Scheitelansicht eines Zweiges, welche ausnahmsweise eine dreiseitige Scheitelzelle zeigt. Auch dieser Zweig stammt von demselben Exemplar, wie die beiden vorhergehenden. Das älteste Segment wurde der Deutlichkeit wegen schattirt.

Fig. 4 (700). Eine weitere Scheitelansicht von demselben Exemplar. Im Centrum der Scheitelkuppe stossen vier Zellen an einander; allein die trennenden Scheidewände gehen nicht bis zum Rande, so dass von einem bestimmten Wachsthumstypus hier nicht die Rede sein kann. Soviel ist indess sicher, dass eine dreiseitige Scheitelzelle hier nicht vorhanden ist.

Fig. 5 (700). Scheitelansicht von *Ephedra monostachya*. In der Gegend des Centrums, welches wie bisher durch einen kleinen punktirten Kreis bezeichnet ist, liegen drei zusammengehörige Zellen, deren Entstehungsweise leicht zu übersehen ist. Dagegen lässt die Umgebung eine gesetzmässige Theilungsfolge nicht erkennen.

Digitized by Google

Fig. 6 (700). Scheitel von *Retinospora ericoides*. *A* Ansicht von oben, *s* die Scheitelzelle. *B* und *C* Seitenansichten; die in der Umgebung der Scheitelzelle *s* befindlichen Zellen sind mit den nämlichen Buchstaben bezeichnet wie in der Scheitelansicht *A*.

Fig. 7 (550). Seitenansicht einer Stammspitze von *Equisetum scirpoides*. Die Segmentwände sind durch stärkere Linien hervorgehoben. Im unteren, durch Parenthesen bezeichneten Theil der Figur zeigt die Umrisslinie eine schwache Ausbauchung, welche dem obersten Blattwirtel entspricht. Man sieht, dass dieser Blattwirtel auf der rechten Seite bis zur Segmentwand, auf der linken aber nur bis zur Mitte eines Segmentes reicht.

Fig. 8 (550). Querschnittsansicht der in Fig. 7 dargestellten Stammspitze. Die höchste Einstellung zeigte die in der Figur punktirte Scheitelzelle, die tiefste den ausgezogenen Umriss des jüngsten Blattwirtels, dessen drei Zähne die schwach dreilappige Form bedingen. Man vergleiche zur Orientirung Fig. 9, wo derselbe Scheitel ebenfalls im Querschnitt, aber noch von den älteren Scheiden umgeben, dargestellt ist. — Die Hauptwände sind mit *H*, die Sextantenwände mit *S* bezeichnet; die Lage der Blattzähne ist hiervon unabhängig.

Fig. 9 (140). Querschnitt durch die Stammspitze von *Equisetum scirpoides*. Mit drei Blattscheiden (I, II und III) und der Anlage zu einem vierten Wirtel (IV), welcher letztere in Fig. 7 und 8 bei stärkerer Vergrösserung abgebildet ist.

Fig. 10 (340). Querschnitt durch eine andere Stammspitze von *Equisetum scirpoides*. Der jüngste Blattwirtel ist durch die abgerundet dreieckige Form der Umrisslinie angedeutet. Die inneren Linien entsprechen einer andern Einstellung; *H* die Hauptwände, *S* die Sextantenwände.

Fig. 11 (340). Scheitelansicht der Stammspitze von *Struthiopteris germanica*. Die Scheitelzelle ist zweischneidig. Das jüngste Segment wurde der Deutlichkeit wegen schattirt.

Fig. 12 (600). Stück eines Axillartriebes von *Crouania annulata*. Veranschaulicht die Stellungsverhältnisse der seitlichen Organe.

Fig. 13. Die in Fig. 12 abgebildeten seitlichen Organe in der Horizontalprojection, mit gleicher Bezifferung.

Fig. 14 (600). Oberer Theil eines anderen Axillartriebes mit simultan entstandenen Anlagen seitlicher Organe, deren Stellung nur theilweise einem regelmässigen Spiralsystem entspricht.

Digitized by Google

Digitized by Google

46. Über die Einwirkung des Ammoniaks und der Amine auf den Sulfocyanursäuremethyläther und das Cyanurchlorid. Normale alkylirte Melamine.

Von A. W. Hofmann.

(Vorgetragen am 23. Juli; — gedruckt im Bericht vom 29. October [St. XLII]; — ausgegeben am 5. November.)

Die in einem früheren Aufsatze mitgetheilte Arbeit[1] über die Darstellung der Sulfocyanursäure aus dem zugehörigen Methyläther hat mich an einige andere mit diesem Äther angestellte Versuche erinnert, welche bisher unvollendet geblieben waren.

Schon am Schlusse meiner ersten Mittheilung über den Sulfocyanursäuremethyläther ist kurz angedeutet worden, dass sich derselbe sehr leicht mit Ammoniak umsetzt und eine Reihe wohl charakterisirter Basen liefert. Einige dieser Basen sind auch damals bereits etwas eingehender studirt worden. Bei den zu diesem Ende angestellten Versuchen habe ich mich noch der höchst werthvollen Unterstützung des Hrn. Dr. C. Schotten zu erfreuen gehabt, für die ich ihm hier, wenn auch verspätet, meinen besten Dank ausspreche. Die Arbeit im weiteren Umfange ist aber erst neuerdings wieder aufgenommen worden. Bei Fortsetzung derselben hat mir Hr. Dr. Otto Borgmann mit einer Umsicht und einer experimentalen Geschicklichkeit zur Seite gestanden, welche ich nicht dankbar genug anerkennen kann.

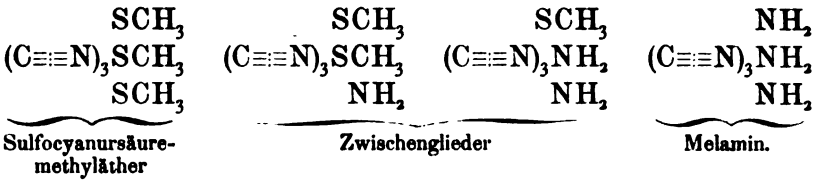
Einwirkung des Ammoniaks auf den Sulfocyanursäuremethyläther.

Nachdem frühere Versuche[2] gezeigt hatten, dass sich der Äther durch Behandlung mit Wasser (Salzsäure) bei hoher Temperatur unter Abspaltung von Methylmercaptan in Cyanursäure verwandelt, durfte

[1] Hofmann, Sitzungsberichte 1885. S. 821.
[2] Hofmann, Monatsberichte 1880. S. 616.

Digitized by Google

man mit Zuversicht erwarten, dass er unter dem Einflusse des Ammoniaks als Endproduct Melamin liefern werde. Allein es war nicht wahrscheinlich, dass sich die Wirkung des Ammoniaks alsbald bis zur Bildung dieses Endproductes erstrecken werde, und es standen somit zwei noch schwefelhaltige Zwischenglieder in Aussicht:



Durch Einhalten gewisser Zeit- und Temperaturbedingungen gelingt es in der That, die ganze Reihe der von der Theorie vorgezeichneten Amidoverbindungen aus dem Sulfocyanursäureäther zu gewinnen.

Primäre Amidobase. Digerirt man den Sulfocyanursäureäther mit einem mässigen Überschusse einer starken alkoholischen Ammoniaklösung etwa fünf Stunden lang bei 100°, so zeigt sich die Röhre nach dem Erkalten von einer schönen Krystallisation erfüllt; das beim Öffnen derselben entweichende Mercaptan giebt sich alsbald durch den Geruch und die schwefelgelbe Färbung, welche mit Ammoniak befeuchtetes Bleipapier in dem Gase annimmt, zu erkennen. Die Krystalle, fast ausschliesslich aus primärer Base bestehend, werden gepulvert und mit Wasser ausgekocht, um kleine Mengen der gleichzeitig gebildeten secundären Base zu entfernen. Der Rückstand wird in Salzsäure gelöst, wobei bisweilen etwas unangegriffener Methyläther zurückbleibt. Man fällt nunmehr mit Ammoniak und löst den Niederschlag nach nochmaligem Auskochen mit Wasser in siedendem Alkohol, aus welchem beim Erkalten schöne rhombische, bei 200° schmelzende Tafeln anschiessen. Für die Analyse sind sie bei 100° getrocknet worden.

Der Formel

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(SCH_3)_2NH_2 = C_5H_8N_4S_2$$

entsprechen folgende Werthe:

		Theorie	Versuch	
C_5	60	31.91	31.87	—
H_8	8	4.26	4.65	—
N_4	56	29.79	—	30.42
S_2	64	34.04	—	—
	188	100.00		

Wie aus der Darstellung erhellt, ist die Base leicht löslich in heissem, schwerer löslich in kaltem Alkohol; sie ist nicht ganz unlöslich in Wasser. Die Lösungen sind ohne Reaction auf Pflanzen-

Digitized by Google

farben; in Gegenwart von Ammoniak oder Natronlauge mit einem Bleisalze gekocht zeigen sie keine Reaction auf Schwefel. In Salzsäure ist die Base ziemlich schwer löslich; durch Zusatz von Wasser fällt sie wieder aus, so dass sie auch auf diese Weise leicht im reinen Zustande zu erhalten ist. Nur in Gegenwart eines grossen Überschusses starker Salzsäure lässt sich die Lösung ohne Trübung mit Wasser mischen. Die Lösung in concentrirter Salzsäure setzt nach längerem Stehen eine bereits veränderte Substanz ab. Durch längeres Kochen mit concentrirter Salzsäure erleidet die primäre Amidobase eine Reihe von Umwandlungen, aus welchen schliesslich Mercaptan, Ammoniak und Cyanursäure hervorgehen. Auf Zusatz von Platinchlorid scheiden sich aus der concentrirten Lösung des salzsauren Salzes erst nach längerem Stehen vierseitige Prismen eines Platinsalzes ab. Goldchlorid bewirkt in der concentrirten salzsauren Lösung eine gelbe Wolke, welche bald unter Bildung schöner gelber Nadeln verschwindet. Dieses Goldsalz ist sehr veränderlich; es muss mit Salzsäure ausgewaschen werden, da Wasser es zersetzt. Für die Analyse wurde es in *vacuo* getrocknet.

Die Formel

$$C_5H_8N_4S_2.HCl.AuCl_3$$

verlangt 37.31 Procent Gold; gefunden wurden 37.37 Procent.

Mit Salpetersäure bildet die primäre Base ein in heissem Wasser leicht, in kaltem Wasser schwer lösliches Salz.

Nicht unerwähnt soll bleiben, dass eine der primären geschwefelten Amidobase entsprechende sauerstoffhaltige Verbindung

$$(C\equiv\equiv N)_3(OCH_3)_2NH_2$$

bereits bekannt ist. Wir haben sie, OLSHAUSEN[1] und ich, gelegentlich unserer Arbeit über die normalen Cyanursäureäther erhalten.

Secundäre Amidobase. Sie entsteht, wenn man den Sulfocyanursäureäther etwa fünf Stunden lang mit alkoholischem Ammoniak statt bei 100° bei 160° digerirt. Die beim Erkalten sich ausscheidenden Krystalle enthalten neben der secundären Base die primäre und tertiäre. Sie werden abfiltrirt, fein gepulvert und mehrmals mit Wasser ausgekocht, welches die primäre ungelöst lässt. Beim Erkalten krystallisiren aus der wässerigen Flüssigkeit rhombische Tafeln der secundären Base aus, welche aber noch Melamin enthalten. Dieses lässt sich durch eine Krystallisation aus Alkohol, in welchem das Melamin nahezu unlöslich ist, leicht entfernen. Ein charakteristischer Unterschied zwischen der primären und secundären Base ist die Schwerlöslichkeit der ersteren in Wasser und ihre Leichtlöslichkeit in Alkohol, während

[1] OLSHAUSEN und HOFMANN, Monatsberichte 1870. S. 198.

Digitized by Google

sich die secundäre leicht in Wasser, aber schwieriger in Alkohol löst. Die reine Diamidobase schmilzt bei 268°. Die Analyse der bei 100° getrockneten Base gab Zahlen, welche zu der Formel

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3SCH_3(NH_2)_2 = C_4H_7N_5S$$

führen:

		Theorie	Versuch		
C_4	48	30.57	30.11	—	—
H_7	7	4.46	4.74	—	—
N_5	70	44.59	—	44.80	—
S	32	20.38	—	—	19.85
	157	100.00.			

Die secundäre Base löst sich leicht in Salzsäure; aus der mässig verdünnten Lösung fällt auf Zusatz von Platinchlorid alsbald ein schönes, in sternförmig gruppirten Nadeln anschiessendes Platinsalz

$$2[C_4H_7N_5S.HCl]PtCl_4.$$

Die Theorie verlangt 26.89 Procent Platin; gefunden wurden 26.95 Procent.

Aus der salpetersauren Lösung der Base fällt auf Zusatz von Silbernitrat eine schwerlösliche, in feinen Nadeln krystallisirende Silberverbindung.

Bei längerem Kochen mit Salzsäure erleidet die Diamidobase dieselben Veränderungen, wie die Monamidoverbindung; als Endproducte werden Mercaptan, Ammoniak und Cyanursäure gebildet.

Tertiäre Amidobase, Melamin. Erhitzt man den Sulfocyanursäureäther oder eine der beiden noch schwefelhaltigen Amidobasen mehrere Stunden lang mit einem Überschusse von starkem wässerigem Ammoniak auf 180°, so findet man nach dem Erkalten der Röhre die klare Flüssigkeit von grossen sechsseitigen Blättern durchsetzt; auf der wässerigen Lösung schwimmt eine Schicht von reinem Methylmercaptan. Wenn die Bedingungen richtig eingehalten werden, so verläuft die Reaction nahezu quantitativ.[1] Man ist jedoch bei diesem Processe auf ein verhältnissmässig kleines Temperaturintervall beschränkt, denn geht man zu hoch, z. B. nur bis auf 200°, so erleidet das Melamin

[1] Die treffliche Ausbeute an Melamin, welche man durch Einwirkung von Ammoniak auf den Sulfocyanursäuremethyläther erhält, ist Veranlassung gewesen, auch das Verhalten des Sulfocyanmethyls gegen Ammoniak nochmals zu untersuchen. Es war nicht unmöglich, dass sich unter günstigen Bedingungen die Polymerisation des Äthers und die Umbildung des polymerisirten zu Melamin gleichzeitig vollziehen würde. Diese Hoffnung ist indessen nicht in Erfüllung gegangen. Es wurden wenig erfreuliche braune amorphe Producte erhalten, wie sie bereits von Kremer (J. f. prakt. Ch. LXXIII, 365) in der Äthylreihe beobachtet worden sind. Melamin entsteht auf diese Weise nicht.

Digitized by Google

bereits eine Umsetzung mit den Elementen des Wassers, indem hydroxylirte Verbindungen entstehen, ja selbst Ammoniak und Kohlensäure auftreten, welch' letztere sich alsdann in der Flüssigkeit direct nachweisen lässt. Hat man andererseits nicht hoch genug erhitzt, so enthält das Product leicht eine kleine Menge der secundären Amidobase. Es empfiehlt sich daher, die vollständige Umsetzung in jedem Falle durch einen besonderen Versuch festzustellen, indem man eine Probe auf Schwefel untersucht. Ist noch Schwefel vorhanden, so muss das Reactionsproduct nochmals eingeschlossen werden.

Durch Krystallisation aus siedendem Wasser wird das aus dem Sulfocyanursäureäther gewonnene Melamin in gut ausgebildeten rhombischen Octaëdern erhalten, welche alle von Liebig[1] in seiner berühmten Abhandlung angegebenen Eigenschaften zeigen, zumal auch das charakteristische, in Wasser schwerlösliche Nitrat, Sulfat und Oxalat liefern. Die Analyse der bei 100° getrockneten krystallisirten Substanz ergab 66.68 Procent Stickstoff; der Formel

$$(C\equiv\equiv N)_3(NH_2)_3 = C_3H_6N_6$$

entsprechen 66.66 Procent. Das Melamin wurde überdies durch die Analyse des Silbersalzes identificirt. Versetzt man die heisse wässerige Lösung mit Silbernitrat, so fällt ein gelatinöser Niederschlag, welcher durch Umkrystallisiren aus siedendem Wasser in feinen Nadeln anschiesst. Es ist dies die schon von Liebig analysirte Verbindung

$$C_3H_6N_6 . AgNO_3,$$

welche 36.49 Procent Silber enthält. Die Analyse ergab 36.64 Procent.

Das Melamin verbindet sich, wie bei dieser Gelegenheit gefunden wurde, auch mit Platinchlorid. Platinverbindungen des Melamins scheinen bisher nicht dargestellt worden zu sein.[2] Weder Liebig[3]

[1] Liebig, Lieb. Ann. X, 21.

[2] Wenn man sich erinnert, dass Liebig der erste war, welcher die Platinverbindungen für die Moleculargewichtsbestimmung der organischen Basen in Anwendung gebracht hat, so könnte es auf den ersten Blick befremdlich erscheinen, dass er das Verhalten des Melamins zum Platinchlorid unbeachtet gelassen hat. Allein die Abhandlung, in welcher das Melamin beschrieben wird, ist im Jahre 1834 veröffentlicht, während die Arbeit, in welcher Liebig das Platinchlorid bei der Untersuchung der Basen verwerthet hat, erst vier Jahre später erschienen ist. Zwar war Liebig die Fähigkeit dieser Körper, mit Platinchlorid Verbindungen einzugehen, schon 1833 bekannt, denn er erwähnt sie in seiner Abhandlung über den Stickstoffgehalt der organischen Basen (Lieb. Ann. VI, 73), und empfiehlt sogar drei Jahre später (1836) in der Abhandlung über das Nicotin (Lieb. Ann. XVIII, 66) die Analyse des Nicotin-Platinsalzes zur Feststellung der Zusammensetzung dieser Base. Allein erst im Jahre 1838, in der Arbeit über die organischen Basen (Lieb. Ann. XXVI, 10) werden die ersten Analysen von Platinsalzen, nämlich der Salze des Morphins, Narcotins, Codeïns, Chinins, Cinchonins, Brucins und Strychnins mitgetheilt.

[3] Liebig a. a. O.

Digitized by Google

noch einer der späteren Forscher, welche sich, wie Zimmermann,[1] Drechsel,[2] Nencki,[3] Jäger[4] und Byk[5] mit den Salzen des Melamins beschäftigt haben, gedenkt der Platinsalze. Möglich, dass diese Verbindungen, weil sie nur in concentrirten Lösungen entstehen, übersehen worden sind, möglich auch, dass die Schwierigkeit, reine Salze zu erhalten — es bilden sich ihrer stets zwei — von dem Studium derselben abgeschreckt hat.

Versetzt man eine heisse, gesättigte Lösung von salzsaurem Melamin mit concentrirtem Platinchlorid, so schiessen beim Erkalten zwei Salze an, das eine in dicken, sechsseitigen Prismen mit schief abgestumpften Endkanten, das andere in dünnen, feinen Nadeln; hat man nicht genug Platinchlorid zugefügt, so ist das Gemenge beider Salze überdies von weissen Krystallen des Chlorhydrats durchsetzt. Man gewinnt ein einheitliches Salz, wenn man Melamin mit concentrirter Salzsäure zu einem Brei anreibt und diesen in sehr starker Platinchloridlösung auflöst. Die entstandenen Krystalle werden ein- oder zweimal aus heisser, concentrirter Platinlösung umkrystallisirt. Man beobachtet alsdann keine Nadeln mehr, sondern nur die sechsseitigen, abgestumpften Prismen.

Diese Krystalle stellen das normale Platinsalz des Melamins mit 2 Mol. Wasser dar. Die Verbindung

$$2[C_3H_6N_6 . HCl]\,PtCl_4 . 2H_2O$$

enthält 5.10 Procent Wasser. Der Versuch ergab 5.07 Procent. Das Wasser entweicht schon über Schwefelsäure vollständig, schneller bei 100°. Die Krystalle verlieren dabei ihren Glanz. Das wasserfreie Salz enthält 29.41 Procent Platin; gefunden wurden 29.51, 29.55 und 29.66 Procent.

Es sind viele Versuche gemacht worden, auch das in feinen Nadeln krystallisirende Salz im reinen Zustande zu erhalten, allein ohne den erwünschten Erfolg. Es ist wohl nicht zu bezweifeln, dass es nach der Formel

$$C_3H_6N_6 . 2HCl . PtCl_4$$

zusammengesetzt ist, welche 36.33 Procent Platin verlangt. In verschiedenen Präparaten, welche scheinbar aus reinen Nadeln bestanden, wurden 34.04, 34.62, 35.08 und 35.10 Procent Platin gefunden. Offenbar enthielten die Krystalle noch von dem ersteren Salz; auch

---

[1] Zimmermann, Ber. chem. Ges. VII, 289.
[2] Drechsel, J. f. prakt. Chem. [2] XI, 304.
[3] Nencki, J. f. prakt. Chem. [2] XVII, 235.
[4] Jäger, Ber. chem. Ges. IX, 1555.
[5] Byk, J. f. prakt. Chem. [2] XX, 346.

Digitized by Google

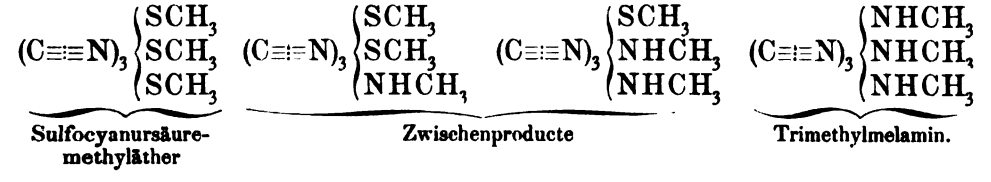
fand man, dass die Nadeln beim Umkrystallisiren leicht in das andere Salz übergehen. Auffallend bleibt es immer, dass sich auch bei einem grossen Überschusse von Platinchlorid das platinärmere Salz mit Vorliebe bildet.

Obwohl die oben mitgetheilten Beobachtungen kaum einen Zweifel darüber lassen konnten, dass hier das altbekannte Melamin vorlag, so ist letzteres bei dieser Gelegenheit doch noch einmal sowohl aus dem Schwefelcyanammonium nach der Methode von Liebig, als auch aus dem Cyanamid nach dem Verfahren von Cloëz und Cannizzaro dargestellt worden. Eine sorgfältige Vergleichung ergab, dass man auf den drei so verschiedenen Wegen zu genau demselben Körper gelangt.

Man konnte mit Bestimmtheit annehmen, dass sich die Amine dem sulfocyanursauren Methyläther gegenüber verhalten würden, wie das Ammoniak. Der Versuch hat den gehegten Erwartungen in vollem Maasse entsprochen.

Einwirkung des Methylamins auf den Sulfocyanursäuremethyläther.

In dieser Reaction werden sämmtliche Erscheinungen beobachtet, welche man nach den Erfahrungen über das Verhalten des Äthers zum Ammoniak erwarten durfte. Unter Austritt nach einander von 1, 2, 3 Mol. Methylmercaptan werden 1, 2, 3 Mol. Methylamin fixirt; es entsteht die Reihe der methylamidirten Basen:



Als ich mich mit diesen Körpern beschäftigte, waren sowohl die im Vorstehenden beschriebenen Ammoniakderivate, als auch die im Folgenden noch zu erwähnenden entsprechenden Basen der Äthylreihe bereits eingehend studirt worden; es genügte daher, die wesentlichen Eigenschaften der Methylverbindungen zu beobachten und ihre Zusammensetzung durch einige wenige analytische Daten festzustellen.

Primäre Methylamidobase. Die mit dem Sulfocyanursäuremethyläther und einer 33procentigen wässerigen Lösung von Methylamin beschickten Röhren zeigten sich, nachdem sie mehrere Stunden auf 100° erhitzt worden waren, von schönen, wohlausgebildeten Krystallen erfüllt. Beim Öffnen der Röhren entwich Methylmercaptan, und das

Digitized by Google

Reactionsproduct erwies sich als vorwaltend aus der primären Base bestehend. Zur Reinigung wurde das Mercaptan verjagt und der Rückstand in wenig concentrirter Salzsäure gelöst. Auf Zusatz von Wasser fiel die primäre Base aus, welche, weil sie noch zwei Mercaptangruppen enthält, nur schwach basische Eigenschaften besitzt. Die Base ist leicht löslich in Alkohol und Äther. Durch Zusatz von Wasser zu der Alkohollösung kann man die Verbindung schnell reinigen. So wurden büschelförmig vereinigte Nadeln, beim langsamen Umkrystallisiren wohlausgebildete Prismen von dem Schmelzpunkte 174—175° erhalten. Da für diese Classe von Verbindungen die Stickstoffzahlen besonders charakteristisch sind, so wurde die Zusammensetzung der Base durch Bestimmung dieses Elementes ermittelt. Die Analyse der bei 100° getrockneten Base ergab 27.47 Procent Stickstoff. Der Formel

$$(C\equiv\equiv N)_3(SCH_3)_2NHCH_3 = C_6H_{10}N_4S_2$$

entsprechen 27.72 Procent.

Obwohl die Verbindung eine so schwache Base ist, dass sie auf Pflanzenfarben kaum mehr einwirkt, so bildet sie doch noch mit den meisten Säuren krystallinische Salze, die aber mit Ausnahme der Doppelsalze ausserordentlich löslich sind. Das salzsaure Salz krystallisirt in undeutlichen Schuppen, das salpetersaure in dünnen Blättchen; am schönsten ist das oxalsaure Salz, es bildet grosse, wohlausgebildete Prismen. Das ziemlich schwerlösliche Platinsalz fällt in kleinen, breiten Nadeln, die sich oft kreuzweise über einander lagern; das in Wasser schwer, in Alkohol leicht lösliche Goldsalz bildet Gruppen dünner Nadeln.

Mit Salzsäure zerfällt die Base schon bei 100° in Methylmercaptan, Methylamin und Cyanursäure.

Secundäre Methylamidobase. Sie bildet sich stets neben der primären und bleibt beim Fällen der letzteren durch Wasser aus der salzsauren Lösung des rohen Reactionsproductes in der stark verdünnten Mutterlauge zurück. Verdampft man diese, nachdem man sie mit Ammoniak neutralisirt hat, so erhält man schliesslich die secundäre Base als krystallinischen Rückstand. Sie wird nach dem Auswaschen des Salmiaks noch einmal in ganz schwacher Salzsäure — die Säure sollte nicht mehr als etwa $^1/_2$ Procent Chlorwasserstoff enthalten — gelöst, wobei noch Spuren von primärer Base zurückbleiben. Die secundäre Methylamidobase ist sehr leicht löslich in Alkohol, weniger in Äther, aus welchen Flüssigkeiten sie nur schwierig krystallisirt. Am besten erhält man sie durch Auflösen in viel siedendem Wasser, aus welchem sie beim Eindampfen in Nadeln vom

Digitized by Google

Schmelzpunkte 144° krystallisirt. Die Zusammensetzung derselben ist durch eine Stickstoffbestimmung ermittelt worden. In der bei 100° getrockneten Substanz wurden 37.42 Procent Stickstoff gefunden. Die Formel

$$(C\equiv\equiv N)_3SCH_3(NHCH_3)_2 = C_6H_{11}N_5S$$

verlangt 37.83 Procent.

Die Salze der Base sind meist sehr löslich; die Lösungen derselben werden durch Wasser nicht zersetzt. Das salzsaure, schwefelsaure und oxalsaure Salz trocknen zu undeutlich krystallinischen Massen ein; am besten krystallisirt das salpetersaure Salz, welches aus Wasser in wohlausgebildeten Nadelgruppen anschiesst. Das Platinsalz bildet kleine, sehr schwerlösliche Nadeln, das Goldsalz wohlausgebildete sechsseitige Prismen, welche sich, da sie in Wasser ziemlich löslich sind, nur langsam ausscheiden.

Mit Salzsäure auf 200° erhitzt, zerfällt die Base in Methylmercaptan, Methylamin und Cyanursäure.

Tertiäre Methylamidobase, Trimethylmelamin. Zur Darstellung dieses Körpers wurde der Sulfocyanursäuremethyläther mit einer 33 procentigen wässerigen Methylaminlösung mehrere Stunden lang auf 180° erhitzt, also auf dieselbe Temperatur, bei welcher der Äther, mit Ammoniak behandelt, Melamin geliefert hatte. Man fand aber, dass das Methylamin minder kräftig wirkte, als das Ammoniak, und dass das Reactionsproduct noch sehr erhebliche Mengen von primärer und secundärer Base enthielt. Es wurde versucht, die Reaction weiter zu führen, indem man bis auf 200° und selbst darüber erhitzte, wobei indessen mehrere Röhren verloren gingen. Aus diesem Grunde hat man es bei späteren Operationen vorgezogen, die Darstellung in zwei Phasen zu bewerkstelligen, indem man zunächst bei einer Temperatur von 130—140° ein Gemenge von primärer und secundärer Base erzeugte und dieses Gemenge von Neuem mit Methylamin nunmehr bei einer Temperatur von 170—180° erhitzte. Ob auf die eine oder die andere Weise erhalten, wurde das Reactionsproduct mit wenig kaltem Wasser ausgezogen, welches die tertiäre Base auflöste, während die primäre und secundäre zurückblieben. Die wässerige Lösung der Triamidobase lieferte beim Eindampfen einen Syrup, welcher nur sehr allmählich erstarrte. Das so erhaltene Trimethylmelamin ist noch nicht völlig rein, da die secundäre Base auch in kaltem Wasser nicht absolut unlöslich ist. Die trimethylirte Base ist sehr löslich, nicht nur in Wasser, sondern auch in Alkohol; eine Reinigung derselben durch Krystallisation ist vergeblich angestrebt worden. Auch die Salze der trimethylirten Base eignen sich nur wenig zur Analyse. Das salzsaure, salpetersaure und schwefelsaure Salz sind äusserst löslich und kaum

Digitized by Google

krystallinisch zu erhalten. Nur das oxalsaure Salz ist schwerer löslich, es schiesst auf Zusatz von Oxalsäure zu der wässerigen Lösung der Base alsbald in concentrisch vereinigten Nadeln an, welche aus Alkohol umkrystallisirt werden können. Da man aber bei den Oxalaten nie ganz sicher ist, ob nicht zwei Salze vorliegen, so blieb schliesslich nichts anderes übrig, als die Zusammensetzung der Base durch die Analyse des Platinsalzes festzustellen. Hierbei stösst man jedoch auf dieselbe Schwierigkeit wie beim Melamin; man erkennt sofort, dass sich zwei Salze bilden, ein in derben Krystallen auftretendes und ein in feinen Nadeln anschiessendes, welche sich glücklicher Weise nicht nur in der Form, sondern auch in der Löslichkeit von einander unterscheiden. Die Nadeln lösen sich viel leichter und können daher durch Auskochen des Gemenges leicht von dem derb krystallisirenden Salze getrennt werden. Letzteres hat die Zusammensetzung

$$2[(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NCH_3H)_3 . HCl]PtCl_4,$$

welche 22.53 Procent Stickstoff und 26.10 Procent Platin verlangt. In dem bei 110° getrockneten Salze wurden 22.14 Procent Stickstoff und 26.06 Procent Platin gefunden.

Einwirkung von Methylamin auf Cyanurchlorid.

Die Schwierigkeit der Gewinnung des trimethylirten Melamins aus dem Sulfocyanursäureäther ist Veranlassung zu dem Versuche gewesen, diesen Körper auf anderem Wege zu erlangen. Nach den erst jüngst noch bezüglich der Darstellung der Sulfocyanursäure gemachten Erfahrungen,[1] nach welchen sich diese Säure sowohl aus dem Methyläther als auch aus dem Cyanurchlorid gewinnen lässt, konnte man mit Sicherheit annehmen, dass sich das Trimethylmelamin auch durch Behandlung des genannten Chlorids mit Methylamin werde erzeugen lassen. Allerdings liegen bereits Versuche einerseits von Liebig[2] über die Einwirkung des Cyanurchlorids auf Ammoniak, andererseits von Laurent[3] über die auf Anilin vor, deren Ergebnisse auf den ersten Blick wenigstens nicht ermuthigend erschienen, insofern diese beiden Forscher Verbindungen erhielten, welche sie beziehungsweise als Chlorcyanamid und Chlorcyananilid, als

$$C_3H_4N_5Cl \text{ und } C_3H_2(C_6H_5)_2N_5Cl,$$

auffassten. Diese Verbindungen erscheinen uns aber heute ungezwungen als Übergangsglieder zwischen dem Cyanurchlorid einerseits und dem gewöhnlichen oder einem triphenylirten Melamin andererseits.

---

[1] Hofmann, Sitzungsber. 1885, 825.
[2] Liebig, Lieb. Ann. X, 45.
[3] Laurent, Ann. de Chim. et de Phys. [3] XXII, 97.

Digitized by Google

$(C{\equiv}{\equiv}N)_2(NH_2)_2Cl$ — Zwischenglied

$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NH_2)_3$ — Melamin

$(C{\equiv}{\equiv}N)_3Cl_3$ — Cyanurchlorid

$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHC_6H_5)_2Cl$ — Zwischenglied

$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHC_6H_5)_3$ — Triphenylmelamin

Eine nähere Beziehung zwischen dem Chlorcyanamid und dem Melamin ist in der That bereits schon vor längerer Zeit von Nencki[1] angedeutet worden, obwohl er ihr unter der Annahme einer von der oben verzeichneten verschiedenen Constitution des Melamins einen anderen Ausdruck leihen musste.

Die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Vermuthung vorausgesetzt, liess sich kaum bezweifeln, dass die weitere Einwirkung des Ammoniaks, beziehungsweise Anilins auf die genannten Zwischenglieder zum Melamin selbst und zu einem triphenylirten Melamin führen werde. Dies ist in der That der Fall.

Das nach Liebig's Angabe durch einfaches Übergiessen von Cyanurchlorid mit Ammoniakflüssigkeit dargestellte Chlorcyanamid braucht nur einige Stunden lang mit starkem, wässerigem Ammoniak im Einschlussrohr bei 100° digerirt zu werden, um alsbald vollkommen reines Melamin zu liefern. Hiermit ist zugleich die einfachste Methode der Melamindarstellung gegeben. Man braucht in diesem Falle natürlich nicht zunächst das Chlorcyanamid darzustellen. Es genügt, das Cyanurchlorid, welches für diesen Zweck nicht einmal völlig rein zu sein braucht, mit starkem Ammoniak bei 100° zu digeriren, um eine fast theoretische Ausbeute an Melamin zu erhalten, welches nach dem Abwaschen des Salmiaks und einmaligem Umkrystallisiren vollkommen rein ist. Die Vermuthung, dass sich bei der Einwirkung von Ammoniak auf Cyanurchlorid Melamin bilden werde, ist übrigens schon vor dreissig Jahren von Cloëz und Cannizzaro[2] gelegentlich ihrer Arbeit über das Cyanamid ausgesprochen worden. Die in Aussicht gestellte experimentale Prüfung dieser Vermuthung scheint indessen nicht zur Ausführung gelangt zu sein, wenigstens finde ich in der Literatur keine Angabe.

Nach den mitgetheilten Ergebnissen durfte man wohl erwarten, dass das Cyanurchlorid unter dem Einflusse des Methylamins in ein dem Chlorcyanamid ähnliches Zwischenproduct und dieses durch geeignete Behandlung mit Methylamin schliesslich in das gesuchte trimethylirte Melamin übergehen werde. Der Versuch hat nicht ermangelt, diese Erwartungen zu erfüllen.

---

[1] Nencki, Ber. chem. Ges. IX, 247.

[2] Cloëz und Cannizaro, Compt. Rend. XXXII, 62.

Digitized by Google

Zweifach methylamidirtes Cyanurchlorid. Übergiesst man gepulvertes Cyanurchlorid mit einer Lösung von Methylamin in absolutem Methylalkohol, so tritt starke Erwärmung ein. Man hört mit dem Zusatze auf, sobald die anfangs stark saure Reaction der Flüssigkeit in eine permanent alkalische umgeschlagen ist. Die Reaction zwischen beiden Körpern nimmt einige Zeit in Anspruch, und oft genug kommt es vor, dass die bereits stark alkalisch gewordene Flüssigkeit nach einigen Augenblicken wieder sauer reagirt. Die sich schnell absetzende, weisse, nur schwach krystallinische Substanz stellt in der That die chlorhaltige Verbindung dar, welche man nach den Erfahrungen von Liebig und Laurent mit dem Ammoniak und Anilin erwarten durfte; die Mutterlauge enthält neben reichlichen Mengen von salzsaurem Methylamin einen krystallinischen Körper, auf den ich weiter unten zurückkommen werde. In Wasser, Alkohol und Äther, selbst bei der Siedetemperatur, ist der ausgeschiedene Körper nahezu unlöslich; in siedendem Eisessig löst er sich, allerdings nicht ganz ohne Zersetzung, auf und wird aus dieser Lösung durch heisses Wasser in hübschen Nadeln ausgefällt, die bei 241° unter Zersetzung schmelzen. Zur Feststellung der Zusammensetzung wurde der Stickstoff und das Chlor in der bei 100° getrockneten Substanz bestimmt. Die Formel

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHCH_3)_2Cl = C_5H_8N_5Cl$$

verlangt 40.35 Procent Stickstoff und 20.46 Procent Chlor; gefunden wurden 40.61 Procent Stickstoff und 20.24, 20.51 und 20.70 Procent Chlor. Von diesen Chlorbestimmungen wurde die erste nach dem Carius'schen Verfahren ausgeführt; bei den beiden letztangeführten hatte man andere Zwecke im Auge, indem man den Körper bei der zweiten mit Wasser, bei der dritten mit einer Lösung von Ammoniak in absolutem Alkohol auf eine Temperatur von 200° erhitzte und die gebildete Salzsäure in der Form von Chlorsilber wog.

Die chlorhaltige Verbindung ist eine schwache Base, welche aus der Lösung in concentrirten Säuren durch Wasser krystallinisch gefällt wird. Die Lösung in Salzsäure liefert mit Platinchlorid ein in schönen Nadeln krystallisirendes, ziemlich schwerlösliches Platinsalz, welches, zwei Mal dargestellt, bei der Analyse einen Gehalt von 26.14 und 26.24 Procent Platin ergab, während das Platinsalz der chlorhaltigen Base 25.75 enthält. Der constant bleibende Überschuss an Platin (vergl. S. 968) gab Veranlassung, das Verhalten der Base zu Säuren einer genaueren Prüfung zu unterwerfen, wobei sich herausstellte, dass dieselbe in saurer Lösung schon nach kurzer Frist das Chlor gegen eine Hydroxylgruppe austauscht. In Folge dieser Umwandlung der Chlorbase besteht das aus saurer Lösung gefällte Platinsalz bereits zum

Digitized by Google

grossen Theile aus der Platinverbindung der hydroxylirten Base, wodurch sich der höhere Platingehalt, welcher beobachtet wurde, einfach erklärt. Die frisch bereitete Lösung der chlorhaltigen Base in verdünnter Schwefelsäure oder Salpetersäure giebt in der That kaum eine Trübung mit Silbernitrat, aber schon nach gelindem Erwärmen entsteht eine starke Fällung. So lange die in der Kälte oder durch gelindes Erwärmen gewonnene Lösung der Base in Säure mit Wasser gefällt wird, entsteht auf Zusatz von Natronlauge ein Niederschlag von Chlorbase, welcher von einem Überschuss nicht gelöst wird, sobald jedoch Wasser keine Veränderung mehr hervorbringt, hat sich der Übergang in die Hydroxylbase bereits vollzogen, und es wird nunmehr durch Natronlauge ein Niederschlag erzeugt, welcher sich mit Leichtigkeit in einem Überschusse des Fällungsmittels auflöst.

Aus der concentrirten salzsauren Lösung der Chlorbase schiessen nach einiger Zeit schöne Krystallblätter, aus der salpetersauren feine Nadeln an; beide Krystallisationen gehören der Chlorbase nicht mehr an, sondern sind bereits Verbindungen der hydroxylirten Base.

Einwirkung von Methylamin auf das zweifach methylamidirte Cyanurchlorid.

Trimethylmelamin. Da das letztgenannte Chlorid, wie bereits oben bemerkt wurde (vergl. S. 964) sein Chlor mit Leichtigkeit gegen die Hydroxylgruppe austauscht, so schien es angezeigt, die Anwesenheit von Wasser in dieser Reaction auszuschliessen. Aus diesem Grunde liess man das Methylamin in methylalkoholischer Lösung auf das Chlorid einwirken. Die Reaction erfolgt im Einschlussrohr schon in wenigen Stunden bei 100°. In dem Reactionsproduct ist eine kleine Menge unlöslicher Substanz suspendirt, wenn das Cyanurchlorid nicht rein war. Wird die filtrirte Flüssigkeit auf dem Wasserbade verdampft, um Alkohol und überschüssiges Methylamin zu verjagen, so bleibt ein von Krystallen durchsetzer Syrup zurück. Auf Zusatz von wenig Wasser lösen sich die Krystalle von salzsaurem Methylamin, während das Trimethylmelamin als Öl zurückbleibt und erst auf Zusatz von mehr Wasser gleichfalls in Lösung geht. Versetzt man die Lösung mit concentrirter Natronlauge, so entweicht das Methylamin beim Erwärmen und das Trimethylmelamin, welches in alkalischen Flüssigkeiten weniger löslich ist als in Wasser, wird wieder ausgeschieden. Es zeigt alle Eigenschaften, welche an dem aus dem Sulfocyanursäureäther dargestellten beobachtet werden (vergl S. 961). Dass sich wirklich Trimethylmelamin gebildet hatte, ist übrigens auch noch durch die Analyse

Digitized by Google

des Platinsalzes festgestellt worden. Es entstanden auch hier wieder die beiden, schon oben erwähnten Salze. Das schwerlösliche wurde ohne Schwierigkeit beim Auskochen des Gemenges der gleichzeitig gefällten Salze mit Wasser im reinen Zustande erhalten. Die Analyse ergab 26.13 Procent Platin. Das Platinsalz

$$2[(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHCH_3)_3.HCl]PtCl_4$$

verlangt 26.01 Procent Platin. Es gelang aber in diesem Falle auch das leicht lösliche, platinreichere Salz rein zu gewinnen (vergl. S. 962). In einem Versuche hatten sich schöne lange Nadeln gebildet, die keine Spur von dem schwerlöslichen Salz enthielten. Die Analyse ergab 14.57 Procent Stickstoff und 33.69 Procent Platin. Der Formel

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHCH_3)_3.2HCl.PtCl_4$$

entsprechen 14.54 Procent Stickstoff und 33.69 Procent Platin.

Noch verdient bemerkt zu werden, dass das Trimethylmelamin eine sehr stabile Materie ist. Man kann es für sich längere Zeit auf 200° erhitzen, ohne dass es verändert wird. Mit Salzsäure lässt sich die Base mehrfach ohne Zersetzung eindampfen, ja selbst bei 100° längere Zeit digeriren; mit Salzsäure auf 150° erhitzt zerfällt die Base in Methylamin und Cyanursäure.

Der Übergang des Trimethylmelamins in Cyanursäure scheint sich nicht in einem Zuge zu vollziehen. Wahrscheinlich entstehen hier Zwischenglieder

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHCH_3)_2OH \text{ und } (C{\equiv}{\equiv}N)_3NHCH_3(OH)_2,$$

welche neben Hydroxylgruppen noch Methylaminreste enthalten. Dem ersten dieser Zwischenglieder, der zweifach methylamidirten Cyanursäure bin ich, wie weiter unten gezeigt werden soll, in einer anderen Reaction begegnet (vergl. S. 968).

Einwirkung von Ammoniak auf das zweifach methylamidirte Cyanurchlorid.

Aus dem letztgenannten Körper kann man durch Behandlung mit verschiedenen Aminen Melaminsubstitute der mannichfaltigsten Zusammensetzung gewinnen. Ihre Anzahl ist Legion. Ich habe nur noch eine hierher gehörige Verbindung dargestellt, deren Beschreibung sich naturgemäss an die des Trimethylmelamins anreiht.

Dimethylmelamin. Lässt man auf das zweifach methylamidirte Cyanurchlorid statt Methylamin Ammoniak in wässeriger Lösung einwirken, so bildet sich das von der Theorie angezeigte Dimethylmelamin

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHCH_3)_2NH_2 = C_5H_{10}N_6.$$

Digitized by Google

Die Reaction vollzieht sich mit Leichtigkeit bei 150°. Wendet man alkoholisches Ammoniak an, so bedarf es einer höheren Temperatur. Dass der ganze Chlorgehalt der behandelten Base eliminirt wird, ergab sich durch die Bestimmung des Chlors, welches bei der Zerlegung einer gewogenen Menge in der Form von Salzsäure ausgetreten war. Die dritte der bei der Analyse des zweifach methylamidirten Cyanurchlorids angeführten Chlorbestimmungen (vergl. S. 964) ist auf diese Weise bewerkstelligt worden.

Verdampft man die klare Lösung, welche sich in dem Digestionsrohr gebildet hat, zur Trockne, so bleibt die durch Eintritt der Amidogruppe an die Stelle von Chlor entstandene Base mit Salmiak gemischt zurück. Um das Ammoniak zu entfernen, wurde die Mischung mit wenig Natronhydrat versetzt und mehrmals eingedampft. Man erhält so die freie Base mit etwas Kochsalz verunreinigt, welches durch Ausziehen mit kaltem Wasser zum grossen Theile, aber nicht vollständig, entfernt werden kann, da die Base selber in Wasser löslich ist. Sie ist eine krystallinische Substanz, welche sich in Alkohol und Äther kaum löst. Mit den Säuren bildet sie lösliche Salze, welche durch Wasser nicht gefällt werden. Von den Salzen sind das schwefelsaure und das oxalsaure etwas schwerer löslich und gut krystallisirt; ersteres erscheint in sechsseitigen Tafeln, letzteres in rhombischen Krystallen. Die Lösungen der Salze werden, da die Base in Wasser löslich ist, nicht durch Ammoniak, wohl aber durch concentrirte Natronlauge gefällt. Ein Überschuss derselben löst den Niederschlag nicht auf, der aber alsbald auf Zusatz von Wasser verschwindet.

Aus der Bildungsweise der Base kann man nicht bezweifeln, dass hier ein Dimethylmelamin vorliegt. Ich bin aber nicht im Stande, analytische Belege dafür zu liefern. Diese Base bildet, gerade so wie das Melamin und das ihr noch näher stehende Trimethylmelamin, zwei verschiedene Platinsalze, nämlich

$$C_5H_{10}N_6,\ 2HCl.PtCl_4 \text{ und } 2(C_5H_{10}N_6.HCl)PtCl_4,$$

deren Eigenschaften nicht wesentlich von einander abweichen — beide krystallisiren in büschelförmigen Nadeln — und deren gesonderte Darstellung mir nicht gelungen ist. Daher stimmten denn auch die analytischen Ergebnisse nur annähernd mit den von der Theorie geforderten überein.

Nebenproducte, welche bei der Einwirkung des Methylamins auf Cyanurchlorid beobachtet wurden.

Das Ziel, welches man bei dem Studium der Wechselwirkung zwischen Methylamin und Cyanurchlorid im Auge hatte, war die ein-

Digitized by Google

fachere Darstellung des Trimethylmelamins, welche in einem der vorhergehenden Paragraphen erörtert worden ist. Es konnte indessen nicht fehlen — wie dies auch bereits angedeutet worden ist — dass bei diesem Studium einige Beobachtungen gemacht wurden, welche mit der gestellten Aufgabe nur noch in entfernterem Zusammenhange stehen. Da es nicht wahrscheinlich ist, dass sich Gelegenheit bieten wird, auf diesen Gegenstand zurückzukommen, so möge es mir gestattet sein, die Ergebnisse dieser Beobachtungen an dieser Stelle parenthetisch einzuschalten.

Zweifach methylamidirte Cyanursäure. Im Vorhergehenden (vergl. S. 965) ist bereits der eigenthümlichen Zerlegung gedacht worden, welche das zweifach methylamidirte Cyanurchlorid in saurer Lösung erleidet. Schon nach kurzem Erwärmen ist das Chlor in der Form von Salzsäure ausgetreten, indem sich demselben eine Hydroxylgruppe substituirt hat. Dieselbe Umwandlung kann durch Wasser bei einer Temperatur von etwa 200° bewirkt werden. Gelegentlich der Darstellung der Base nach diesem Verfahren ist die oben erwähnte (S. 964) zweite Chlorbestimmung ausgeführt worden. Auf die eine wie auf die andere Weise wird die Base in Form eines salzsauren Salzes gewonnen und muss aus der Lösung desselben mit Ammoniak ausgefällt werden. So erhält man einen weissen, undeutlich krystallinischen Niederschlag, der sich selbst in siedendem Wasser nur spurenweise auflöst. Die Base ist in Alkohol und Äther unlöslich, sie verträgt eine Temperatur von 250° ohne Veränderung; stärker erhitzt verkohlt sie, ohne vorher zu schmelzen. Die Zusammensetzung der Verbindung ergiebt sich schon durch ihre Bildung aus dem Chlorkörper. Die Formel:

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHCH_3)_2OH = C_5H_9N_5O$$

ist aber auch noch durch die Analyse eines schwerlöslichen, in schönen langen Nadeln krystallisirenden Platinsalzes festgestellt worden. Die Formel

$$2[(C_5H_9N_5O\,.\,HCl]PtCl_4$$

verlangt 19.45 Procent Stickstoff und 27.04 Procent Platin. Das bei 100° getrocknete Platinsalz gab bei der Analyse 19.24 Procent Stickstoff, 27.08 und 27.11 Procent Platin. Die erste Platinbestimmung bezieht sich auf eine durch die Einwirkung des Wassers bei hoher Temperatur, die zweite auf eine durch Abdampfen mit Salzsäure gewonnene Hydroxylverbindung.

Die zweifach methylamidirte Cyanursäure ist das schon oben (vergl. S. 966) angeführte erste Zwischenglied zwischen dem Trimethylmelamin und der Cyanursäure. Sie bildet, ihrer Zusammensetzung

Digitized by Google

nach, Salze sowohl mit den Säuren als auch mit den Basen. Von den Verbindungen mit Säuren, welche löslich sind und von Wasser nicht zersetzt werden, sind Chlorhydrat und Nitrat, beide wohl krystallisirbar, bei der Beschreibung der Chlorbase (vergl. S. 965) bereits erwähnt worden. Die Fähigkeit der zweifach methylamidirten Säure, sich mit Basen zu vereinigen, erkennt man, wenn dieselbe mit Natronlauge aus der sauren Lösung gefällt wird; zunächst entsteht ein weisser Niederschlag, der sich aber im Überschusse des Fällungsmittels wieder vollständig auflöst. Beim gelinden Verdampfen der Lösung krystallisirt das Natriumsalz in wohlausgebildeten Prismen. Die Lösung dieses Natriumsalzes kann man auch direct aus der Chlorbase gewinnen, wenn man dieselbe mit verdünnter Natronlauge kocht. Sobald die Lösung klar geworden ist, wozu indessen längere Zeit erfordert wird, enthält sie neben Kochsalz das Natriumsalz der zweifach methylamidirten Cyanursäure. Aus der Lösung dieses Salzes wird die Säure durch Neutralisation mit verdünnter Essigsäure wieder gefällt. Kocht man die Chlorbase statt mit Natronhydrat mit einer Lösung von Natriummethylat in Methylalkohol, so wird das Chlor eliminirt. Die Lösung bleibt in Folge des ausgeschiedenen Kochsalzes trübe, klärt sich aber sofort auf Zusatz von Wasser. Dampft man ein, so scheiden sich schöne regelmässige Prismen aus, denen sich bald Kochsalzwürfel hinzugesellen; von letzteren kann man sie durch Umkrystallisiren aus heissem Wasser trennen. Der neue Körper löst sich in Salzsäure und liefert ein schönes, ziemlich lösliches Platinsalz. Die salzsaure Lösung wird durch Ammoniak und durch Natronlauge gefällt; der Niederschlag ist auch in Natronlauge unlöslich. Die Base ist nicht analysirt worden; allein man wird nicht fehlgehen, wenn man sie als den Methyläther der zweifach methylamidirten Cyanursäure, als die Verbindung

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHCH_3)_2OCH_3$$

anspricht.

Methylamidirtes-methoxylirtes Cyanurchlorid. Wie oben (S. 964) bereits erwähnt worden ist, bleibt bei der Darstellung des zweifach methylamidirten Cyanurchlorids in der Mutterlauge neben salzsaurem Methylamin ein krystallinischer Körper. Man erhält ihn rein, wenn man die Flüssigkeit eindampft, die ausgeschiedenen Krystalle durch Waschen mit kaltem Wasser von dem Methylaminsalze trennt und mehrfach aus siedendem Wasser umkrystallisirt. So gewonnen, stellt die Substanz nadelförmige, in Alkohol und Äther lösliche Krystalle dar, welche bei 155° schmelzen. Die Substanz ist in Salzsäure und Salpetersäure löslich; die Lösungen werden durch Wasser nicht gefällt. Beim Verdampfen der Flüssigkeiten werden krystallisirbare,

Digitized by Google

leichtlösliche Salze erhalten, aus denen die Base durch Ammoniak oder Natronhydrat unverändert wieder ausgefällt wird; der Niederschlag wird von einem Überschusse der Fällungsmittel nicht wieder aufgelöst. In der salzsauren Lösung der Base wird weder durch Platin-, noch durch Goldchlorid ein Niederschlag hervorgebracht.

Die Analyse der bei 100° getrockneten Base gab Zahlen, welche auf eine Verbindung

$$(C\equiv\equiv N)_3(NHCH_3)(OCH_3)Cl = C_5H_7N_4OCl$$

schliessen lassen.

	Theorie		Versuch		
C_5	60	34.39	34.60	—	—
H_7	7	4.01	4.31	—	—
N_4	56	32.09	—	31.66	—
O	16	9.17	—	—	—
Cl	35.5	20.34	—	—	20.32
	174.5	100.00			

Die Bildung eines solchen Körpers wird verständlich, wenn man sich erinnert, dass das Methylamin in methylalkoholischer Lösung auf das Cyanurchlorid zur Wirkung gelangte:

$$(C\equiv\equiv N)_3Cl_3 + CH_3NH_2 + CH_3OH = (C\equiv\equiv N)_3(NHCH_3)(OCH_3)Cl + 2HCl$$

Die oben angeführte Chlorbestimmung wurde in der Art ausgeführt, dass man die Base im Einschlussrohre mit Wasser auf 200° erhitzte, wobei sie sich in Methylamin, Methylalkohol (?), Salzsäure und Cyanursäure spaltete. Der experimentale Nachweis des Methylalkohols ist indessen nicht geführt worden.

Bemerkenswerth ist es, dass, während die zweifach methylamidirte Chlorbase das Chlor schon beim Eindampfen der salzsauren Lösung entlässt, der vorliegende Körper mit Säuren zum Sieden erhitzt werden kann, ohne sich seines Chlors zu begeben.

Einwirkung des Dimethylamins auf den Sulfocyanursäuremethyläther und auf das Cyanurchlorid.

Es schien von Interesse, zumal im Hinblick auf die weiter unten zu erörternde Frage nach der Constitution des Melamins, das Verhalten auch eines secundären Amins zu dem Methyläther in den Kreis der Betrachtung zu ziehen. Zunächst sind einige Versuche mit dem Dimethylamin angestellt worden. Die Theorie stellt hier die Verbindungen

$$(C\equiv\equiv N)_3(SCH_3)_2N(CH_3)_2,\quad (C\equiv\equiv N)_3SCH_3[N(CH_3)_2]_2,\quad (C\equiv\equiv N)_3[N(CH_3)_2]_3$$

Digitized by Google

in Aussicht, allein es hätte kaum ein Interesse geboten, die beiden ersten Verbindungen darzustellen. Die Versuchsbedingungen wurden daher alsbald so gewählt, dass man die Bildung der tertiären Base, des hexamethylirten Melamins erwarten durfte, d. h. man digerirte die Mischung bei einer Temperatur von 200 bis 220°. Beim Öffnen der Röhren entwickelte sich reichlich Methylmercaptan, allein die im Rückstande verbleibenden Basen enthielten gleichwohl noch Schwefel, der ihnen auch nicht völlig entzogen werden konnte, als das Reactionsproduct zum zweiten und selbst zum dritten Male mit Dimethylamin eingeschlossen wurde. Angesichts dieser Schwierigkeiten schien es angezeigt, dem gesuchten Körper auf einem anderen Wege nachzugehen. Derselbe musste auch, und wahrscheinlich viel leichter, durch die Wechselwirkung zwischen Cyanurchlorid und Dimethylamin erhalten werden. Der Versuch hat diese Erwartung in erwünschter Weise bestätigt.

Tertiäre Dimethylamidobase, Hexamethylmelamin. Zur Vermeidung eines Zwischenkörpers

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3[N(CH_3)_2]_2Cl,$$

auf welchen man nach den Erfahrungen mit dem Methylamin bei der Behandlung von Cyanurchlorid mit wässerigem Dimethylamin gefasst sein musste, liess man das Amin in Form seines salzsauren Salzes auf das Chlorid einwirken. Gleiche Gewichtsmengen salzsauren Dimethylamins und Cyanurchlorids wurden mit einander verrieben, und die Mischung schnell, um die Anziehung von Feuchtigkeit möglichst auszuschliessen, in einer Probirröhre über freiem Feuer zum Schmelzen erhitzt. Es empfiehlt sich, in kleinem Maassstabe zu arbeiten; bei meinen Versuchen wurden in der Regel 4—5 g der Mischung angewendet. Man erhitzt, so lange sich Salzsäure entwickelt, wobei in den oberen Theil der Röhre etwas Cyanurchlorid sublimirt, welches man wiedergewinnen kann. Der beim Erkalten erstarrende Rückstand in der Probirröhre enthält das gebildete hexamethylirte Melamin in der Form seines salzsauren Salzes. Dieses wird in siedendem Wasser gelöst, die Flüssigkeit zur Entfernung unlöslicher Nebenproducte filtrirt und mit Natronlauge gefällt. Der nur schwach krystallinische Niederschlag, welcher sich in einem Überschusse des Fällungsmittels nicht wieder auflöst, liefert beim Umkrystallisiren aus siedendem Alkohol schöne Nadeln, welche bei 171—172° schmelzen. Das Hexamethylmelamin ist eine wohlcharakterisirte Base, welche sich in den Säuren auflöst; auf Wasserzusatz fällt sie nicht wieder aus. Die salzsaure Lösung giebt mit Platinchlorid einen in langen, dünnen Nadeln krystallisirenden, in Wasser schwer, in Alkohol etwas leichter löslichen Niederschlag.

Digitized by Google

Das Goldsalz hat ähnliche Eigenschaften; in Wasser ist es noch schwerer, in Alkohol etwas leichter löslich.

Da über die Zusammensetzung der Verbindung kein Zweifel obwalten konnte, so durfte man sich mit einer Stickstoffbestimmung begnügen. Für diese Bestimmung wurde die Substanz bei 100° getrocknet, bei welcher Temperatur sie indessen bereits zu sublimiren beginnt. Es wurden 40.25 Procent Stickstoff gefunden. Die Verbindung

$$(C\equiv\equiv N)_3[N(CH_3)_2]_3 = C_9H_{18}N_6$$

enthält 40.00 Procent.

Das oben erwähnte Platinsalz gab 23.04 Procent Platin. Der Formel

$$2(C_9H_{18}N_6.HCl)PtCl_4$$

entsprechen 23.46 Procent.

Das Hexamethylmelamin kann man auch erhalten, wenn man Cyanurchlorid statt mit salzsaurem Dimethylamin, mit salzsaurem Trimethylamin behandelt. Es entwickelt sich alsdann statt Salzsäure Chlormethyl:

$$(C\equiv\equiv N)_3Cl_3 + 3[(CH_3)_3N] = (C\equiv\equiv N)_3[N(CH_3)_2]_3 + 3CH_3Cl.$$

Der Versuch wurde im Übrigen genau so ausgeführt, wie bei der Darstellung der Verbindung aus Dimethylamin. Das so gewonnene Hexamethylmelamin wurde durch die Schmelzpunktbestimmung mit dem aus Dimethylamin erzeugten identificirt.

Beim Erhitzen mit Salzsäure im Einschlussrohr auf 200° zerfällt das Hexamethylmelamin in Cyanursäure und Dimethylamin. Da es, wie weiter unten erhellen wird, von Interesse war, die Rückbildung des Dimethylamins durch eine Zahl festzustellen, so wurde das zurückgewonnene Dimethylamin in das charakteristisch krystallisirende Platinsalz verwandelt, welches bei der Analyse 38.85 Procent Platin hinterliess. Das Dimethylaminplatinchlorid enthält 38.95 Procent.

Einwirkung des Äthylamins auf den Sulfocyanursäuremethyläther.

Sie verläuft im Wesentlichen gerade so wie die analogen Reactionen mit Ammoniak und Methylamin. Die Äthylabkömmlinge sind früher studirt worden, als die entsprechenden Verbindungen in der Methylreihe: daher die etwas eingehendere analytische Behandlung der Äthylkörper.

Primäre Äthylamidobase. Sie entsteht unter Abspaltung von Methylmercaptan, wenn man den Sulfocyanursäuremethyläther mit einer alkoholischen Äthylaminlösung sechs Stunden lang auf 100° erhitzt.

Digitized by Google

Das Reactionsproduct bildet eine krystallinische Masse, vorzugsweise aus der primären Base bestehend, der aber schon etwas von der secundären beigemischt sein kann. Um erstere rein zu erhalten, löst man die Krystalle in wenig concentrirter Salzsäure auf; Zusatz von Wasser zu dieser Lösung fällt die primäre Base in Krystallen, welche in siedendem Wasser schwer, in kaltem Alkohol leicht löslich sind; aus siedendem, verdünntem Alkohol werden beim Erkalten glänzende Nadeln erhalten, welche bei 114° schmelzen. Die Analyse der bei 100° getrockneten Substanz lieferte Zahlen, welche der Formel

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(SCH_3)_2NHC_2H_5 = C_7H_{12}N_4S_2$$

entsprechen:

	Theorie		Versuch
C_7	84	38.89	38.78
H_{12}	12	5.56	5.96
N_4	56	25.92	—
S_2	64	29.63	—
	216	100.00	

Das salzsaure Salz liefert mit Platinchlorid ein in Prismen krystallisirendes Salz von der Formel

$$2(C_7H_{12}N_4S_2.HCl)PtCl_4,$$

welches 23.12 Procent Platin enthält; gefunden wurden 23.28 Procent.

Secundäre Aethylamidobase. Wird der Sulfocyanursäuremethyläther mit einer alkoholischen Aethylaminlösung mehrere Stunden lang auf 140° erhitzt, so entsteht vorwaltend die secundäre Base; es bilden sich aber gleichzeitig auch die beiden anderen, und die Trennung ist nicht leicht; sie gelingt noch am besten, indem man das Reactionsproduct nach dem Verjagen des Mercaptans mit viel Wasser auskocht, welches die Triamidobase etwas leichter löst. Der so erhaltene Rückstand wird mit einer grösseren Menge höchst verdünnter Salzsäure ($^1/_2$ procentiger) ausgezogen, in welcher sich die secundäre Base löst, während die primäre zurückbleibt. Die Lösung wird mit Ammoniak übersättigt und eingedampft, und der Rückstand, nachdem der Salmiak durch kaltes Wasser entfernt ist, mit Alkohol aufgenommen, dem man siedendes Wasser bis zur Trübung zusetzt. Nach längerem Stehen bilden sich Krystallnadeln vom Schmelzpunkt 83—84°. Des Öfteren muss diese Operation, um eine reine Substanz zu erhalten, wiederholt werden.

Die Zusammensetzung der Diäthylamidobase ist durch die Stickstoffbestimmung ermittelt worden. Die Formel

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3SCH_3(NHC_2H_5)_2 = C_8H_{15}N_5S$$

erheischt 32.86 Procent Stickstoff; gefunden wurden 32.51 Procent.

Digitized by Google

Das salzsaure Salz der Base ist krystallinisch, ausserordentlich löslich in Wasser, etwas schwerer in Alkohol, unlöslich in Äther; die alkoholische Lösung wird von Äther gefällt. Das Nitrat ist schwerer löslich und gut krystallisirbar. Das Oxalat bildet feine, sehr lösliche Nadeln. Das Sulfat konnte nicht krystallinisch erhalten werden. Das Platinsalz ist sehr schwer löslich und fällt aus heissen, verdünnten Lösungen in feinen Nadeln; das Goldsalz scheidet sich als Öl aus, welches allmählich zu einer strahligen Krystallmasse erstarrt. Auch ein krystallinisches Doppelsalz mit Zinnchlorid ist beobachtet worden.

Tertiäre Aethylamidobase, Triäthylmelamin. Sie kann sowohl aus dem Sulfocyanursäuremethyläther, als auch aus dem Cyanurchlorid gewonnen werden. Um sie auf erstere Weise zu erhalten, muss der Äther längere Zeit mit einer starken, wässerigen Lösung von Aethylamin auf 180—200° erhitzt werden. Man erkennt, dass die Umsetzung vollendet ist, wenn das Reactionsproduct nach dem Verjagen des Mercaptans keinen Schwefel mehr enthält.

Bequemer ist die Darstellung aus Cyanurchlorid. Was diese anlangt, so darf ich auf das, was bezüglich der analogen Reaction in der Methylreihe gesagt worden ist, verweisen (vergl. S. 965). Ich will indessen noch besonders bemerken, dass auch den Zwischenkörpern die nöthige Aufmerksamkeit geschenkt worden ist. Die weisse, in erster Linie durch die Einwirkung von Äthylamin auf Cyanurchlorid entstehende Verbindung

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHC_2H_5)_2Cl$$

ist zwar selbst nicht analysirt worden, allein man hat sie durch Auflösen in Salzsäure in das schön krystallisirte Salz der entsprechenden Hydroxylverbindung

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHC_2H_5)OH.HCl$$

umgewandelt, und dessen Zusammensetzung durch die Analyse des Platinsalzes

$$2[(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHC_2H_5)_2OH.HCl]PtCl_4$$

festgestellt (Theorie 25.09, Versuch 25.16).

Hat man das Zwischenproduct dargestellt — was nicht eigentlich nothwendig ist —, so kann man dasselbe durch einen Überschuss stark alkoholischer Äthylaminlösung in wenigen Stunden schon bei 100° in Triäthylmelamin überführen. Man verjagt das überschüssige Äthylamin und dampft zur Syrupconsistenz ein. Durch Behandlung mit kaltem Wasser wird das salzsaure Äthylamin ausgezogen; das zurückbleibende dickflüssige Triäthylmelamin erstarrt allmählich zu

Digitized by Google

einer schwach krystallinischen Masse. Man löst in Alkohol und versetzt die Lösung mit siedendem Wasser bis zur milchigen Trübung. Beim langsamen Erkalten scheiden sich schöne Nadeln vom Schmelzpunkte 73—74° aus. Bei mehreren Operationen blieben in der geschmolzenen Base einige ungeschmolzene Filamente zurück. Man fand, dass sie einer schwerlöslichen Substanz angehörten, welche man durch Entfernung der ersten Krystallanschüsse beseitigen konnte (vergl. S. 965). Dieser schwerer lösliche Körper erschien nur, wenn man nicht vollkommen reines Cyanurchlorid mit Äthylamin digerirt hatte. Das Triäthylmelamin ist in Alkohol, Äther und Benzol löslich. Aus diesen Lösungen krystallisirt es aber nur mit Schwierigkeit; selbst bei freiwilliger Verdunstung bilden sich gewöhnlich nur undeutliche Krystallmassen.

Die einfachen Salze des Triäthylmelamins sind ausserordentlich löslich und mit Ausnahme des Chlorhydrats schwer krystallisirbar. Das Platinsalz dagegen bildet schwerlösliche, lange, feine Nadeln. Das Goldsalz fällt als Öl, welches allmählich krystallinisch erstarrt. Mit Silbernitrat entsteht in der verdünnten alkoholischen Lösung der Base ein weisser, krystallinischer Niederschlag, der sich beim Umkrystallisiren aus heissem Wasserin feinen Nadeln abscheidet.

Von den folgenden Analysen beziehen sich die Stickstoffbestimmung im Triäthylmelamin und die erste Platinbestimmung auf die aus Cyanurchlorid, die zweite Platinbestimmung und die Silberbestimmungen auf die aus dem Sulfocyanursäuremethyläther dargestellte Base.

Der Formel

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHC_2H_5)_3 = C_9H_{18}N_6$$

entsprechen 40.00 Procent Stickstoff; gefunden wurden 40.44 Procent.

Das Platinsalz

$$2(C_9H_{18}N_6 . HCl)PtCl_4$$

enthält 31.41 Procent Platin; die Analyse gab 31.60 und 31.35 Procent.

Das Silbersalz hat die Formel

$$2(C_9H_{18}N_6)AgNO_3 = C_{18}H_{36}N_{13}O_3Ag$$

	Theorie		Versuch		
C_{18}	216	36.61	36.83	—	—
H_{36}	36	6.10	6.47	—	—
N_{13}	182	30.85	—	—	—
O_3	48	8.14	—	—	—
Ag	208	18.30	—	18.48	18.00
	590	100.00.			

Das für die beiden Silberbestimmungen verwendete Salz stammte aus zwei Darstellungen.

Digitized by Google

Das Triäthylmelamin ist eine sehr stabile Base; die salzsaure Lösung kann lange gekocht werden, ohne dass Zersetzung eintritt; auch durch mehrstündige Digestion im Einschlussrohre bei 100° erleidet sie keine Veränderung. Mit concentrirter Salzsäure einige Stunden auf 150° erhitzt, liefert das Triäthylmelamin, ebenso wie die primäre und secundäre Base, Cyanursäure und Äthylamin, denen sich bei der Umbildung der zuletzt genannten beiden Basen Methylmercaptan hinzugesellt.

Einwirkung von Diäthylamin auf den Sulfocyanursäuremethyläther und das Cyanurchlorid.

Bei der Einwirkung von Diäthylamin auf den Sulfocyanursäureäther konnte trotz längerer Digestion bei hochgesteigerter Temperatur die schwefelfreie Base nicht erhalten werden. Man war also auf das Cyanurchlorid angewiesen. Da das Diäthylamin im wasserfreien Zustande zur Verfügung stand, so lag kein Grund vor, wie dies bei dem Dimethylamin der Fall war, die Base in Form ihres Chlorhydrats in Anwendung zu bringen. Die Reaction ist indessen eine äusserst heftige, und es war daher angezeigt, die Base tropfenweise auf stark abgekühltes, gepulvertes Cyanurchlorid fliessen zu lassen, so lange sich noch Wärmeentwickelung wahrnehmen liess. Die Masse wurde alsdann über freier Flamme erhitzt, bis alle Salzsäure entfernt war.

Hexäthylmelamin. Lässt man, wenn keine Salzsäure mehr entweicht, das Reactionsproduct erkalten, so bleibt ein brauner, von zerfliesslichen Blättern salzsauren Diäthylamins durchsetzter Teig zurück. Bei Behandlung des Productes mit Wasser scheidet sich alsbald ein braunes Öl aus, indem das salzsaure Diäthylamin in Lösung geht. Auf Zusatz von Salzsäure löst sich das Öl wieder auf, welches also das freie Hexäthylmelamin darstellt. Die Base ist auch in Alkohol löslich, aber alle Versuche, sie aus Alkohol oder Äther zum Krystallisiren zu bringen, sind fehlgeschlagen, so dass schliesslich nichts übrig blieb, als die Zusammensetzung:

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3[N(C_2H_5)_2]_3 = C_{15}H_{30}N_6$$

durch die Analyse des Platin- und des Goldsalzes festzustellen, welche man gut krystallisirt erhält, wenn man der heissen Lösung des Chlorhydrats vor der Fällung mit Platin-, beziehungsweise Goldchlorid etwas Alkohol zufügt.

Das in derben Krystallen ausfallende, in Wasser schwer, in Alkohol leichtlösliche Platinsalz hat die Zusammensetzung:

$$2(C_{15}H_{30}N_6 . HCl)PtCl_4,$$

Digitized by Google

welcher 19.51 Procent Platin entsprechen; in dem bei 100° getrockneten Platinsalze wurden 19.59 Procent gefunden

Das Goldsalz bildet in Wasser und Alkohol schwer lösliche Nadeln. Die Formel

$$C_{15}H_{30}N_6 . HCl . AuCl_3$$

verlangt 31.07 Procent Gold, während der Versuch mit dem bei 100° getrockneten Salze 31.10 Procent ergeben hat.

Mit concentrirter Salzsäure im Einschlussrohr auf 150° erhitzt, spaltet sich das Hexäthylmelamin in Diäthylamin und Cyanursäure.

Einwirkung des Amylamins auf den Sulfocyanursäuremethyläther.

Man hat sich nur überzeugen wollen, dass auch die Amine der höheren Reihen noch mit dem Äther in Wechselwirkung treten.

Primäre Amylamidobase. Sie entsteht leicht durch Digeriren des Äthers mit alkoholischem Amylamin bei 100°. Das Reactionsproduct wird nach dem Verjagen des Mercaptans in siedendem Alkohol gelöst, aus welchem sich die Base beim Erkalten in seideglänzenden, büschelweise gruppirten Nadeln vom Schmelzpunkte 96° ausscheidet. Sie löst sich leicht in Salzsäure auf; die Lösung wird durch Wasser gefällt. Die Formel der Base

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(SCH_3)_2NHC_5H_{11} = C_{10}H_{18}N_4S_2$$

ist durch eine Elementaranalyse festgestellt worden. Die Theorie verlangt 46.51 Procent Kohlenstoff und 6.99 Procent Wasserstoff; gefunden wurden 46.86 Procent Kohlenstoff und 7.35 Procent Wasserstoff.

Die Base wird von concentrirter Salzsäure schon bei gewöhnlicher Temperatur langsam zersetzt; jedenfalls entwickelten sich reichliche Mengen von Methylmercaptan, als bei dem Versuche, ein Platinsalz zu gewinnen, die salzsaure Lösung der Base eine Zeit lang stehen geblieben war. Diese Zersetzung ist wohl der Grund, weshalb ein Platinsalz der Amylbase nicht erhalten werden konnte.

Einwirkung des Piperidins auf den Sulfocyanursäuremethyläther.

Das Verhalten des Sulfocyanursäuremethyläthers gegen secundäre Amine ist eigentlich bereits hinreichend durch die Versuche mit Dimethylamin und Diäthylamin gekennzeichnet. Es schien gleichwohl

Digitized by Google

von Interesse, die Einwirkung auch eines secundären Monamins mit einem zweiwerthigen Atomcomplex auf den Äther zu studiren. Für diesen Zweck bot Piperidin das geeignetste Material.

Ich habe mich nicht dabei aufgehalten, die primäre piperidylamidirte Base darzustellen, sondern bin zufrieden gewesen, die Existenz der secundären und tertiären durch ein Paar Versuche darzulegen.

Secundäre Base. Durch Erhitzen des Methyläthers mit Piperidin während fünf Stunden auf 200° wird ein dickes Öl erhalten, welches nach dem Abdunsten des anhaftenden Methylmercaptans allmählich krystallinisch erstarrt. Diese Krystallmasse wird mit Wasser ausgekocht, um noch etwaige Spuren von Piperidin hinwegzunehmen, und sodann aus wenig Alkohol umkrystallisirt. Man erhält auf diese Weise farblose Krystalle, welche bei 106—107° schmelzen. Die Base löst sich leicht in Salzsäure und liefert mit Platinchlorid ein schwerlösliches Doppelsalz. Mit Goldchlorid entsteht eine harzige Fällung.

Die Zusammensetzung der secundären Base wurde durch Bestimmung des Stickstoffs und des Schwefels in der bei 100° getrockneten Substanz festgestellt; gefunden wurden 24.49 Procent Stickstoff und 10.45 Procent Schwefel. Die Formel

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3SCH_3(NC_5H_{10})_2 = C_{14}H_{23}N_5S$$

verlangt 23.89 Procent Stickstoff und 10.92 Procent Schwefel.

Das bereits erwähnte Platinsalz hat die Zusammensetzung:

$$2[C_{14}H_{23}N_5S.HCl]\ PtCl_4$$

und enthält 19.74 Procent Platin; gefunden wurden 19.74 Procent.

Tertiäre Base, Tripiperidylmelamin. Erhitzt man die Mischung von Sulfocyanursäuremethyläther mit Piperidin statt auf 200°, wie für die Darstellung der secundären Base, auf eine Temperatur von 250°, so wird der ganze Schwefelgehalt des ersteren in der Form von Methylmercaptan eliminirt, und man erhält nach dem Aufkochen des Röhreninhalts mit Wasser zur Entfernung flüchtiger Producte eine zähe, harzige Masse, welche beim Erkalten erstarrt. Durch Auflösen in siedendem Alkohol wird die Base in kleinen Nadeln gewonnen, welche bei 213° schmelzen. Von Säuren wird sie leicht gelöst; die salzsaure Lösung giebt mit Platinchlorid einen schwerlöslichen, gelben, krystallinischen Niederschlag, mit Goldchlorid eine harzige Fällung. Behufs Feststellung der Zusammensetzung der tertiären Base wurde der Stickstoff in derselben bestimmt. Der Versuch ergab 25.88 Procent. Der Formel

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NC_5H_{10})_3 = C_{18}H_{30}N_6$$

entsprechen 25.45 Procent Stickstoff. Das Platinsalz

$$2[C_{18}H_{30}N_6.HCl]PtCl_4$$

enthält 18.18 Procent Platin; gefunden wurden 18.23 Procent.

Digitized by Google

Mit Salzsäure im Einschlussrohr auf 150° erhitzt, zerfällt sowohl die secundäre wie die tertiäre Piperidylbase in Piperidin und Cyanursäure.

Einwirkung des Anilins auf den Sulfocyanursäuremethyläther und das Cyanurchlorid.

Hier will ich nur bemerken, dass in beiden Reactionen das von der Theorie in Aussicht gestellte Triphenylmelamin

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3(NHC_6H_5)_3$$

erhalten worden ist. Versuche über aromatische Melamine, welche ich der Akademie demnächst mitzutheilen hoffe, haben Ergebnisse geliefert, bei deren Darlegung ich nothwendig auf diesen Körper zurückzukommen haben werde. Es scheint daher angezeigt, für den Augenblick auf eine nähere Erörterung des in den angeführten Reactionen gebildeten Triphenylmelamins zu verzichten.

Einwirkung des Diphenylamins auf das Cyanurchlorid.

Aus den eben angeführten Gründen soll an dieser Stelle auch nicht mehr mitgetheilt werden, als dass aus der Wechselwirkung zwischen den in der Überschrift genannten Verbindungen in der That das von der Theorie versprochene Hexaphenylmelamin

$$(C{\equiv}{\equiv}N)_3[N(C_6H_5)_2]_3$$

mit Leichtigkeit erhalten wird.

Nachschrift.

Die vorliegende Abhandlung war bereits vollendet, als mir im letzten am 26. October ausgegebenen Hefte der »Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft«[1] ein Referat aus den Verhandlungen der schwedischen Akademie der Wissenschaften (*Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handlingar* Bd. 10. Nr. 6. 7) über eine Reihe schöner Untersuchungen von Hrn. PETER CLAËSSON zu Gesichte kam, welches mir zeigt, dass ich mit einem Theil meiner Versuche — denen, welche

[1] Ber. der chem. Ges. XVIII [R.] 197.

Digitized by Google

das Cyanurchlorid angehen — mit dem ausgezeichneten schwedischen Forscher auf demselben Arbeitsgebiete zusammengetroffen bin.

Angesichts der etwas früheren Veröffentlichung des Hrn. Peter Claësson will ich nur noch bemerken, dass sich meine schon im letzten Sommer angestellten Versuche naturgemäss an die im Sitzungsberichte vom 30. Juli (XXXVIII, 821) veröffentlichte Arbeit über die Sulfocyanursäure anschliessen und gleichzeitig mit der letztgenannten Untersuchung der Akademie in ihrer Sitzung am 23. Juli dieses Jahres (Sitzungsbericht XXXVII, 751) vorgetragen worden sind.

31. October 1885.

A. W. H.

Digitized by Google

47. Über die den Alkylcyanamiden entstammenden alkylirten Isomelamine und über die Constitution des Melamins und der Cyanursäure.

Von A. W. Hofmann.

(Vorgetragen am 23. Juli; — gedruckt im Bericht vom 29. October [St. XLII]; — ausgegeben am 5. November.)

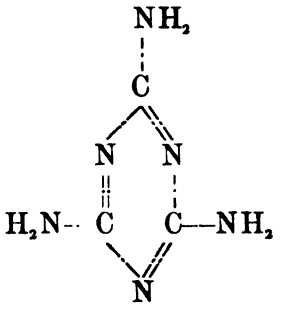
Durch die in der vorhergehenden Abhandlung ausführlich beschriebenen Versuche habe ich eine umfassende Gruppe alkylirter Basen kennen gelehrt, welche sich ungezwungen dem Melamin unterordnen, obwohl sie bislang aus demselben noch nicht dargestellt worden sind. Alle diese Basen, ebenso wie das Melamin selber, entstammen dem Sulfocyanursäuremethyläther, über dessen Constitution kein Zweifel obwaltet. Sie entstehen einfach, indem eine oder mehrere Amidgruppen, oder Substitute derselben, für einen oder mehrere Mercaptanreste in den Äther eintreten; auch habe ich kein Bedenken getragen, diese ganze Reihe von Körpern als Amidverbindungen anzusprechen. Mit dieser Auffassung stimmt auch die Wahrnehmung überein, dass sich viele derselben ebenso leicht, wenn nicht leichter, aus dem Cyanurchlorid bilden, indem man die Chloratome durch Amidgruppen ersetzt.

Bezüglich der Constitution des Melamins selber sind indessen die Ansichten der Chemiker getheilt geblieben. Liebig[1] in der berühmten Abhandlung über einige Stickstoffverbindungen, welcher wir die erste Kenntniss des Melamins verdanken, betrachtet diese Base als eine Amidverbindung, und dieser Ansicht huldigen wohl die meisten Chemiker. Neuerdings sind aber mehrfach Stimmen laut geworden, welche sich für eine imidartige Structur dieser Base ausgesprochen haben. Die einander gegenüberstehenden Auffassungen spiegeln sich in folgenden graphischen Formeln:

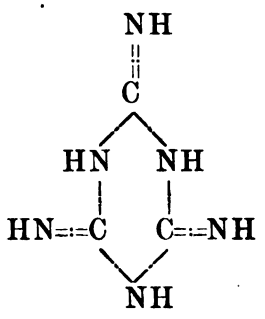
[1] Liebig, Lieb. Ann. X, 21.

Digitized by Google

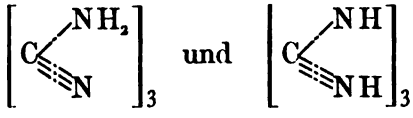
Amidformel des Melamins



Imidformel des Melamins

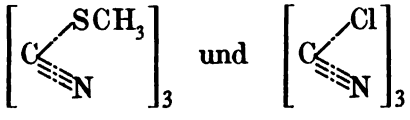


Diese Formeln mögen im Folgenden durch die knapperen, kaum minder durchsichtigen Ausdrücke



wiedergegeben werden, welche überdies den Vorzug haben, dass sie sich den in der vorhergehenden Abhandlung bereits gebrauchten anschmiegen.

Betrachtet man die Bildung der in vorliegender Arbeit beschriebenen Melamine nochmals unter Berücksichtigung dieser beiden Ansichten über die Structur des Melamins, so ist nicht zu verkennen, dass sich der Übergang eines Äthers oder eines Chlorids von der Zusammensetzung beziehungsweise

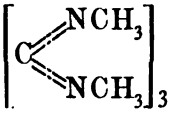


unter dem Einflusse des Ammoniaks oder der Amine einerseits in Mercaptan oder Salzsäure, andererseits in Melamine weit einfacher erklärt, wenn man dem Melamin die erstere, als wenn man ihm die letztere Structur zuschreibt. Ohne bedenkliche Atomumlagerungen können Melamine der letzten Gattung aus dem Sulfocyanursäureäther oder dem Cyanurchlorid gar nicht zu Stande kommen. Welche Verschiebungen hier eintreten müssen, giebt sich am besten zu erkennen, wenn man die Melaminbildung durch secundäre Amine näher ins Auge fasst. Da in so gebildeten Basen, wenn man sie von einem imidartig construirt gedachten Melamin ableitet, die sechs Alkyle, welche den Wasserstoff in den sechs Imidgruppen ersetzen, von nicht mehr als drei Moleculen secundären Amins geliefert werden, so kann sich die Reaction nur vollziehen, indem sich eine Alkylgruppe des Amins von dem Stickstoffatome desselben loslöst, um sich mit einem anderen Stickstoffatome zu vereinigen. Bei der Zerlegung eines

Digitized by Google

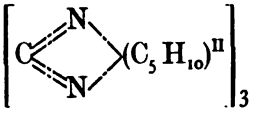
solchen sechsfach alkylirten Melamins unter Mitwirkung des Wassers würde sich — sollte man annehmen — auf der einen Seite Alkylcyanurat, auf der anderen ein primäres Alkylamin erzeugen. Der Versuch hat aber gezeigt, dass unter gleichzeitiger Ausscheidung von Cyanursäure das secundäre Alkylamin, welches als Ausgangspunkt gedient hat, zurückgebildet wird.

Das dem Dimethylamin entstammende sechsfach methylirte Melamin würde die Zusammensetzung



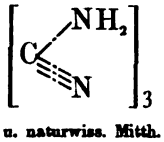
besitzen und sollte unter dem Einflusse des Wassers in Methylcyanurat und in Methylamin zerfallen. In Wirklichkeit entsteht aber neben Cyanursäure wieder Dimethylamin (vergl. S. 972), und es bleibt nichts anderes übrig, als anzunehmen, dass die Methylgruppe, welche sich bei der Bildung des sechsfach methylirten Melamins von ihrem Stickstoffatome getrennt hatte, bei der Zerlegung wieder zu diesem Stickstoffatome zurückkehrt.

Lässt man die Melaminbildung durch secundäre Amine erfolgen, in denen, wie in dem Piperidin und Coniin zweiwerthige Atomgruppen functioniren, so stösst man auf ähnliche Schwierigkeiten. Bei der Bildung eines Piperidinabkömmlings von der Formel

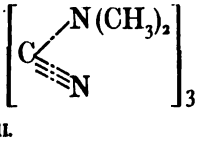


muss sich die zweiwerthige Atomgruppe C_5H_{10}, welche noch eben mit ihrer ganzen Atombindekraft an einem Atom Stickstoff haftete, bei ihrer Einfügung in das Melaminmolecul, alsbald dazu verstehen, zwei Stickstoffatome zu verketten, um sich im nächsten Augenblick bei der Spaltung des Körpers in Piperidin und Cyanursäure wieder mit einem Atom Stickstoff zu begnügen. Man sieht, dass, wer dem Melamin die Imidformel vindicirt, nicht ohne die Annahme mehrfacher, ziemlich umständlicher Verschiebungen fertig wird. Wie einfach und ungezwungen erklären sich dagegen alle diese Bildungen, alle diese Zersetzungen, wenn man den genannten Körpern den Charakter von Amidverbindungen beilegt!

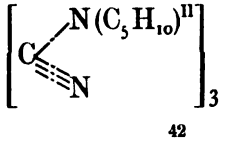
Melamin



Hexamethylmelamin



Tripiperidylmelamin



Digitized by Google

In der That, hätte man das Melamin und die Alkylmelamine nur auf dem vorstehend verzeichneten Wege erhalten, so wäre es wohl Keinem eingefallen, diese Körper anders aufzufassen, als wie dies oben geschehen ist.

Dafür nun aber, dass zum wenigsten die aus dem Sulfocyanursäuremethyläther entstehenden alkylirten Melamine einem Amidmelamin zugehören, lässt sich ein Grund geltend machen, dessen Triftigkeit man nicht beanstanden wird. Alkylmelamine, welche einem Imidmelamin entsprechen, können auf anderem Wege gewonnen werden; mehrere derselben sind in der That bereits bekannt. Diese Körper liefern, wie der Versuch gelehrt hat, keine Cyanursäure, sondern verwandeln sich unter Abspaltung von Ammoniak in die betreffenden Alkylcyanurate.

Alkylirte Isomelamine.

Schon vor Jahren habe ich gezeigt,[1] dass sich derartige Verbindungen mit Leichtigkeit aus den monoalkylirten Sulfoharnstoffen erzeugen lassen. Aus diesen Verbindungen entstehen zunächst monoalkylirte Cyanamide, welche sich schnell zu trialkylirten Melaminen polymerisiren. Die Versuche sind in der Methyl-, Aethyl- und Phenylreihe mit gleichem Erfolge ausgeführt worden. Ich habe dieselben im Hinblick auf die in der vorhergehenden Arbeit erzielten Ergebnisse wiederholt und die aus den Sulfoharnstoffen erhaltenen Verbindungen etwas eingehender studirt, als dies früher geschehen war.

Trimethylirtes Isomelamin. Diese Verbindung ist bereits in einer früheren Mittheilung[2] flüchtig erwähnt worden. Der Monomethylsulfoharnstoff, welcher neuerdings zu ihrer Darstellung diente, war durch Einwirkung des Ammoniaks auf das bei der Polymerisirung des Sulfocyanmethyls als Nebenproduct auftretende Methylsenföl bereitet worden. Das so gewonnene Senföl enthält noch etwas unverändertes Sulfocyanmethyl, sowie kleine Mengen anderer Producte. Um den Methylsulfoharnstoff daraus zu erhalten, muss man die Mischung mit concentrirtem Ammoniak schütteln, wobei sie sich stark erwärmt. Wenn die Flüssigkeit nach dem Erkalten nicht mehr nach Senföl riecht, so wird, nachdem die nicht gelösten Öle durch ein nasses Filter schnell entfernt sind, die ammoniakalische Flüssigkeit sofort eingedampft. Der Harnstoff bleibt in diesem Falle alsbald vollkommen weiss und bei 120° schmelzend zurück. Lässt man die ammoniakalische Flüssig-

[1] Hofmann, Monatsberichte 1869. 791.
[2] Hofmann, Monatsberichte 1870. 191.

Digitized by Google

keit längere Zeit stehen, so färbt sie sich tief braunroth, und der Harnstoff ist dann nur schwer zu reinigen.

Die Entschwefelung des Sulfoharnstoffs kann mittelst Bleioxyds oder Quecksilberoxyds in wässeriger oder alkoholischer Lösung bewerkstelligt werden; bei den in letzter Zeit angestellten Versuchen hatte ich zunächst mit Quecksilberoxyd und gewöhnlichem Alkohol gearbeitet. Wird die so gewonnene Lösung nach vollständiger Entschwefelung eingedampft, so krystallisirt bald, aus dem zuerst gebildeten Methylcyanamid durch Polymerisation entstanden, etwas trimethylirtes Isomelamin aus. Man gewinnt indessen auf diese Weise keineswegs eine der Theorie entsprechende Ausbeute, insofern sich gleichzeitig verschiedene harzartige Producte bilden, welche in der alkoholischen Mutterlauge verbleiben und einen nicht unerheblichen Theil der Base zurückhalten. Die Bildung dieser harzigen Producte kann jedoch beschränkt, ja fast vermieden werden, wenn man die Gegenwart von Wasser bei der Entschwefelung sorgfältig ausschliesst, d. h. mit trocknem Quecksilberoxyd in absolutem Alkohol arbeitet. Jedenfalls wird bei Abwesenheit von Wasser eine ungleich befriedigendere Ausbeute gewonnen.

Das trimethylirte Isomelamin ist in Wasser und Alkohol sehr leicht löslich, die Lösungen haben eine entschieden alkalische Reaction. In Äther löst sich die Base nicht auf; die alkoholische Lösung wird von Äther krystallinisch gefällt. Aus concentrirter wässeriger oder alkoholischer Lösung scheiden sich wohl ausgebildete Nadeln aus, welche bei 179° schmelzen und gleichzeitig sublimiren. Diese Sublimation beginnt schon wenige Grade über 100°.

Seitdem ich die Base zuerst durch Entschwefelung des Monomethylsulfoharnstoffs erhielt, ist dieselbe von Baumann[1] auch durch Polymerisirung von auf anderem Wege gebildetem Methylcyanamid gewonnen worden. Baumann fand bei dieser Gelegenheit, dass sie mit 3 Mol. Wasser krystallisirt, eine Beobachtung, welche ich bestätigen kann. Die 3 Mol. Wasser entweichen schon bei gewöhnlicher Temperatur über Schwefelsäure. Der beobachtete Wasserverlust betrug 24.04 Procent. Der Theorie nach hätten 24.32 Procent gefunden werden sollen. Bei 100° getrocknet hat das Trimethylmelamin die Zusammensetzung:

$$(C{=}NCH_3)_3(NH)_3 = C_6H_{12}N_6.$$

	Theorie		Versuch	
C_6	72	42.80	43.10	—
H_{12}	12	7.14	7.28	—
N_6	84	50.06	—	49.44
	168	100.00		

[1] Baumann, Ber. Chem. Ges. VI, 1372.

Digitized by Google

Löst man die trimethylirte Base in concentrirter Salzsäure unter gelindem Erwärmen, so scheiden sich schon nach kurzer Frist schöne prismatische Krystalle eines Chlorhydrates aus. Die Lösung dieses Salzes liefert mit Platin- und Goldchlorid schöne, in Nadeln krystallisirende Verbindungen. Für das Platinsalz

$$(C{=}NCH_3)_3(NH)_3 . 2HCl . PtCl_4,$$

wurden 33.62 und 33.50 Procent Platin gefunden, während die Theorie 33.69 Procent verlangt.

Das Goldsalz hat die Zusammensetzung:

$$(C{=}NCH_3)_3(NH)_3 . 2HCl . 2AuCl_3,$$

welcher 46.46 Procent Gold entsprechen; der Versuch ergab 46.46 Procent.

Wird das Isotrimethylmelamin einige Stunden lang mit Salzsäure im Einschlussrohr auf 100° erhitzt, so zerlegt es sich vollständig in Ammoniak und Isocyanursäuremethyläther, welcher durch sorgfältige Vergleichung der Eigenschaften, zumal aber durch den bei 176° beobachteten Schmelzpunkt mit der Wurtz'schen Verbindung identificirt wurde. Schon längeres Kochen mit Salzsäure unter gewöhnlichem Druck oder mehrmaliges Abdampfen der Lösung genügt, die Umbildung zu bewerkstelligen. Man erkennt hierbei, dass sich die Wandlung nicht in einem Zuge vollzieht. Zwischen Amin und Äther liegen noch die beiden Verbindungen

$$(C{=}NCH_3)_3(NH)_2O \text{ und } (C{=}NCH_3)_3(NH)O_2.$$

Ich habe versucht, diese Zwischenglieder zu isoliren, und es ist mir dies auch wenigstens mit dem zweiten derselben gelungen. Versetzt man eine frisch in der Kälte bereitete Lösung von Isotrimethylmelamin in Salzsäure mit Platinchlorid, so entsteht das schöne, nadelförmig krystallisirende Platinsalz der Base, welches oben erwähnt worden ist. Lässt man die salzsaure Lösung dagegen einige Stunden lang stehen oder hält man sie einige Augenblicke im Sieden, so fallen alsbald auf Zusatz von Platinchlorid die wohlbekannten Octaëder von Platinsalmiak. In der Flüssigkeit ist nunmehr neben 2 Mol. Salmiak das salzsaure Salz des zweiten Zwischengliedes vorhanden, welches man ohne Schwierigkeit in Form eines in schönen, schwerlöslichen Nadeln krystallisirenden Goldsalzes zu fassen vermag, während das Ammoniumgoldchlorid in der Mutterlauge bleibt. Die Natur der Verbindung wurde zumal durch die Stickstoffbestimmung festgestellt, da die Goldprocente in den Salzen der verschiedenen hier in Betracht kommenden Basen begreiflich kaum von einander abweichen. Das Goldsalz

$$(C{=}NCH_3)_3(NH)O_2 . HCl . AuCl_3$$

Digitized by Google

verlangt 10.98 Procent Stickstoff und 38.63 Procent Gold; gefunden wurden 10.79, 11.03 und 11.04 Procent Stickstoff und 38.46, 38.50 und 38.66 Procent Gold.

Die analytischen Zahlen beziehen sich auf Präparate von verschiedener Darstellung, welche mehrfach wiederholt worden ist, weil man immer gehofft hatte, durch Einhaltung besonderer Bedingungen, Arbeiten in der Kälte und mit verdünntester Säure, auf den sauerstoffärmeren Körper zu stossen. Für die Zusammensetzung der Zwischenbase kann ich übrigens auch noch die Analyse eines chlorwasserstoffsauren Salzes anführen, welches durch Behandlung des Goldsalzes mit Schwefelwasserstoff gewonnen wurde. Beim Verdampfen der Lösung blieb ein Rückstand, der in absolutem Alkohol aufgenommen wurde; aus dieser Lösung liess sich das Chlorhydrat durch wasserfreien Äther in Nadeln ausfällen. Die Formel

$$(C{:::}NCH_3)_3(NH)O_2 \,.\, HCl$$

erheischt 27.11 Procent Stickstoff und 17.19 Procent Chlor; der Versuch ergab 26.56 Procent Stickstoff und 16.95 Procent Chlor. Versetzt man die Lösung des salzsauren Salzes mit Alkali, so wird die Base als Öl in Freiheit gesetzt, welches auf Zusatz von Wasser verschwindet. Das Öl ist selbst nach längerem Stehen nicht fest geworden.

Wenn sich das trimethylirte Isomelamin von dem normalen Trimethylmelamin schon durch seine Bildungsweise und seine physikalischen Eigenschaften unterscheidet, so spiegelt sich die fundamentale Verschiedenheit beider Substanzen doch zumal in den beiden Reihen von Umbildungen, welche sie unter dem Einflusse des Wassers bei Gegenwart von Salzsäure erleiden. Das normale Trimethylmelamin liefert unter diesen Umständen die Reihe:

$(C{:::}N)_3\begin{matrix}NHCH_3\\NHCH_3\\NHCH_3\end{matrix}$,	$(C{:::}N)_3\begin{matrix}NHCH_3\\NHCH_3\\OH\end{matrix}$,	$(C{:::}N)_3\begin{matrix}NHCH_3\\OH\\OH\end{matrix}$,	$(C{:::}N)_3\begin{matrix}OH\\OH\\OH\end{matrix}$,
Trimethylmelamin	Zwischenglieder		Cyanursäure

während das trimethylirte Isomelamin in die Reihe:

$(C{:::}NCH_3)_3\begin{matrix}NH\\NH\\NH\end{matrix}$,	$(C{:::}NCH_3)_3\begin{matrix}NH\\NH\\O\end{matrix}$,	$(C{:::}NCH_3)_3\begin{matrix}NH\\O\\O\end{matrix}$,	$(C{:::}NCH_3)_3\begin{matrix}O\\O\\O\end{matrix}$
Trimethylisomelamin	Zwischenglieder		Trimethyl-isocyanurat

übergeht.

Triäthylirtes Isomelamin. Der für die Darstellung dieses Körpers erforderliche Monoäthylsulfoharnstoff war nach dem ursprünglich von

Digitized by Google

mir angegebenen Verfahren,[1] nämlich durch Einwirkung von Ammoniak auf Aethylsenföl gewonnen, nachdem Versuche, ihn durch Umsetzung von Schwefelcyankalium mit Aminsulfat zu erhalten — eine Methode, welche in der Phenylreihe treffliche Dienste leistet, — wenig befriedigende Ergebnisse geliefert hatten. Der Aethylsulfoharnstoff ist seiner ausserordentlichen Löslichkeit in Wasser und Alkohol halber nur schwer in völlig reinem Zustande zu erhalten. Daher kommt es auch, dass ich den Schmelzpunkt des in zwei verschiedenen Darstellungen gewonnenen Körpers früher einmal bei 89°, das andere Mal bei 106° beobachtet habe.[2] Bei erneuter Bereitung grösserer Quantitäten dieser Verbindung wurde Gelegenheit genommen, den Schmelzpunkt nochmals zu bestimmen. Für diesen Zweck wurde eine erhebliche Menge der aus reinem Aethylsenföl bereiteten Substanz mehrmals aus Benzol umkrystallisirt, in dem sie in der Wärme etwas löslicher ist, als in der Kälte. So gewonnener Monoäthylsulfoharnstoff schmolz constant bei 113°.

Die Entschwefelung lässt sich wie bei der Methylverbindung sowohl mit Bleioxyd als auch mit Quecksilberoxyd in Wasser wie in Alkohol bewerkstelligen. Nach dem Eindampfen der entschwefelten Lösung bleibt ein alkalisch reagirender Syrup zurück, der, wenn man mit gewöhnlichem Alkohol gearbeitet hat, in der Regel nur äusserst schwierig krystallisirt. Der Syrup kann dann oft wochenlang stehen, oder wiederholt eingedampft und mit den verschiedensten Lösungsmitteln behandelt werden, ohne dass sich Krystalle absetzen. Die Krystallisation des Körpers wird geradeso, nur in viel höherem Maasse, als bei der entsprechenden Methylverbindung, durch die Gegenwart harziger Substanzen behindert, welche sich bei der Entschwefelung von Sulfoharnstoffen allgemein bilden. Auch in diesem Falle empfiehlt es sich, mit trocknem Quecksilberoxyd und absolutem Alkohol zu arbeiten. Man erhält alsdann gewöhnlich schon bei dem ersten Eindampfen eine schöne Krystallisation der Verbindung. Wenn der Körper einmal krystallinisch geworden ist, so lässt er sich sowohl aus Wasser als aus Alkohol und Äther leicht umkrystallisiren. Er bildet feine, sternförmig gruppirte Nadeln, welche bei 92° schmelzen.

Das triäthylirte Isomelamin krystallisirt aus der wässerigen Lösung mit 4 Mol. Wasser, welche einem Wassergehalt von 25.53 Procent entsprechen. Das lufttrockene Salz verlor unter der Luftpumpe über Schwefelsäure 25.48 Procent Wasser. Ich habe mich begnügt, die

[1] Hofmann, Monatsberichte 1868, 26.
[2] Hofmann, Monatsberichte a. a. O. u. 1869, 794.

Digitized by Google

Zusammensetzung der Base durch eine Stickstoffbestimmung festzustellen. Die Formel

$$(C \equiv NC_2H_5)_3(NH)_3$$

verlangt 40.00 Procent Stickstoff; gefunden wurden 39.81 Procent.

Ausserdem ist noch das Platin- und das Goldsalz analysirt worden.

Das Platinsalz des triäthylirten Isomelamins krystallisirt in garbenförmig vereinigten Nadeln, ziemlich leicht in Wasser, weniger leicht in Alkohol löslich, welche bei 100° getrocknet werden können. Der Formel

$$(C \equiv NC_2H_5)_3(NH)_3 \cdot 2HCl \cdot PtCl_4 = C_9H_{20}N_6PtCl_6$$

entsprechen folgende Werthe:

	Theorie		Versuch				
C_9	108	17.43	17.56	—	—	—	—
H_{20}	20	3.23	3.33	—	—	—	—
N_6	84	13.56	—	—	—	—	—
Pt	194.6	31.41	—	31.48	31.53	31.55	31.61
Cl_6	213	34.37	—	—	—	—	—
	619.6	100.00.					

Das Goldsalz bildet schöne rhombische Krystalle, welche bei langsamer Bildung beträchtliche Grösse annehmen können. In dem bei 100° getrockneten Salze wurden 44.18 Procent Gold gefunden; der Formel

$$(C \equiv NC_2H_5)_3(NH)_3 \cdot 2HCl \cdot 2AuCl_3$$

entsprechen 44.27 Procent.

Unter dem Einflusse der Säuren erleidet das triäthylirte Isomelamin Veränderungen, welche denen der homologen Methylverbindung vollständig gleichen.

Durch mehrfaches Eindampfen mit Salzsäure, schneller durch Digestion mit Salzsäure bei 150° verwandelt sich die Base in das WURTZ'sche Triäthylisocyanurat, welches durch Beobachtung seiner Eigenschaften, namentlich des Schmelzpunktes (95°) als solches erkannt wurde. Aber auch hier durchläuft das triäthylirte Isomelamin ähnliche Zwischenstufen, wie sie bei dem Studium der entsprechenden Methylverbindung beobachtet wurden, es entstehen in erster Linie Körper

$$(C \equiv NC_2H_5)_3(NH)_2O \text{ und } (C \equiv NC_2H_5)_2(NH)O_2,$$

von denen letzterer sich mit Vorliebe bildet und leicht isolirt werden kann. Durch einmaliges Aufkochen mit Salzsäure verliert das triäthylirte Isomelamin zwei Imidgruppen, welche durch zwei Atome Sauerstoff ersetzt werden. Kocht man die Lösung mit Natronlauge ein, um das Ammoniak zu entfernen, so erhält man nach dem Übersättigen

Digitized by Google

mit Salzsäure und Eindampfen ein trockenes Gemenge von Salmiak und dem Chlorhydrat des Sauerstoffkörpers, welches durch Alkohol von ersterem befreit wird.

Das Chlorhydrat des Sauerstoffkörpers liefert mit Platinchlorid ein Salz, welches zunächst ölig ausfällt, aber schon nach wenigen Augenblicken zu Krystallnadeln erstarrt. Es hat die Zusammensetzung:

$$2[(C=NC_2H_5)_3(NH)_2O.HCl]PtCl_4 = C_{18}H_{36}N_{10}O_2PtCl_6$$

	Theorie.		Versuch.		
C_{18}	216	25.91	25.92	—	
H_{36}	36	4.08	4.43	—	
N_{10}	140	13.43	—	13.30	
O_2	32	7.68	—	—	
Pt	194.6	23.35	—	—	23.43
Cl_6	213	25.55	—	—	
	831.6				

Aus den durch die vorliegenden Untersuchungen festgestellten Thatsachen erhellt unzweifelhaft, dass es zwei Reihen alkylirter Melamine giebt, die eine einem amidirten, die andere einem imidirten Melamin sich unterordnend. Beide Reihen sind durch Bildung und Zersetzung scharf von einander unterschieden. Die eine, die Reihe der alkylirten Amidmelamine, bildet sich durch Behandlung des Sulfocyanursäureäthers und des Cyanurchlorids mit Alkylaminen und zerfällt mit den Elementen des Wassers in Cyanursäure und Alkylamin, die andere, die Reihe der alkylirten Imidmelamine, entsteht durch Polymerisation aus den alkylirten Cyanamiden und wird durch die Einwirkung des Wassers in Isocyanursäurealkyläther und Ammoniak gespalten.

Gewähren uns nun diese Erfahrungen Anhaltspunkte zur Beantwortung der oben aufgeworfenen Frage nach der Constitution des Melamins selber? Ist das Melamin eine Amido- oder eine Imidoverbindung?

Mir scheint die Thatsache, dass sich das Melamin leicht und glatt aus Ammoniak in Reactionen bildet, in denen die Alkylamine in unzweifelhafte alkylirte Amidmelamine übergehen, unzweideutig für die Amidnatur auch des Melamins zu sprechen. Allerdings werden die Anhänger der Imidformel nicht ermangeln, darauf hinzuweisen, dass sich das Melamin auch aus dem Cyanamid bildet, also auf analoge Weise, wie die alkylirten Isomelamine aus den alkylirten Cyanamiden entstehen. Dies lässt sich nicht läugnen; wer aber jemals Melamin aus Cyanamid dargestellt hat, dem wird es nicht in den Sinn kommen, diese Bildungsweise mit dem molecularen Übergang des Sulfocyanur-

Digitized by Google

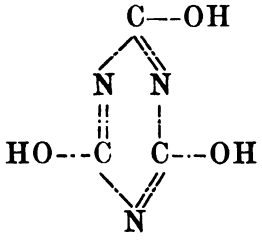
säureäthers und des Cyanurchlorids in Melamin auf dieselbe Linie zu stellen. Drechsel[1] hat bereits darauf hingewiesen, dass sich beim Erhitzen des Cyanamids unter lebhafter Ammoniakentwickelung reichliche Mengen von Dicyandiamid und mellonartigen Körpern bilden, und dass das Melamin hierbei nur in höchst minimaler Menge auftritt. Ich kann die Angaben Drechsels in ihrem vollem Umfange bestätigen und glaube daher nicht, dass sich die Entstehung kleiner Mengen von Melamin beim Erhitzen des Cyanamids als ein schwerwiegender Einwand gegen die Annahme der Amidnatur desselben wird geltend machen lassen. Jedenfalls lässt sich nicht verkennen, dass, wie man sich auch den Übergang des Cyanamids in Melamin denke, die Umwandlung der Alkylcyanamide in alkylirte Isomelamine durch eine völlig verschiedene Reaction erfolgt.

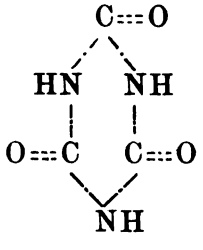
Wenn nun aber die Bildung des Melamins den letzten Zweifel bezüglich seiner Constitution nicht beseitigt, so liegt der Gedanke nahe, eine endgültige Entscheidung der Frage durch einen Rückschluss aus seinen Umsetzungsproducten herbeizuführen.

Unter dem Einflusse des Wassers zerlegt sich das Melamin, wie schon Liebig gezeigt hat, in Ammoniak und Cyanursäure.

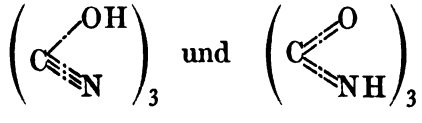
Wer sich daher mit Untersuchungen über die Natur des Melamins beschäftigt, wird nicht umhin können, die Frage nach der Constitution auch der Cyanursäure in den Kreis der Betrachtung zu ziehen. Für solche Betrachtung sind in der Auffindung der Sulfocyanursäure, sowie der normalen Alkylmelamine einige neue Anlehnungspunkte gegeben.

Gerade so wie man sich das Melamin in zweierlei Weise zu Stande gekommen denken kann, hat man sich bekanntlich auch von der Constitution der Cyanursäure zwei verschiedene Vorstellungen gemacht, welche in den Diagrammen





oder in den einfacheren Formeln



zum Ausdrucke gelangen.

[1] Drechsel J. f. prakt. Chem. [2] XI. 301.

Digitized by Google

Man erkennt unschwer, dass hier die Frage über die Constitution des Melamins in anderer Form von Neuem vorliegt, und dass es sich schon deshalb empfiehlt, einen Augenblick in diese Frage einzutreten, weil einerseits die zwiefache Auffassung des Melamins zumal den schwankenden Ansichten über die Cyanursäure entsprungen ist, andererseits, weil der Einblick in die Natur dieses Körpers, welchen die Erkenntniss der normalen Alkylmelamine geliefert hat, nicht verfehlen kann, einen Rückschlag auf die Betrachtung auch der Cyanursäure zu üben.

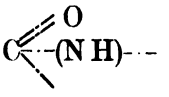
Die beiden Auffassungen bezüglich der Constitution der Cyanursäure, welche durch die vorstehend gegebenen Formeln veranschaulicht werden, sind wesentlich aus dem Studium zweier Reihen isomerer Äther hervorgegangen, von denen man die einen, die sogenannten normalen Äther von einer hydroxylirten, die anderen, die sogenannten Isoäther, von einer imidirten Cyanursäure ableiten zu müssen glaubt; gerade so, wie wir die im Vorstehenden beschriebenen normalen Alkylmelamine einem amidirten Melamin, die alkylirten Isomelamine dagegen einem Imidmelamin untergeordnet haben. Die Cyanursäureäther dieser beiden Reihen sind mit grosser Sorgfalt untersuchte, scharf charakterisirte Verbindungen. Sie unterscheiden sich zumal durch ihre Umbildungen: während sich die normalen Äther mit den Elementen des Wassers in Alkohol und Cyanursäure umsetzen, liefern die Isoäther unter denselben Bedingungen Alkylamine und Kohlensäure. Wäre man nun auch im Stande, die normalen Äther nach dem für die Erzeugung von Säureäthern üblichen Verfahren aus Alkohol und Cyanursäure zu gewinnen, so würde man über die Natur der Cyanursäure kaum im Zweifel sein; man würde nicht anstehen, ihr dieselbe Constitution zuzuerkennen, welche man für die normalen Äther gelten lässt. Dem ist aber nicht so. Bis jetzt ist es nicht gelungen, nach den gebräuchlichen Methoden aus der Cyanursäure normale Äther zu erzeugen. Lässt man unter den gewöhnlichen Bedingungen der Ätherbildung Cyanursäure und Alkohol auf einander wirken, so entstehen keine normalen Äther, sondern jedesmal Isoäther. Daher der Zwiespalt in der Beurtheilung der Cyanursäure. Wer die Bildung der Äther, nicht ihre Zerlegung, als für die Beantwortung der Frage entscheidend ansieht, muss die Cyanursäure als die Säure der Isoäther betrachten; wer andererseits der Zerlegung der Äther grössere Beweiskraft als ihrer Bildung beilegt, wird sich für die Zugehörigkeit der Cyanursäure zu den normalen Äthern aussprechen müssen.

Die Frage nach der Constitution der Cyanursäure bleibt also, wenn man nur die beiden Ätherreihen ins Auge fasst, eine offene.

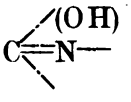
Digitized by Google

Man hat daher auf anderem Wege eine Entscheidung derselben herbeizuführen gesucht.

Diejenigen, welche der Isonatur der Cyanursäure das Wort reden, führen zunächst ihre Bildung aus Harnstoff und harnstoffartigen Körpern, aus den Diharnstoffen, dem Biuret u. s. w. ins Feld. In allen diesen Substanzen, machen sie geltend, sei der Atomcomplex



recht eigentlich für die Bildung der Cyanursäure zur Verfügung; wollte man diese Säure als eine Hydroxylverbindung auffassen, so müsste bei ihrer Entstehung aus allen diesen Körpern eine Atomverschiebung angenommen werden. Hierzu bemerken die Vertreter der entgegengesetzten Ansicht — allerdings ohne besonderes Vertrauen in das Argument, welches sie anrufen, — dass die Constitution des Harnstoffs und seiner Abkömmlinge noch keineswegs endgiltig festgestellt sei, dass einige Chemiker[1] im scharfen Gegensatz zu der gewöhnlichen Auffassung den Atomcomplex



in der Gruppe der Harnstoffe annehmen, welche naturgemäss in eine hydroxylirte Cyanursäure übergehen würde.

Es ist aber zumal die Bildung der Cyanursäure aus den cyansauren Salzen und die Zerlegung ersterer bei der Destillation in Cyanursäure, welche als Argumente für die Isoformel geltend gemacht werden. Dieser Beweisführung liegt die Annahme zu Grunde, dass die Cyansäure und ihre Salze selber Isoverbindungen seien. Gelänge es, der Cyansäure und den Cyanaten eine normale Constitution zu vindiciren, so wäre begreiflich für die entgegengesetzte Ansicht eine ebenso kräftige Stütze gewonnen. Welche Gründe hat man nun aber für die ziemlich allgemeine Annahme der Isonatur dieser Verbindungen? Vergleichen wir Bildung und Umbildung derselben mit den entsprechenden Processen bei der Sulfocyansäure, deren normale Constitution nicht bezweifelt wird. Die Salze der Cyansäure entstehen unter ganz ähnlichen Bedingungen aus dem Cyankalium, wie die der Sulfocyansäure. Wie sich das Ammoniumcyanat in den Harnstoff *par excellence* verwandelt, geht das Ammoniumsalz der Sulfocyansäure — allerdings nicht ganz so leicht — in den Sulfoharnstoff über. Wenn sich die freigewordene Cyansäure mit den Elementen des Wassers in Ammoniak

[1] Vergl. WANKLYN und GAMGEE, Chem. Soc. J. [2] IV, 161.

Digitized by Google

und Kohlensäure umsetzt, so beobachtet man bei der Sulfocyansäure die etwas langsamer eintretende, aber völlig parallele Spaltung in Ammoniak und Kohlenoxysulfid. Somit zeigt das Verhalten beider Reihen von Verbindungen eine Analogie, die nicht grösser gedacht werden kann. Mit besonderer Vorliebe wird daher auch für die Imidnatur der Cyansäure der scharf ausgesprochene Charakter der aus ihr entstehenden Äther betont, welche sich durch ihren leichten Übergang in Kohlensäure und Alkylamin unzweifelhaft als Isoverbindungen bekunden. Wie ganz anders, macht man geltend, ist in dieser Beziehung das Gebahren der normalen Sulfocyansäure, insofern dieselbe mit den Alkoholen Äther bildet, welche sich, den Überlieferungen der Säureäther getreu, mit den Elementen des Wassers wieder in Alkohol und Säure spalten. Ja selbst der stechende Geruch der Cyansäure und der eigenthümliche Reiz, den sie auf die Schleimhäute der Nase und des Auges übt, sind als Beweise für die Zugehörigkeit der Cyansäure zu den Isoäthern angerufen worden! Man hat nur dabei vergessen, dass das Cyanchlorid, über dessen Constitution man nicht zweifelhaft ist, diese Eigenschaften in noch höherem Grade als die Cyansäure besitzt.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass, wer die Cyanursäure als eine Hydroxylverbindung ansieht, diese Ansicht auch auf die Cyansäure ausdehnen und bei der Ätherbildung in dem einen, wie in dem anderen Falle eine Atomverschiebung gelten lassen muss. Man sieht, um die Annahme einer solchen Verschiebung kommt man bei den Cyansäure- und Cyanursäureäthern nicht herum; die Vertheidiger der einen Ansicht müssen sie sich bei der Bildung der Isoäther, die der anderen bei der Zerlegung der normalen Äther gefallen lassen, und es fragt sich also nur, ob Gründe vorliegen, welche mehr für die Umlagerung in dem ersten als in dem zweiten Falle sprechen.

Solche Gründe scheinen sich nun aber in der That zu Gunsten des ersten Falles geltend machen zu lassen.

Hier darf zunächst an den thatsächlichen Übergang der normalen in die Isoäther erinnert werden, welchen wir, O. Olshausen und ich[1], zuerst bei dem normalen Cyanursäuremethyläther beobachtet haben. Kurze Zeit bei der Siedetemperatur (250°) erhalten, verwandelt sich die normale Verbindung von dem Schmelzpunkte 136° — durch die Einwirkung von Cyanurchlorid auf Natriummethylat gewonnen — in die Isoverbindung von dem Schmelzpunkt 176°, durch Destillation von Cyanursäure mit methylschwefelsaurem Salz darstellbar. Die Umwandlung wird überdies unzweideutig durch die charakteristische Ver-

[1] Olshausen und Hofmann, Monatsberichte 1870, S. 198.

Digitized by Google

schiedenheit in dem Verhalten der Verbindung bezeugt, welche wir, nachdem sie sich eben noch mit den Elementen des Wassers in Methylalkohol und Cyanursäure gespalten hatte, nach kurzem Erhitzen bei geeigneter Einwirkung des Wassers in Methylamin und Kohlensäure übergehen sehen. Eine analoge Umsetzung erleidet nach späteren Versuchen von MULDER[1] der Cyanursäureäthyläther. Ganz ähnliche Erscheinungen beobachtet man bei einer Reihe unzweifelhaft normal constituirter Cyanursäureäther, bei der normalen Dimethyl-, Diäthyl- und Diamylcyanursäure, welche ich kürzlich aufgefunden habe und demnächst beschreiben werde. Alle diese Verbindungen lassen sich wieder in Cyanursäure und die betreffenden Alkohole zurückführen; werden sie aber kurze Zeit erhitzt, so gehen sie in Isoverbindungen über und zerfallen alsdann mit den Elementen des Wassers in Kohlensäure und Alkylamin, denen sich in diesem Falle begreiflich Ammoniak hinzugesellt.

Hier verdienen auch noch einige Beobachtungen angeführt zu werden, welche im Laufe dieser Untersuchung gemacht worden sind, aber bei einer anderen Gelegenheit ausführlicher erörtert werden sollen. Nachdem festgestellt worden war, dass sich der Sulfocyanursäuremethyläther bei hoher Temperatur unter dem Einflusse des Wassers in Methylmercaptan und Cyanursäure spaltet, schien es von Interesse, zu untersuchen, in welcher Weise Alkohol auf den Äther einwirkt. Die Reaction konnte so verlaufen, dass sich auch jetzt wieder Cyanursäure bildete, aber unter Austritt von geschwefeltem Methyläther, oder aber es konnten unter Abspaltung von Methylmercaptan die normalen sauerstoffhaltigen Cyanursäureäther entstehen. Keines von beiden! Man erhielt stets nur Isocyanursäureäther, und zwar liefert die Einwirkung von Methylalkohol den Cyanursäuremethyläther (Schmelzpunkt 176°), die von Äthylalkohol den Äthyläther (Schmelzpunkt 95°). Offenbar waren, da sich die Reaction nur bei sehr hoher Temperatur, über 250°, vollzieht, die in erster Linie gebildeten normalen Äther in die Isoäther übergegangen.

Die normalen Cyansäureäther sind im reinen Zustande fast unbekannt. Ich habe sie niemals in Händen gehabt, und nach MULDER[2] wäre das Cyanätholin von CLOËZ nur ein Gemenge verschiedener Substanzen, unter denen das normale Äthylcyanurat vorherrscht. Angesichts dieser Verhältnisse kann von der Beobachtung des Übergangs eines normalen Cyanats in ein Isocyanat nicht die Rede sein. Dagegen hat gerade die Untersuchung des Sulfocyanursäuremethyläthers den

[1] MULDER, Ber. chem. Ges. XVI, [R] 360.
[2] MULDER, Rec. Trav. Chim. Pays-Bas. 1833, 133.

Digitized by Google

Beweis geliefert, wie leicht sich die normalen Sulfocyansäureäther in die entsprechenden Isoäther, in die sogenannten Senföle verwandeln. Wenn man das reine Sulfocyanmethyl für sich erhitzt, so wird es, wie bereits in einer früheren Abhandlung[1] bemerkt worden ist, zum grossen Theile in Methylsenföl übergeführt. Hier verdient aber auch noch ganz besonders an die Thatsache erinnert zu werden, dass sich, wie einerseits Zinin, andererseits Berthelot und de Luca gezeigt haben,[2] schon beim gelinden Erwärmen einer alkoholischen Lösung von Sulfocyankalium mit Jodallyl direct Allylsenföl bildet. Will man das normale Sulfocyanallyl gewinnen, so kann dies, wie von Billeter[3] dargethan worden ist, durch die Einwirkung von Chlorcyan auf ein Allylmercaptid geschehen, aber auch so gewonnen, geht das normale Sulfocyanallyl schon bei der einfachen Destillation vollständig in Allylsenföl über. Wären die normalen Sulfocyansäureäther der gesättigten Alkohole unbekannt, so würden wir die Sulfocyansäure, im Hinblick auf die Senfölbildung aus dem Sulfocyankalium, mit demselben Rechte für eine Isoverbindung erklären, mit dem heute, auf den Übergang in Isoäther hin, die Imidnatur der Cyansäure behauptet wird.

Angesichts der bemerkenswerthen Wandelbarkeit der normalen Cyansäure- wie Sulfocyansäureäther, schien es angezeigt, zu versuchen, ob nicht etwa die aus der Cyanursäure thatsächlich entstehenden Isoäther schliesslich nichts anderes als Umwandlungsproducte in erster Linie gebildeter normaler Äther seien. Besondere in dieser Richtung angestellte Versuche haben indessen eine solche Vermuthung nicht bestätigt. Aus den Untersuchungen von Habich und Limpricht[4] weiss man, dass Silbercyanurat und Jodäthyl auf 120° erhitzt, sich zu Isocyanurat umsetzen. Ich habe den Versuch mit Jodmethyl wiederholt und gefunden, dass die Umsetzung, obwohl langsam und unvollkommen schon bei 100°, im Laufe der Zeit selbst bei gewöhnlicher Temperatur stattfindet. Immer aber war es nur der Isoäther, der sich gebildet hatte. Auch aus einer Mischung von Natriumcyanurat und methylschwefelsaurem Kalium, welches man längere Zeit auf 100° erhitzt hatte, war nur Isoäther entstanden. Bei dieser Gelegenheit mag hier nochmals bemerkt werden, dass einmal gebildeter normaler Äther bis zu seinem Siedepunkt erhitzt werden muss, um in den Isoäther überzugehen. Normaler Cyanursäuremethyläther, welcher vierzehn Tage lang bei einer Temperatur von 100° erhalten worden war, zeigte nach

---

[1] Hofmann, Sitzungsberichte 1885, 822.

[2] Zinin, Lieb. Ann. XCV, 128; Berthelot und de Luca, Ann. chim. phys. [3], XLIV, 495.

[3] Billeter, Ber. chem. Ges. VIII, 461.

[4] Habich und Limpricht, Lieb. Ann. CV, 395.

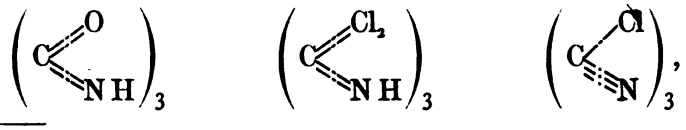
Digitized by Google

dieser Zeit noch genau denselben Schmelzpunkt (136°), welchen er ursprünglich besessen hatte. Hiernach bleibt demjenigen, welcher in der Cyanursäure eine normale Säure erblickt, nur übrig, die Atomverschiebung als bei dem Übergang der Säure in den Äther eintretend anzunehmen.

Kommen wir nach dieser Abschweifung auf die Frage zurück, welche Ausgangspunkt dieser Betrachtungen gewesen ist, auf die Frage nämlich, ob Gründe vorliegen, welche dem Übergang einer normalen Cyanursäure in Isoäther grössere Wahrscheinlichkeit leihen, als der Umwandlung von normalen Äthern in eine Isosäure, so wird man dieselbe Angesichts der mitgetheilten Beobachtungen bejahend beantworten müssen. Jedenfalls steht thatsächlich fest, dass für die Umbildung einer erheblichen Anzahl unbezweifelter normaler Verbindungen dieser Gruppe in anerkannte Isoverbindungen der experimentale Beweis geliefert ist, während man den umgekehrten Fall, nämlich den Übergang einer verbürgten Isoverbindung in eine unbeanstandete normale Verbindung, bisher nicht ein einziges Mal beobachtet hat.

Wer die Hydroxylnatur der Cyanursäure befürwortet, wird schliesslich nicht unterlassen, mit besonderem Nachdruck auch noch die Beziehung zwischen Säure und Cyanurchlorid zu Gunsten seiner Auffassung anzurufen. Die Cyanursäure verwandelt sich, wie Beilstein[1] gezeigt hat, unter dem Einflusse des Phosphorpentachlorids mit Leichtigkeit in Cyanurchlorid, aus welchem sie bei der Einwirkung des Wassers zurückgebildet wird. Wenn man die Cyanursäure als eine Hydroxylverbindung gelten lässt, so sind diese Übergänge selbstverständlich, indem einfach ein Austausch zwischen der einwerthigen Hydroxylgruppe und dem einwerthigen Chloratom stattfindet:

Bei der Einwirkung des Phosphorpentachlorids auf eine imidirte Cyanursäure dagegen kann die Substitution des einwerthigen Chloratoms für das zweiwerthige Sauerstoffatom nur so zu Stande kommen, dass der benachbarten Imidgruppe gleichzeitig ein Wasserstoffatom in der Form von Salzsäure entführt wird, so dass das Stickstoffatom nunmehr mit seiner ganzen Bindekraft an dem Kohlenstoffatome haftet. In einer solchen Reaction müsste eigentlich ein Zwischenglied auftreten:



[1] Beilstein, Lieb. Ann. CXVI, 357.

Digitized by Google

wie ein solches bei der Bildung der Imidchloride aus den Amiden in den Amidchloriden thatsächlich vorliegt.

In ähnlicher Weise verschieden gestaltet sich die Interpretation der Rückbildung der Cyanursäure aus dem Chlorid unter dem Einflusse des Wassers (Natriumhydrats), je nachdem man die eine oder die andere Auffassung der Säure gelten lässt. Nun wird aber, wie man weiss, das Cyanurchlorid von dem Schwefelwasserstoff, von dem Methylalkohol und dem Methylmercaptan nicht minder kräftig umgebildet, als von dem Wasser. Wenn das Wasser Cyanursäure erzeugt, so veranlassen Schwefelwasserstoff, Methylalkohol und Methylmercaptan, als Natriumverbindungen auf das Cyanurchlorid einwirkend, die Bildung der Sulfocyanursäure und der Methyläther der Cyanursäure und Sulfocyanursäure. Die letztgenannten drei Substanzen sind aber — Niemand zweifelt daran — normal zusammengesetzte Verbindungen. Betrachtet man die Cyanursäure als eine Isoverbindung, so ist der Mechanismus der Wechselwirkung zwischen Cyanurchlorid und Wasser ein wesentlich verschiedener von demjenigen, welcher der Umbildung dieses Chlorids durch Schwefelwasserstoff, Methylalkohol und Methylmercaptan zu Grunde liegt. Man wird sich aber nur schwer entschliessen, die in umfassender Erfahrung begründete Ansicht, dass Wasser, Schwefelwasserstoff, Alkohol und Mercaptan in solchen Fällen analoge Wirkung üben, fallen zu lassen.

Ich habe im Vorstehenden die Gründe, welche die Auffassung des Melamins als Amid- und der Cyanursäure als Hydroxylverbindung befürworten, mit denjenigen in Parallele gestellt, welche sich für die Imidnatur dieser beiden Körper geltend machen lassen. Wenn ich ersterer Auffassung entschieden den Vorzug gebe, so bin ich bei dieser Entscheidung nicht wenig durch das Studium der bemerkenswerthen Reihenfolge einfacher Umbildungsprocesse beeinflusst worden, welche mir im Laufe meiner Untersuchungen über den Methyläther der Sulfocyanursäure durch die Hände gegangen sind.

Mit dem Methyläther beginnend, habe ich diese Verbindung, Stufe um Stufe, durch schwefelhaltige Zwischenbasen hindurch, in Melamin und dieses, über Liebig's gemischte Hydroxylamide hinweg, in Cyanursäure übergehen sehen, aus welcher durch Umwandlung in Chlorid schliesslich wieder der Sulfocyanursäuremethyläther erhalten wurde, der als Ausgangspunkt der Untersuchung gedient hatte:

Methyläther	$(C\equiv\equiv N)_3(SCH_3)_3$	Melamin	$(C\equiv\equiv N)_3(NH_2)_3$
Monamidobase	$(C\equiv\equiv N)_3(SCH_3)_2NH_2$	Ammelin	$(C\equiv\equiv N)_3(NH_2)_2(OH)$
Diamidobase	$(C\equiv\equiv N)_3(SCH_3)(NH_2)_2$	Ammelid	$(C\equiv\equiv N)_3(NH_2)(OH)_2$
Melamin	$(C\equiv\equiv N)_3(NH_2)_3$	Cyanursäure	$(C\equiv\equiv N)_3(OH)_3$

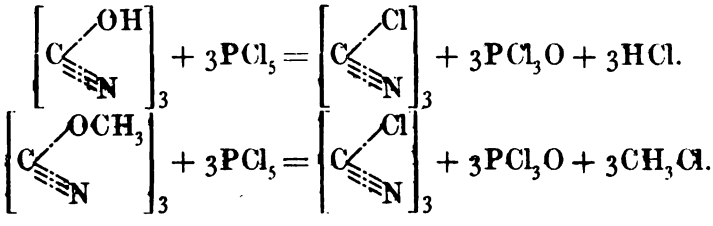
Digitized by Google

Cyanursäure	$(C\equiv\equiv N)_3(OH)_3$
Cyanurchlorid	$(C\equiv\equiv N)_3Cl_3$
Sulfocyanursäure	$(C\equiv\equiv N)_3(SH)_3$
Methyläther	$(C\equiv\equiv N)_3(SCH_3)_3$

In dieser Reihe erfolgt der Übergang von einem Gliede zum anderen durch wohlbekannte Reactionen, welche wir in den verschiedensten Gebieten der Chemie sich vollziehen sehen, ohne dass sie eine Atomverschiebung bedingen, wie wir sie auf dem Wege von Methyläther zu Methyläther zwei Mal annehmen müssen, wenn wir die Cyanursäure als eine Isoverbindung gelten lassen.

Schliesslich sei hier noch ein Versuch erwähnt, welchen ich, über die Constitution der Cyanursäure nachdenkend, in letzter Zeit noch angestellt habe, und dessen Ergebniss mir als weitere Bestätigung der im Vorstehenden ausgesprochenen Ansicht von Interesse erscheint.

Was immer die Constitution der Cyanursäure sei, man durfte erwarten, dass sie unter dem Einflusse kräftiger Agentien ein analoges Verhalten mit den ihr zugehörigen Äthern zeigen werde. Bei der Einwirkung des Phosphorpentachlorids liefert die Cyanursäure Cyanurchlorid und Phosphoroxychlorids unter gleichzeitiger Abscheidung von Chlorwasserstoffsäure. Ist die Cyanursäure die den normalen Äthern zugehörige Säure, so durfte man erwarten, dass diese Äther unter denselben Bedingungen gleichfalls in Cyanurchlorid und Phosphoroxychlorid, allein unter gleichzeitiger Entwickelung von Chloralkyl übergehen würden:

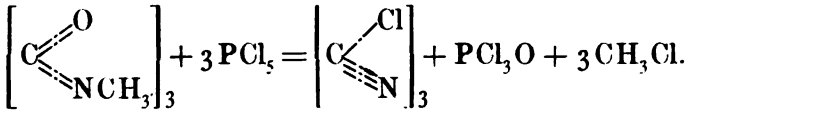


Dem ist nun wirklich so. Als man den normalen Cyanursäuremethyläther mit Phosphorpentachlorid (1 Mol. des ersteren und 3 Mol. des letzteren) im Einschlussrohr 8 Stunden lang auf 200° erhitzte, verwandelte sich die Mischung der beiden starren Substanzen in eine Flüssigkeit, und beim Öffnen des Rohres entwichen Ströme von Chlormethyl, welche über warmem Wasser aufgesammelt werden konnten. Aus der zurückbleibenden Flüssigkeit konnte durch Destillation Phosphoroxychlorid (Siedepunkt 108°) und Cyanurchlorid (Schmelzpunkt 145°) abgeschieden werden. Es war aber offenbar in Folge einer weitergehenden Reaction, wahrscheinlich durch Einwirkung von

Digitized by Google

Phosphorpentachlorid auf das entstandene Chlormethyl auch etwas Salzsäure und Phosphortrichlorid entstanden.

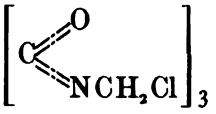
Sehr begierig war ich nun, das Verhalten des isocyanursauren Methyläthers gegen Phosphorpentachlorid kennen zu lernen. Möglicherweise konnten in dieser Reaction dieselben Producte entstehen, wie in der letztbetrachteten:



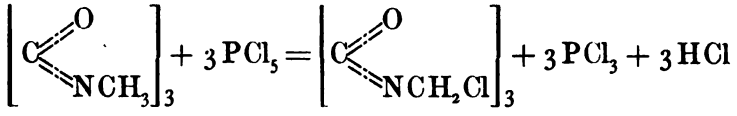
Wenn eines der beiden activen Chloratome im Phosphorpentachlorid die Methylgruppe von dem Stickstoff löst, so beansprucht letzterer dreiviertel der Atombindekraft des Kohlenstoffatoms, und es konnte nunmehr ein univalentes Chloratom für das bivalente Sauerstoffatom eintreten. Vollzog sich die Reaction in diesem Sinne, so würde der Versuch die Frage unentschieden gelassen haben. Allein das Phosphorpentachlorid übt eine ganz andere Wirkung auf die Isocyanursäureäther. Über das Verhalten des Äthyläthers zu diesem Reagens liegt bereits eine Angabe von Habich und Limpricht[1] vor, nach welcher man das Phosphorpentachlorid von dem Isocyanurat abdestilliren kann, ohne dass letzteres angegriffen wird. Der Methyläther zeigt genau dasselbe Verhalten. Erhitzt man denselben aber mit Phosphorpentachlorid etwa acht Stunden lang im Einschlussrohr auf 200°, so findet man die starre Beschickung des Rohres in eine dunkle Flüssigkeit verwandelt. Beim Öffnen des Rohrs entweicht Salzsäuregas in grosser Menge, welches von Wasser nahezu vollständig absorbirt wird. Es liess sich keine Spur von Chlormethyl nachweisen und, als die dem Digestionsrohr entnommene Flüssigkeit der Destillation unterworfen wurde, ging zunächst reines Phosphortrichlorid vom Siedepunkte 78° über; der Siedepunkt stieg alsdann schnell bis über 300°, bei welcher Temperatur eine zähe Flüssigkeit destillirte, welche zu einem durchsichtigen, glasartigen, an Metastyrol erinnernden Körper erstarrte. Derselbe ist unlöslich in Wasser, sehr löslich in Alkohol, etwas schwieriger in Chloroform, noch weniger in Äther. Aus diesen Flüssigkeiten scheidet er sich beim Erkalten krystallinisch aus. Am besten krystallisirt er aber aus Benzol, aus welchem grosse, wohl ausgebildete, farblose Prismen vom Schmelzpunkte 164° erhalten wurden. Eine Analyse, welche jedoch noch der Bestätigung bedarf, lässt dieses merkwürdige Product als dreifach chlorirtes Methylisocyanurat

[1] Habich und Limpricht, Lieb. Ann. CIX., 102.

Digitized by Google



erkennen. Die Reaction war also nach der Gleichung:



verlaufen, ganz anders, als man unter der Voraussetzung, dass Cyanursäure und Isocyanursäuremethyläther analog construirte Körper seien, hätte erwarten sollen. Das Ergebniss dieser Versuche erklärt sich am einfachsten durch die Annahme, dass die Cyanursäure die den normalen Äthern entsprechende Hydroxylverbindung ist.

Das auf dem angedeuteten Wege erhaltene Chlorderivat des Methylisocyanurats verdient übrigens eine nähere Untersuchung, und ich beabsichtige daher, diese Arbeit in der Kürze weiter fortzusetzen.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALTSVERZEICHNISS

Seite

45. Schwendener: Über Scheitelwachsthum und Blattstellungen (hierzu Taf. VI) 547
46. Hofmann: Über die Einwirkung des Ammoniaks und der Amine auf den Sulfocyanursäuremethyläther und das Cyanurchlorid. Normale alkylirte Melamine 565
47. Hofmann: Über die den Alkylcyanamiden entstammenden alkylirten Isomelamine und über die Constitution des Melamins und der Cyanursäure 593

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE

aus den Jahren 1883 und 1884.

(In Commission in Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.)

Schrader: Gedächtnissrede auf Justus Olshausen . . . . . M. 1.00
Hagen: Geschwindigkeit des strömenden Wassers in verschiedenen Tiefen, untersucht nach den von Brünings ausgeführten Messungen . . . . . » 4.00
Tobler: Die altvenezianische Übersetzung der Sprüche des Dionysius Cato . . . . . » 3.50
Eichler: Beiträge zur Morphologie und Systematik der Marantaceen . . . . . » 6.30
Kronecker: Über bilineare Formen von vier Variabeln . . . . . » 2.50
Schrader: Zur Frage nach dem Ursprunge der altbabylonischen Cultur . . . . . » 3.00
Tobler: Über das Buch des Uguçon da Laodho . . . . . » 5.00
Dillmann: Über die Regierung, insbesondere die Kirchenordnung des Königs Zar'a-Jacob . . » 5.00
Imhoof-Blumer: Die Münzen der Dynastie von Pergamon . . . . . » 5.00
Roth: Beiträge zur Petrographie plutonischer Gesteine. IV. . . . . » 7.50
Virchow: Über alte Schädel von Assos und Cypern . . . . . » 5.00
Wiedemann: Über die Bestimmung des Ohm . . . . . » 4.50
Diels: Über die Berliner Fragmente der Ἀθηναίων πολιτεία des Aristoteles . . . . . » 4.00
Schrader: Die Keilinschriften am Eingange der Quellengrotte des Sebeneh-Su . . . . . » 3.00

Studer: Über die von S. M. S. Gazelle auf der Reise um die Erde 1874—1876 gesammelten Isopoden . . . . . » 2.50
Marshall: Agilardiella radiata . . . . . » 1.50
Krabbe: Über das Wachsthum des Verdickungsringes und der jungen Holzzellen in seiner Abhängigkeit von Druckwirkungen . . . . . » 4.50
Studer: Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—1876 gesammelten Asteriden und Euryaliden . . . . . » 4.50
Freudenthal: Die durch Averroes erhaltenen Fragmente Alexander's zur Metaphysik des Aristoteles » 3.00
Bohn: Der Tempel des Dionysos zu Pergamon . . . . . » 1.50
Hirschfeld, G.: Paphlagonische Felsengräber . . . . . » 6.00

Register für die Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie zu Berlin vom Jahre 1874 bis 1881 M. 3.00

Digitized by Google

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Lesekreise den ihn näher angehenden des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILU

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissen in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellsch Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht

---

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwiss Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, a
die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,
» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,
» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1884 nicht zugekommen sein sollten, wollen hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclam Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1885 angebracht

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchhä zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCH

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILU

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sit oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Selbstk der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselb Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit Buchhandlung in Verbindung setzen.

Digitized by Google

13892

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

HEFT IX.

NOVEMBER 1885.

BERLIN 1885.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN.

Digitized by Google

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des **Jahrganges 1881** haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der **Wissenschaften**« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »**Sitzungsberichte**« getreten, für welche unter anderen folgende **Bestimmungen** gelten.

(Auszug aus dem **Reglement für die Redaction der** »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen **Stücken in Gross-Octav regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu **einem Kalenderjahr** gehörigen Stücke bilden **vorläufig einen Band** mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen **Stücke erhalten** ausserdem eine durch den Band **ohne Unterschied** der Kategorien der Sitzungen fortlaufende **römische Ordnungsnummer**, und zwar die Berichte über Sitzungen **der physikalisch-mathematischen** Classe allemal **gerade, die über** Sitzungen der philosophisch-historischen **Classe ungerade** Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine **Übersicht über** die in der Sitzung vorgetragenen **wissenschaftlichen Mittheilungen** und über die zur Veröffentlichung **geeigneten** geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten **überwiesenen** wissenschaftlichen Arbeiten, **und zwar in der** Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das **Stück gehört**, druckfertig übergebenen, dann die, **welche in früheren** Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen **Sitzungen gehörigen** Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen **Druckschriften** wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen **Sitzung druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die **Vermittelung** eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder **correspondirender** Mitglieder, welche direct bei der **Gesammtakademie** oder bei einer der Classen eingehen, **hat der** vorsitzende Secretar selber oder durch ein **anderes Mitglied** zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, **deren** Verfasser der Akademie nicht angehören, **hat er einem** zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu **überweisen.**

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf **32 Seiten** in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, **welche** der Akademie nicht angehören, sind auf die **Hälfte dieses** Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser **Grenzen ist** nur nach ausdrücklicher Zustimmung der **Gesammtakademie** oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text **einzuschaltenden** Holzschnitten sollen Abbildungen auf **durchaus** **Nothwendiges beschränkt** werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den **Text einzuschaltenden** Holzschnitte fertig sind und von **besonders beizugebenden** Tafeln die volle erforderliche **Auflage eingeliefert ist.**

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch **nur auszugsweise** oder auch in weiterer Ausführung, in **deutscher Sprache** veröffentlicht sein oder werden. Wenn **der Verfasser** einer aufgenommenen wissenschaftlichen **Mittheilung** diese anderweit früher zu veröffentlichen **beabsichtigt**, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er **dazu der Einwilligung** der Gesammtakademie oder der **betreffenden** Classe.

§ 8.

3. **Auswärts** werden Correcturen nur auf besonderes **Verlangen** verschickt. Die Verfasser verzichten damit **auf Erscheinen** ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. **Neben** der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher **Mittheilungen** auch abgesondert in der Weise publicirt **werden**, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender **Paginirung** versehen und mit besonderem Verkaufspreis **in den Buchhandel** gebracht werden.

§ 11.

1. **Jeder** Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält **unentgeltlich fünfzig** Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf **welchem** der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. **Dem** Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere **gleiche** Separatabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert **zu unentgeltlicher** eigener Vertheilung abziehen zu **lassen, sofern** er hiervon rechtzeitig dem redigirenden **Secretar** Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der **Secretar** zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction **und** den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden **wissenschaftlichen Arbeiten**; in dieser Eigenschaft **heisst er** der redigirende Secretar.

§ 29.

1. **Der** redigirende **Secretar** ist für den Inhalt des **geschäftlichen** Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich**

Digitized by Google

48. Zur Theorie der Gleichgewichtsvertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln.

Von G. Kirchhoff.

(Vorgetragen am 12. November; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLIV]; — ausgegeben am 19. November.)

Die Gleichgewichtsvertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln ist ein Problem, dessen Lösung schon von Poisson[1] gegeben und später von anderen auf verschiedenen Wegen abgeleitet ist. Von hervorragendem Interesse bei demselben ist die Ermittelung der Elektricitätsmengen, welche die Kugeln enthalten, und der Kraft, mit der sie anziehend oder abstossend auf einander wirken, wenn die Potentialwerthe in ihnen gegeben sind.

Es seien a und b die Radien der beiden Kugeln, c der Abstand ihrer Mittelpunkte, g, h die Potentialwerthe in ihnen, E_1, E_2 die Elektricitätsmengen, die sie enthalten, und F die Abstossungskraft, die sie auf einander ausüben; dann ist

$$E_1 = a_{11}g + a_{12}h$$
$$E_2 = a_{21}g + a_{22}h$$
$$2F = g^2\frac{\partial a_{11}}{\partial c} + 2gh\frac{\partial a_{12}}{\partial c} + h^2\frac{\partial a_{22}}{\partial c},$$

wo

$$a_{21} = a_{12}$$

und a_{11}, a_{12}, a_{22} Functionen von a, b, c sind, um deren Bestimmung es sich handelt.

Aus den Gleichungen, welche ich in meiner Abhandlung »Über die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln«[2] abgeleitet habe, ergeben sich für a_{11}, a_{12}, a_{22} die folgenden Ausdrücke. Es sei q die positive Wurzel, welche kleiner als 1 ist, der Gleichung

$$q^2 + \frac{1}{q^2} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab},$$

oder, was dasselbe ist, der Gleichung

[1] Mémoires de l'Institut de France 1811.

[2] Crelle's Journal. Bd. 59. 1861.

Digitized by Google

$$q + \frac{1}{q} = \sqrt{\frac{c^2 - (a-b)^2}{ab}},$$

und

$$\xi = \frac{a + bq^2}{c}, \quad \eta = \frac{b + aq^2}{c},$$

wobei

$$\xi\eta = q^2,$$

dann ist

$$a_{11} = a(1-\xi^2)\left\{\frac{1}{1-\xi^2} + \frac{q^2}{1-\xi^2 q^4} + \frac{q^4}{1-\xi^2 q^8} + \ldots\right\}$$
$$-a_{12} = \frac{ab}{c}(1-q^4)\left\{\frac{1}{1-q^4} + \frac{q^2}{1-q^8} + \frac{q^4}{1-q^{12}} + \ldots\right\}$$
$$a_{22} = b(1-\eta^2)\left\{\frac{1}{1-\eta^2} + \frac{q^2}{1-\eta^2 q^4} + \frac{q^4}{1-\eta^2 q^8} + \ldots\right\}.$$

Sir William Thomson[1] hat für a_{11}, a_{12}, a_{22} Formeln aufgestellt, welche zur numerischen Rechnung vorzüglich geeignet sind, wenn der Abstand der Kugeln nicht zu klein gegen ihre Radien ist, und mit Hülfe derselben zum Gebrauch bei einem von ihm construirten Elektrometer eine Tafel berechnet, aus der die Werthe von a_{11}, a_{12}, a_{22} und $\frac{\partial a_{11}}{\partial c}, \frac{\partial a_{12}}{\partial c}, \frac{\partial a_{22}}{\partial c}$ für den Fall $a = b = 1$ zu entnehmen sind, wenn c einen der Werthe 2,1, 2,2, 2,3 ..., 4 hat. Diese Formeln sind:

$$a_{11} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \ldots$$
$$-a_{12} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \ldots$$
$$a_{22} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + \frac{1}{Q_3} + \ldots$$
$$P_{n+1} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} P_n - P_{n-1}$$
$$Q_{n+1} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} Q_n - Q_{n-1}$$
$$S_{n+1} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} S_n - S_{n-1}$$

und

$$P_1 = \frac{1}{a} \qquad P_2 = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} P_1 + \frac{1}{b}$$
$$Q_1 = \frac{1}{b} \qquad Q_2 = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} Q_1 + \frac{1}{a}$$
$$S_1 = \frac{c}{ab} \qquad S_2 = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} S_1$$

[1] Phil. Mag. for April 1853.

Digitized by Google

Statt der drei letzten Gleichungen können auch die einfacheren

$$P_0 = -\frac{1}{b}, \quad Q_0 = -\frac{1}{a}, \quad S_0 = 0$$

geschrieben werden, wenn man festsezt, dass die für P_{n+1}, Q_{n+1}, S_{n+1} angegebenen Relationen auch für $n = 1$ gelten sollen.

Hiernach kann man mit Leichtigkeit nach einander die Glieder der für a_{11}, a_{12}, a_{22} nach Sir W. Thomson angesetzten Entwickelungen berechnen.

Es stimmen diese Glieder einzeln mit denen der vorher angegebenen Reihen überein. Um diese Behauptung in Bezug auf die für a_{11} aufgestellten Reihen einzusehen, bemerke man, dass die für P_n geltende Differenzengleichung durch Einführung der Grösse q wird

$$P_{n+1} = \left(q^2 + \frac{1}{q_2}\right) P_n - P_{n-1}$$

und dass hiernach ist

$$P_n = Aq^{2n} + B\frac{1}{q^{2n}},$$

wo A und B constante, d. h. von n unabhängige Grössen sind. Dieselben bestimmen sich, indem man einmal $n = 0$, dann $n = 1$ setzt. Das giebt

$$A + B = -\frac{1}{b}$$

$$Aq^2 + B\frac{1}{q^2} = \frac{1}{a},$$

also

$$A\left(q^2 - \frac{1}{q^2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{bq^2}$$

$$B\left(\frac{1}{q^2} - q^2\right) = \frac{1}{a} + \frac{q^2}{b}.$$

Aus den Relationen

$$\xi = \frac{a + bq^2}{c}, \quad \frac{1}{\xi} = \frac{a + \frac{b}{q^2}}{c}$$

folgt aber

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a}\,\frac{\frac{\xi^2}{q^2} - q^2}{1 - \xi^2},$$

daher wird

$$A = -\frac{1}{a}\,\frac{\xi^2}{(1 - \xi^2)q^2}, \quad B = \frac{1}{a}\,\frac{q^2}{1 - \xi^2}$$

Digitized by Google

und

$$P_n = \frac{1}{a(1-\xi^2)}\left(\frac{1}{q^{2(n-1)}} - \xi^2 q^{2(n-1)}\right)$$

oder

$$\frac{1}{P_n} = a(1-\xi^2)\frac{q^{2(n-1)}}{1-\xi^2 q^{4(n-1)}}.$$

Das ist aber das $n$te Glied der zuerst für a_{11} angegebenen Reihenentwickelung. Ganz ähnliche Rechnungen lassen sich in Bezug auf a_{12} und a_{22} durchführen.

Diese Reihen convergiren um so schneller, je kleiner q, d. h. je grösser der Abstand der Kugeln im Verhältniss zu ihren Radien ist. Um ein Urtheil über diese Convergenz in einigen Fällen hervorzurufen, lasse ich die ersten Glieder der Entwickelung von a_{11} für gleiche Kugeln und einige Werthe der Entfernung folgen, die in der Tafel von Sir W. Thomson vorkommen.

$$a = b = 1$$

c	2.1	2.5	4
$\frac{1}{P_1}$	1	1	1
$\frac{1}{P_2}$	0.2932	0.1904	0.0667
$\frac{1}{P_3}$	0.1386	0.0469	0.0048
$\frac{1}{P_4}$	0.0715	0.0117	0.0004
$\frac{1}{P_5}$	0.0377	0.0029.	

Man sieht hieraus, dass bei den kleineren der von Sir W. Thomson in seine Tafel aufgenommenen Entfernungen schon die Berücksichtigung einer bedeutenden Zahl von Gliedern nöthig ist, um eine mässige Genauigkeit zu erreichen. Es lassen sich die in Rede stehenden Reihen in andere verwandeln, deren Convergenz eine ungleich schnellere ist.

Diese Reihen sind, abgesehn von gewissen Factoren, alle von der Form

$$\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\alpha\gamma} + \frac{\beta^2}{1-\alpha\gamma^2} + \frac{\beta^3}{1-\alpha\gamma^3} + \ldots,$$

wo α, β, γ echte Brüche bedeuten. Bezeichnet man diese Reihe mit R, so hat man auch

$$R = \frac{1}{1-\alpha} + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \ldots + \frac{\alpha\beta\gamma}{1-\alpha\gamma} + \frac{\alpha\beta^2\gamma^2}{1-\alpha\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3\gamma^3}{1-\alpha\gamma^3} + \ldots$$

Digitized by Google

oder, wenn man die Glieder der oberen Horizontallinie in eines zusammenfasst,

$$R = \frac{1 - \alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \alpha\beta\gamma R_1,$$

wo

$$R_1 = \frac{1}{1-\alpha\gamma} + \frac{\beta\gamma}{1-\alpha\gamma^2} + \frac{\beta^2\gamma^2}{1-\alpha\gamma^3} + \ldots$$

Wie man sieht, entsteht R_1 aus R dadurch, dass man darin $\alpha\gamma$ für α und $\beta\gamma$ für β setzt. Nennt man R_2 die Reihe, in welche durch dieselben Substitutionen R_1 übergeht, u. s. f., so hat man daher

$$R_1 = \frac{1 - \alpha\beta\gamma^2}{(1-\alpha\gamma)(1-\beta\gamma)} + \alpha\beta\gamma^3 R_2$$

$$R_2 = \frac{1 - \alpha\beta\gamma^4}{(1-\alpha\gamma^2)(1-\beta\gamma^2)} + \alpha\beta\gamma^5 R_3$$

. . . . . .

Multiplicirt man die Gleichungen, welche $R, R_1, R_2 \ldots$ durch $R_1, R_2, R_3 \ldots$ ausdrücken, mit $1, \alpha\beta\gamma, \alpha^2\beta^2\gamma^4, \alpha^3\beta^3\gamma^9, \ldots$ und addirt sie, so erhält man[1]

$$R = \frac{1 - \alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \alpha\beta\gamma \frac{1 - \alpha\beta\gamma^2}{(1-\alpha\gamma)(1-\beta\gamma)} + \alpha^2\beta^2\gamma^4 \frac{1 - \alpha\beta\gamma^4}{(1-\alpha\gamma^2)(1-\beta\gamma^2)} + \ldots$$

Das $n+1$te Glied dieser unendlichen Reihe ist

$$\alpha^n\beta^n\gamma^{n^2} \frac{1 - \alpha\beta\gamma^{2n}}{(1-\alpha\gamma^n)(1-\beta\gamma^n)}.$$

Die Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} sind, durch R ausgedrückt,

$$a_{11} = a(1-\xi^2) R(\alpha = \xi^2, \beta = q^2, \gamma = q^4)$$
$$-a_{12} = \frac{ab}{c}(1-q^4) R(\alpha = q^4, \beta = q^2, \gamma = q^4)$$
$$a_{22} = b(1-\eta^2) R(\alpha = \eta^2, \beta = q^2, \gamma = q^4).$$

Haben die Radien der beiden Kugeln, a und b, gleiche Grösse, so ist

$$\xi = \eta = q, \quad q + \frac{1}{q} = \frac{c}{a},$$

und, setzt man noch $a = 1$, so wird

---

[1] Ein besonders einfacher Fall der Gleichung, die man durch Gleichsetzung der für R ursprünglich angenommenen und der nun dafür gefundenen Reihe erhält, ist der, dass $\alpha = \beta = \gamma = x$ ist. Fügt man noch den Factor x hinzu, so wird sie

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \ldots + \frac{x^n}{1-x^n} + \ldots = x\frac{1+x}{1-x} + x^n\frac{1+x^2}{1-x^2} + \ldots + x^{n^2}\frac{1+x^n}{1-x^n} + \ldots$$

Diese Gleichung ist schon von CLAUSEN in CRELLE's Journal Bd. 3 S. 95 angegeben.

Digitized by Google

$$2q = c - \sqrt{c^2 - 4}$$

$$a_{11} = a_{22} = 1 + q^2 + q^8(1-q^2)\frac{1+q^6}{1-q^6} + q^{24}(1-q^2)\frac{1+q^{10}}{1-q^{10}} + \ldots$$

mit dem $n$ten Gliede

$$q^{4n\cdot n-1}(1-q^2)\frac{1+q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}}$$

und $$-a_{12} = \frac{1}{c} + q^3 + q^{11}\frac{(1-q^2)(1-q^{14})}{(1-q^6)(1-q^8)} + q^{29}\frac{(1-q^2)(1-q^{22})}{(1-q^{10})(1-q^{12})} + \ldots$$

mit dem $n$ten Gliede

$$q^{4n^2-2n-1}\frac{(1-q^2)(1-q^{8n-2})}{(1-q^{4n-2})(1-q^{4n})}.$$

Für denselben Fall, dass $a = b = 1$, findet man hieraus weiter, indem man benutzt, dass

$$\frac{\partial q}{\partial c} = -\frac{q^2}{1-q^2}$$

ist,

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial c} = \frac{q^3}{1-q^2}$$
$$+ q^9\frac{1+q^6}{1-q^6}\left(4 - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{6q^6}{1-q^{12}}\right)$$
$$+ q^{25}\frac{1+q^{10}}{1-q^{10}}\left(12 - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{10q^{10}}{1-q^{20}}\right)$$
$$+ q^{49}\frac{1+q^{14}}{1-q^{14}}\left(24 - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{14q^{14}}{1-q^{28}}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial a_{12}}{\partial c} = \frac{1}{2c^2} + \tfrac{3}{2}\frac{q^4}{1-q^2}$$
$$+ q^{12}\frac{1-q^{14}}{(1-q^6)(1-q^8)}\left(\tfrac{11}{2} - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{3q^6}{1-q^6} + \frac{4q^8}{1-q^8} - \frac{7q^{14}}{1-q^{14}}\right)$$
$$+ q^{30}\frac{1-q^{22}}{(1-q^{10})(1-q^{12})}\left(\tfrac{29}{2} - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{5q^{10}}{1-q^{10}} + \frac{6q^{12}}{1-q^{12}} - \frac{11q^{22}}{1-q^{22}}\right)$$
$$+ q^{56}\frac{1-q^{30}}{(1-q^{14})(1-q^{16})}\left(\tfrac{55}{2} - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{7q^{14}}{1-q^{14}} + \frac{8q^{16}}{1-q^{16}} - \frac{15q^{30}}{1-q^{30}}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Um die Convergenz dieser Reihen zu zeigen, habe ich ihre ersten Glieder für die oben gewählten Werthe von c berechnet.

$c = 2.1$	$c = 2.5$	$c = 4$
1.532672	1.250000	1.071797
0.051021	0.003024	0.000025
0.000266		
$a_{11} = 1.58396$	1.25302	1.07182

Digitized by Google

	$c = 2.1$	$c = 2.5$	$c = 4$
	0.864958	0.525000	0.269239
	0.018512	0.000374	
	0.000054		
$-a_{12} =$	0.88352*	0.52537	0.26924
	0.831894	0.166667	0.020726
	0.301853	0.007577	0.000028
	0.004685		
	0.000005		
$\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial c} =$	1.13844	0.17424*	0.02075
	1.024108	0.205000	0.039580
	0.149131	0.001302	0.000001
	0.001153		
	0.000001		
$\frac{1}{2}\frac{\partial a_{12}}{\partial c} =$	1.17439	0.20630	0.03958.

Man ersieht hieraus unter Anderem, dass bei einigermaassen grossen Entfernungen der Kugeln die fraglichen Coefficienten mit grosser Genauigkeit durch die Ausdrücke dargestellt sind

$$a_{11} = 1 + q^2 \qquad -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial c} = \frac{q^3}{1-q^2}$$

$$-a_{12} = \frac{1}{c} + q^3 \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial a_{12}}{\partial c} = \frac{1}{2c^2} + \frac{3}{2}\frac{q^4}{1-q^2}.$$

[1] Von den hier berechneten Werthen der Reihen stimmen die mit einem Sternchen bezeichneten nicht ganz überein mit den entsprechenden der von Sir W. THOMSON veröffentlichten Tafel. Statt derselben finden sich dort die Zahlen

1.25324, 0.88175, 0.17432.

Digitized by Google

Digitized by Google

49. Beitrag zur Kenntniss des Nerven- und Muskelsystems der Hornschwämme.

Von Dr. R. v. Lendenfeld
in Sydney.

(Vorgelegt von Hrn. F. E. Schulze am 12. November; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLIV]; — ausgegeben am 19. November.)

Eine der australischen Euspongia-Arten, welche mit *Euspongia anfractuosa* Carter[1] ident ist, von mir aber *Euspongia canaliculata* genannt wird, zeigt in mancher Hinsicht bemerkenswerthe Abweichungen von dem bekannten Bau[2] des gewöhnlichen Badeschwammes, *Euspongia officinalis*. Der Schwamm ist massig und besitzt kurze, abgerundete, fingerförmige Fortsätze. Diese enthalten je einen weiten kreiscylinderförmigen, longitudinal verlaufenden Hohlraum, welcher äusserlich einem weiten Oscularrohre sehr ähnlich sieht. Diese weiten Röhren münden nach unten hin in ein System anastomosirender Lacunen ein. Die ganze Oberhaut ist reich an Poren. Zwischen den regelmässig vertheilten Porensieben ist ein sehr zierliches Sandnetz ausgebreitet. Bei genauerer Betrachtung erkennt man, dass die Röhren in den fingerförmigen Fortsätzen mit einer ganz ebenso gestalteten Haut ausgekleidet sind. Das Gleiche gilt von der Auskleidung der lacunösen Hohlräume in der Tiefe des Schwammes. Die Röhren und Lacunen sind nicht Oscularröhren und gehören nicht zum eigentlichen Schwammkörper, sondern bilden einen Vorhofsraum, der mit dem einführenden Canalsystem allein im Zusammenhange steht. Auf der Innenseite der Röhren und in den Lacunenwänden findet man nämlich keine Oscula. Diese Vorhofsbildung weicht somit von jener ziemlich bedeutend ab, welche ich von den Auleniden[3] beschrieben habe. Sie ist den Nardorusformen reciprok.

[1] H. J. Carter. Description of Sponges from Port Phillip Heads, South Australia, continued. Annals and Magazine of Natural History, Series 5, Volume 15, p. 316.

[2] F. E. Schulze. Untersuchungen über den Bau und die Entwickelung der Spongien. VII. Mittheilung. Die Familie der Spongidae. Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie. Band 32, S. 591 ff.

[3] R. v. Lendenfeld. Über den Bau der Hornschwämme. Zoologischer Anzeiger für 1885.

Digitized by Google

Die Oscula sind klein. Sie liegen stets in Reihen. Diese Reihen laufen in longitudinaler Richtung den fingerförmigen Fortsätzen entlang. Die fingerförmigen Fortsätze sind $10 - 20^{mm}$ dick und ebenso lang, die Oscula $1 - 2^{mm}$ breit, kreisrund und in ziemlich regelmässigen Abständen, $10 - 15^{mm}$ von einander entfernt.

An Skeletten sieht man keine Spur von Osculis. An Stelle der Oscula-Reihen finden sich hier tiefe Rinnen, die zuweilen bis in das centrale Pseudo-Oscularrohr herabreichen. Am lebenden Schwamm ist von diesen Rinnen nichts zu sehen. Sie sind von dem Schwammgewebe ganz ausgefüllt. Freilich entbehrt dieses Gewebe jeglicher Skelettstütze und es erscheint dieser Theil an trockenen Exemplaren stark vertieft und eingefallen.

An Querschnitten erkennt man, dass das Gewebe, welches diesen Theil bildet, sehr locker und laeunös ist. Die Geisselkammergruppen zwischen den weiten und unregelmässigen, zumeist longitudinal verlaufenden Canälen sind wenig zahlreich und klein, bei weitem nicht so zahlreich, wie jene des viel dichteren, nur mit kleinen Canälen versorgten, skeletthaltigen Theiles. Diese grossen Canäle und Lacunen fliessen zur Bildung des kurzen Oscularrohres zusammen: sie gehören alle dem ausführendem Systeme an.

Wenn nun schon in dieser Rinnenbildung uns eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit entgegentritt, so finden wir doch bei der genaueren mikroskopischen Untersuchung noch viel interessantere Verhältnisse vor.

Das Skelett ist ein sehr feinmaschiges Euspongiaskelett. Die radialen Hauptfasern sind wenig verzweigt und sandführend. Die Verbindungsfasern hingegen frei von Fremdkörpern und vielfach verzweigt. Sie bilden zahlreiche Anastomosen. Ihre durchschnittliche Dicke ist bei den verschiedenen Varietäten verschieden und schwankt zwischen 0.01 und 0.02^{mm}. Am Rinnenrande nun enden alle diese Verbindungsfasern mit sehr scharfen, schwertförmigen Spitzen. Diese Spitzen stehen so nahe bei einander, dass die Rinnenwand dicht stachlig aussieht.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass diese Stachligkeit eine Vertheidigungseinrichtung gegen solche fremde Eindringlinge ist, die von den weiten Oscularröhren und Lacunen des ausführenden Systems aus in den Schwammkörper gelangen wollen.

Vor den spitzen Enden der Hornfasern zieht eine Membran herab, welche das Lacunengewebe der Rinne durchaus von dem übrigen Schwammkörper trennt. Nach unten hin ist diese Membran mehrfach unterbrochen. Hier treten die ausführenden Canäle hindurch. Wir begegnen einer solchen Haut auf beiden Seiten der Lacunenrinne.

Digitized by Google

Diese Häute bekleiden die Seitenwände der Rinne in ihrer ganzen Länge.

Bei genauerer Untersuchung feiner Querschnitte erkennt man, dass diese Haut aus parallelen Spindelzellen besteht, welche senkrecht auf der äusseren Oberfläche des Schwammes stehen, indem sie alle von der Oberfläche radial in die Tiefe herabziehen. Sie bilden mehrere Lagen in der erwähnten Membran — durchschnittlich drei. Die Membran selbst ist durchaus von gleichförmiger Dicke. Diese Zellen laufen nach beiden Seiten hin in ausserordentlich feine Spitzen aus. Sie sind 0.1^{mm} lang und in der Mitte 0.003^{mm} breit. Der ovale Kern findet sich in der Längenmitte. Er liegt jedoch nicht axial, sondern mehr oder weniger seitlich. In der Umgebung des Kernes findet sich eine sehr geringe Menge gewöhnlichen Protoplasmas, während der ganze übrige Theil der Zelle aus einer Substanz besteht, die wesentlich von dem Inhalt gewöhnlicher Spindelzellen abweicht. Es finden sich nämlich deutliche, kleine, aber das Licht sehr stark und doppelt brechende rundliche Körnchen in einer homogenen, durchsichtigen Substanz eingebettet, welche das Licht wenig und nur einfach bricht. Die Körnchen sind theilweise sehr regelmässig angeordnet, so dass eine Art Querstreifung der Fasern zu Stande kommt. Die Körnchen treten nicht zur Bildung doppeltlichtbrechender Scheiben zusammen und der Grad der Regelmässigkeit in ihrer Anordnung ist auch nicht immer der gleiche. Bei der Untersuchung von Spiritusmaterial erkennt man leicht, dass diese Rinnenwandmembranen stark zusammenziehbar sind, und zwar so, dass sie sich immer in radialer Richtung contrahiren. Hierdurch wird die äussere Oberfläche des Rinnenfüllgewebes mehr oder weniger gesenkt. In der sehr beträchtlichen Schwankung der Tiefe, bis zu welcher die Oberfläche des Rinnenfüllgewebes in verschiedenen Exemplaren eingesunken ist, drückt sich die Wirkung der radialen Contraction dieser Membranen aus.

Ich glaube aus den angeführten Beobachtungen schliessen zu sollen, dass diese Membranen Muskeln sind und die sie zusammensetzenden Zellen Muskelzellen. Und weiter, dass diese Muskelzellen in Folge ihrer eigenthümlichen Structur den Übergang von der glatten zu der quergestreiften Faser vermitteln.

An Querschnitten durch die Rinnenränder erkennt man, dass ein eigenthümliches Organ am oberen, äusseren Rande dieser Muskelmembran sitzt. Man findet dort nämlich die Membran plötzlich bis zum doppelten oder dreifachen Durchmesser verdickt. Diese Verdickungslinie kann an feinen Schnitten genau studirt werden. Man findet, dass sie nicht aus Spindelzellen besteht. Grosse kugelige Kerne sind hier sehr deutlich, diese erscheinen einer granulösen Substanz

Digitized by Google

eingebettet. Zweifellos gehört diese Substanz Zellen an, deren Grenzen nicht deutlich sind. Von dieser Randverdickung gehen seitlich körnige Fasern ab, welche tangential in der äusseren Oberhaut des Schwammes dahinziehen und zuweilen auf ziemlich lange Strecken hin verfolgt werden können. Oben stehen auf dieser distalen Verdickung der Muskellamella spindelförmige Sinneszellen auf. Die basalen Enden aller dieser auf eine ziemlich breite Zone verstreuten Zellen krümmen sich gegen die obenerwähnte Verdickung hin, und sie stehen mit derselben in directem Zusammenhange. Eine Verzweigung der Basalausläufer wurde nicht beobachtet. Der Zellkörper selbst hat die gewöhnliche Form. Die Zellen sind etwa 0.03^{mm} lang und 0.002^{mm} in der Mitte, an der Kernanschwellung breit. In dem Zellkörper finden sich nach Osmiumbehandlung jene charakteristischen, dunklen Körnchen, welche von Jickeli[1] in den Sinneszellen der Hydroiden entdeckt worden sind und welche auch bei den Spongien-Sinneszellen vorkommen, und hier ein besonders deutliches und werthvolles Kriterium abgeben.

Ich glaube die oben beschriebenen Gebilde am distalen Rande der Muskelmembran folgendermaassen deuten zu sollen.

Die ganze Verdickung, welche nur stellenweise unterbrochen ist, besteht aus Ganglienzellen, deren Kerne an Praeparaten deutlich sind, deren Conturen jedoch nicht klar hervortreten. Die körnigen Fäden, welche in tangentialer Richtung von diesen Ganglien abgehen, sind Nerven, welche die Verbindung der Ganglien mit entfernter gelegenen, vorläufig noch unbekannten Gebilden, herstellen.

Aus der obigen Darstellung geht hervor, dass die Sinneszellenzone dem oberen Rande der Muskelmembran entlang zieht und somit zwei Streifen von Sinneszellen gebildet werden, welche das Rinnenfüllgewebe an der Oberfläche einrahmen.

Ich glaube, dass dieses Gebilde unseres Schwammes einen directen Vergleich mit dem Ringnerven der cykloneuren Medusen (Eimer), den Hydromedusen zulässt und darauf hinweist, dass die Spongien, weil einer ähnlichen Entwickelung fähig wie diese Cnidarier, von ihnen wahrscheinlich ursprünglich nicht so sehr verschieden waren, wie wir gewöhnlich anzunehmen pflegen. Freilich muss zugegeben werden, dass durch convergirende Entwickelung hier eine Ähnlichkeit entstanden sein mag, die gar keinen phylogenetischen Schluss gestattet, um so mehr als diese Gebilde der Spongien mesodermal sind und nicht subepithelial wie bei den Hydromedusen. Auf diesen Gegenstand näher einzugehen, würde uns jedoch weiter führen, als es in einer vorläufigen Mittheilung geboten scheint.

---

[1] C. Jickeli. Über den Bau der Hydroidpolypen. Morphologisches Jahrb. Bd. VIII.

Digitized by Google

Wenn ich nun noch einen kurzen Rückblick auf unsere Kenntniss des Nerven- und Muskelgewebes der Spongien werfe, so dürfte dies meinen Mitarbeitern auf diesem Gebiete einerseits von Werth sein, und andererseits wird eine solche Zusammenstellung auch allgemeinen morphologischen Untersuchungen zur Grundlage dienen können.

Zuerst wies F. E. SCHULZE, der Begründer der neueren Spongiologie nach, dass bei vielen Schwämmen einzelne Faserzellen, und auch Faserzellencomplexe, contractil seien. Diese Entdeckung, dass die längst bekannten Bewegungen der ausgewachsenen Schwämme (Larven, junge Spongillen u. s. w. bewegen sich ohne Faserzellencontraction) nicht durch eine Zusammenziehung der Grundsubstanz oder der Epithelien, sondern durch Zusammenziehung bestimmter, diesem Zwecke angepasster Elemente, verursacht werden, ist vielfach von mir und Anderen bestätigt worden.

Im Jahre 1880 demonstrirte C. STEWART »Palpocils« an *Grantia compressa* vor einer Versammlung der Königlich Englischen mikroskopischen Gesellschaft. Ich bin nicht in der Lage über diese Angabe, die mir erst vor einigen Monaten bekannt geworden ist, ein Urtheil abzugeben. Ich selber halte die Existenz von Sinneshaaren an den von mir entdeckten Sinneszellen aus apriorischen Gründen zwar für wahrscheinlich, habe jedoch Palpocils nie gesehen.

Ich habe eine Anzahl von australischen Kalkschwämmen, Schleimschwämmen und Hornschwämmen genauer untersucht und an einigen, jedoch verhältnissmässig nur wenigen Zellen gefunden, die ich als nervös betrachte. Von Hornschwämmen habe ich bis nun bloss die Auleninae und die Gattung Euspongia (die australischen Arten) hierauf geprüft. Die thatsächlichen Befunde in diesen Gruppen sind folgende:

Sycandra arborea HAECKEL. Die Sinneszellen bilden einen Ring am Eingange der einführenden Canäle.

Grantessa sacca R. v. L. Die Sinneszellen stehen in Gruppen am Eingange der einführenden Canäle.

Vosmaeria gracilis R. v. L. und *Sycandra pila* R. v. L. Die Sinneszellen stehen in Gruppen weiter ab im Umkreise der Einströmungsöffnungen.

Leucandra saccharata HAECKEL und *Leucandra meandrina* R. v. L. Die Sinneszellen stehen in Gruppen, welche unregelmässig über die Oberfläche zerstreut sind.

Leucetta microrhaphis und *Leucaltis Helena* R. v. L. Die Sinneszellen stehen einzeln an der Oberfläche zerstreut, scheinen jedoch zahlreicher in der Nähe der Einströmungsöffnungen zu sein.

Aulena villosa R. v. L. Die Sinneszellen stehen in kleinen Gruppen an den Vereinigungslinien der Membranen, welche im Vorhofsraume ausgespannt sind.

Digitized by Google

Halme globosa R. v. L. Die Sinneszellen stehen in Gruppen an den Rändern der Membranen, welche in den lacunösen Räumen des einführenden Canalsystems ausgespannt sind.

Euspongia canaliculata R. v. L. Die Sinneszellen bilden Zonen, welche an der Oberfläche die lacunöse Ausbreitung des ausführenden Systems umziehen.

Diese vereinzelten Beobachtungen lassen gar keinen allgemeinen Schluss zu, da die Beobachtungen an verschiedenen Arten so sehr verschieden sind.

Ich habe schon früher[1] darauf hingewiesen, dass die Schulze'sche Bezeichnung der zusammenziehbaren Elemente als »contractile Faserzellen« nun, da nervöse Elemente neben ihnen aufgefunden worden sind, nicht mehr nothwendig ist und durch die Bezeichnung Muskelzellen ersetzt werden kann.

Sowohl Muskel- wie Nervenzellen sind mesodermal. Die *Epithelien* der Spongien scheinen nirgends in der Weise weiter entwickelt, wie bei höheren Coelenteraten. Sowohl Entoderm wie Ektoderm bleiben stets einfach.[2]

---

[1] R. v. Lendenfeld. Das Nervensystem der Spongien. Zoologischer Anzeiger Nr. 186.

[2] Haeckel hat einige Kalkschwämme mit stellenweise mehrschichtigem Entoderm beschrieben. Bis jetzt ist diese Angabe nicht bestätigt worden. Vergleiche auch Vosmaer in Bronn's Classen und Ordnungen des Thierreiches, Porifera.

Digitized by Google

50. Über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Nachwirkungs-Erscheinungen bei Thermometern.

Von H. F. Wiebe,
technischem Hülfsarbeiter der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Commission.

(Vorgelegt von Hrn. Auwers am 12. November; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLIV]; — ausgegeben am 19. November.)

Im Anschluss an die Mittheilungen, welche ich mir im vorigen Jahre erlaubt habe, im Auftrage des Hrn. Prof. Dr. Foerster der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu überreichen (s. Sitzungsberichte 1884 S. 843 ff.), gestatte ich mir heute, mit Genehmigung des Hrn. Directors der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Commission, über einen vorläufigen Abschluss der von dieser Behörde in Gemeinschaft mi den HH. Prof. Dr. Abbe und Dr. Schott in Jena ausgeführten thermometrischen Untersuchungen zu berichten, welcher die damals ausgesprochenen Hoffnungen im Wesentlichen erfüllt.

Es ist nämlich im Verlaufe dieser Arbeiten gelungen, eine Glassorte herzustellen, welche sich leicht vor der Lampe verarbeiten lässt und den im vorigen Berichte näher dargelegten thermischen Nachwirkungen in viel geringerem Grade unterworfen ist, als das Glas der in den letzten Jahrzehnten in Deutschland hergestellten Thermometer, und auch in merklich geringerem Grade als die in anderen Ländern zur Thermometer-Fabrication zur Zeit benutzten Glassorten.

Diese in der Reihe der bezüglichen Fabricationsexperimente und Analysen mit der Nr. XVI^{III} bezeichnete Glassorte hat folgende Zusammensetzung:

Kieselsäure	67.5
Natron	14
Zinkoxyd	7
Kalk	7
Thonerde	2.5
Borsäure	2

Zwei andere Typen, welche sich etwas weniger leicht vor der Lampe verarbeiten lassen, dagegen in Betreff der thermischen Nach-

Digitized by Google

wirkung sich ebenso günstig wie das vorerwähnte Glas verhalten, sind die beiden mit Nr. XIV^{III} und Nr. XVIII^{III} bezeichneten, deren Zusammensetzungen die folgenden sind:

XIV^{III}		XVIII^{III}	
Kieselsäure	69	Kieselsäure	52
Natron	14	Kali	9
Zinkoxyd	7	Zinkoxyd	30
Kalk	7	Borsäure	9
Thonerde	1		
Borsäure	2		

Das wesentlich Charakteristische aller drei Glassorten, welche ich im Folgenden kurzhin Jenenser Glas nennen will, besteht darin, dass die Depressionsconstanten der aus ihnen verfertigten Thermometer, d. h. die Nachwirkungen andauernder Erwärmungen auf 100°, nur 0°.05 betragen, und dass dem entsprechend auch das langsame Ansteigen des Eispunktes in Folge des allmählichen Verschwindens der von der Anfertigungstemperatur herrührenden Nachwirkungen weit unter denjenigen Beträgen bleibt, die bei Thermometern aus anderem (auch englischem und französischem) Glase bei ähnlicher Behandlung in entsprechenden Zeiträumen beobachtet werden.

Zu der nachfolgenden Tafel, aus welcher die Beläge für diese Behauptungen zu entnehmen sind, ist zu bemerken, dass die in den ersten fünf und in den letzten drei Reihen aufgeführten Thermometer kurze Zeit vor Beginn der Beobachtungsreihen neu angefertigt waren, und dass die auf Hundertel Centigrad abgerundeten Zahlenwerthe Mittel aus den Beobachtungsergebnissen an je zwei oder mehreren gleichzeitig untersuchten Thermometern darstellen.

Ausser den erwähnten Gläsern enthält die Tafel drei, mit XXII, XVII^{III} und XXXI bezeichnete, auf Grund theoretischer Erwägungen in Jena hergestellte, welche eine besonders grosse Nachwirkung zeigen, und deren in der Schlusstabelle (S. 1028) angegebene Zusammensetzung mit derjenigen der schlechtesten neuerdings in den Handel gebrachten Thüringer Thermometergläser im Wesentlichen übereinstimmt. Der Vollständigkeit wegen sind alsdann auch noch einige Daten für Thermometer aus demjenigen gangbaren Thüringer Glas, wie es im letzten Jahrzehnt vielfach zur Verwendung gekommen ist, hinzugefügt worden. Letztere Zahlen sind allerdings mit den für die anderen Thermometer gegebenen nicht unmittelbar vergleichbar, da die Thermometer aus »Thüringer Glas« bei Beginn der Beobachtungen bereits sechs bis sieben Monate alt waren.

Digitized by Google

Glas.	Depression für 100°.	Anstieg des Eispunktes in Tagen:															
		4	21	42	49	66	88	135	160	175	200	242	285	317	447	570	1450	1600
XIV^{m}	0.05	—	—	—	—	0.02	—	—	—	—	—	0.03	—	0.04	—	—	—	—
XVI^{m}	0.05	—	—	—	—	—	0.04	—	—	—	—	—	0.04	—	—	—	—	—
XVIII^{m}	0.05	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.04	—	0.05	—	—	—	—	—
Französisches Glas (Verre dur)	0.07	—	—	—	0.02	0.04	—	—	—	—	0.07	—	—	—	—	—	—	—
Englisches Glas....	0.18	—	—	—	—	—	0.10	0.12	—	—	—	—	—	0.15	0.16	—	—	—
Thüringer Glas	0.36	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.25	—	—	—	—	0.38	0.43	0.44
XXII	1.05	0.05	—	0.09	0.12	—	0.16	—	0.25	0.25	—	—	—	—	—	—	—	—
XVII^{m}	1.06	—	—	0.22	—	0.33	—	—	—	—	—	—	0.43	—	—	—	—	—
XXXI	1.03	0.24	0.42	—	—	—	—	0.53	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Aus diesen Zahlen erhellt, dass sich Thermometer aus »Jenenser Glas« nicht nur hinsichtlich der vorübergehenden (periodischen) Depression, sondern auch bezüglich des langsamen (säcularen) Ansteigens des Eispunktes bedeutend günstiger verhalten, als die hier untersuchten Thüringer und besten englischen und französischen Thermometer. Um aber in Anbetracht des verhältnissmässig geringen Alters der Thermometer jeden Zweifel möglichst auszuschliessen, wurde noch nach einem anderen Kriterium zur Entscheidung dieses Punktes gesucht. Ein solches ist in dem schon im vorigen Berichte erwähnten Process des künstlichen Altmachens der Thermometer zu suchen. Dieses, wie es scheint, zuerst von WELSH in Kew angewendete Verfahren (annealing process) besteht darin, dass die Thermometer längere Zeit anhaltend auf einer höheren Temperatur (z. B. 100°) gehalten und alsdann möglichst langsam abgekühlt werden. Hierdurch wird das Verschwinden der von der hohen Anfertigungstemperatur herrührenden Depression beschleunitg und in kürzerer Zeit der gleiche Anstieg des Eispunktes bewirkt, der unter dem Einflusse mittlerer (Zimmer-) Temperatur erst im Laufe längerer Zeit eintritt.

Aus dem folgenden Täfelchen, in welchem die durch das genannte Verfahren erzielten Resultate zusammengestellt worden sind, erhellt besonders deutlich das ungünstigere Verhalten des ausländischen Glases gegenüber dem »Jenenser Glase«. Von der hinzugefügten Glassorte XX^{III} ist weiter unten die Rede.

Wirkung andauernder Erwärmung der Thermometer auf 100°.

Glas	nach Erwärmung während	betrug der Anstieg des Eispunktes
XIV^{m}	7 Stunden	0°02
XVI^{m}	7 »	0.01
XVIII^{m}	7 »	0.01
Französisches.....	8 »	0.05
Englisches	9 »	0.16
XX^{m}	8 »	0.15

Digitized by Google

Bei einer Reihe junger Thermometer aus Thüringer Glas hatte eine 26 stündige Erwärmung auf 100° einen Anstieg des zeitigen Eispunktes von 0°26 und eine solche von dreitägiger Dauer einen Anstieg von 0°40 bewirkt. Bei den Thermometern aus Glas XVII^{III}, XXII und XXXI wurde das Verschwinden der von der Anfertigungstemperatur herrührenden Depression durch den Siedeprocess derartig beschleunigt, dass sogar schon eine halbstündige Erwärmung auf 100° ausreichte, um ein mehrere Hundertel Grad betragendes Ansteigen des maximal deprimirten Eispunktes hervorzubringen. Weitere Versuche wurden wegen der geringen Resistenzfähigkeit dieser Gläser bisher nicht angestellt.

Ferner hat sich herausgestellt, dass die Eigenschaften des »Jenenser Glases« für thermometrische Anwendungen auch insofern sehr günstig sind, als die an sich schon sehr kleinen Depressionen, welche die Eispunkte der aus ihnen angefertigten Thermometer durch längere, schneller Abkühlung voraufgehende Erwärmungen auf 100° erfahren, sich ungemein schnell wieder ausgleichen, so dass schon nach Verlauf von zwei bis drei Tagen der Eispunkt wieder seine alte Höhe erreicht hat. Nahezu ebenso günstig haben sich in dieser Beziehung die hier untersuchten französischen Thermometer verhalten, während bei den englischen Thermometern nach etwa einem Monate erst die Hälfte der durch das Sieden hervorgerufenen Depression wieder ausgeglichen ist, und es bei den aus Thüringer Glas in den siebziger Jahren verfertigten Thermometern durchschnittlich eine Zeit von vier bis sechs Monaten bedarf, bis der durch Siedepunktsbestimmungen deprimirte Eispunkt seinen vorherigen Stand wieder erreicht hat. Eine ausführlichere Darlegung über den zeitlichen Verlauf der thermischen Nachwirkung und seine Beziehungen zu der chemischen Zusammensetzung des Glases soll in Bälde an einer anderen Stelle gegeben werden.

Endlich lässt sich auch, obwohl die Vergleichungen mit dem Luftthermometer bisher nur mittelbare und vorläufige gewesen sind, bereits erkennen, dass die Reductionen der Angaben von Thermometern aus »Jenenser Glas« auf das Luftthermometer kleiner und regelmässiger sind, als die entsprechenden Reductionen der Angaben der Thermometer aus gebräuchlichem Thüringer Glas. Die entsprechenden Reductionswerthe für die hier untersuchten französischen Thermometer (von Tonnelot) sind allerdings durchschnittlich noch etwas geringer, wogegen eine Reihe hier untersuchter englischer Thermometer sehr stark von dem bezüglichen Verhalten der Thermometer aus französischem und aus Jenenser Glas abweichen und auch einen weniger einfachen Verlauf der Reductionswerthe erkennen lassen.

Die nachfolgende Zusammenstellung enthält die vorläufigen Reductionen, wie sie sich durch die Vergleichung der Thermometer

Digitized by Google

mit dem an das Luftthermometer angeschlossenen Normalthermometer der Normal-Aichungs-Commission ergeben haben.

Bei Temperaturen in Centigraden	Reductionen auf die Angaben des Luftthermometers für Thermometer aus					
	Jenenser Glas			Thüringer Glas	französischem Glas	englischem Glas
	Nr. XIV^{m}	Nr. XVI^{m}	Nr. XVIII^{m}			
0	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00
+ 10	— 0.01	— 0.01	+ 0.01	— 0.03	— 0.02	+ 0.03
+ 20	— 0.07	— 0.05	— 0.02	— 0.11	— 0.06	0.00
+ 30	— 0.08	— 0.07	— 0.02	— 0.12	— 0.05	+ 0.02
+ 40	— 0.04	— 0.05	+ 0.01	— 0.08	— 0.02	+ 0.09
+ 50	+ 0.01			— 0.05		+ 0.14

Die Zahlen unter Thüringer Glas stellen Mittelwerthe für die gebräuchlichsten Thüringer Glassorten dar; ein anderes Thüringer Glas hatte folgende Reductionen auf die Angaben des Luftthermometers ergeben:

bei		
	0°	0°00
+	10	— 0.09
+	20	— 0.20
+	30	— 0.27
+	40	— 0.27

Bezüglich der Thermometer aus englischem Glase ist zu bemerken, dass die angegebenen Werthe Mittel aus Beobachtungen an vier Thermometern sind. Zwei derselben waren aus Krystallglas verfertigt, dessen Zusammensetzung in dem vorigen Berichte S. 847 angegeben ist, die beiden anderen waren Kew-Standards. Letztere zeigten in ihren Angaben und thermischen Eigenschaften eine so vollkommene Übereinstimmung mit denen der ersteren Art, dass man berechtigt ist, die Zusammensetzung des (Kew-) Glases als im Wesentlichen identisch mit jener des sogenannten Krystallglases, dessen Analyse in dem vorangehenden Aufsatze (Sitzungsberichte für 1884 Seite 843 ff.) gegeben ist, anzunehmen.

Die Analyse des Glases französischer von TONNELOT in Paris verfertigter Thermometer hat Folgendes ergeben:

Kieselsäure	70.96
Natron	12.02
Kali	0.56
Magnesia	0.40
Kalk	14.40
Thonerde und Eisenoxyd	1.44
Summe	99.78

Demnach zeigt das Glas vollständig die Zusammensetzung des gewöhnlichen Fensterglases. Die geringe Beimengung von Kali rührt offenbar von der für den Glassatz verwendeten Soda her.

Digitized by Google

Wenn, wie bei dieser Gelegenheit schliesslich noch bemerkt werden möge, die Unterschiede der Reductionen auf das Luftthermometer, welche an die Angaben von verschiedenen Thermometern aus den gebräuchlichen Glassorten anzubringen sind, wie wir oben gesehen haben, in der Nähe von + 30° bis + 40° bis zu $^1/_4$ Centigrad ansteigen können, so geht daraus hervor, dass eine grössere Gleichförmigkeit der Zusammensetzung des bei Thermometern anzuwendenden Glasmaterials auch in dieser Beziehung von grosser wissenschaftlicher und weittragender praktischer Bedeutung ist.

Zur Ergänzung unserer ersten Mittheilung über den erheblichen Einfluss, welchen das gleichzeitige Vorhandensein nahezu gleicher Mengen von Natron und Kali auf die thermischen Nachwirkungs-Erscheinungen ausübt, habe ich zu bemerken, dass auf Wunsch der Normal-Aichungs-Commission von Hrn. Dr. Schott in Jena noch eine Glassorte hergestellt worden ist, welche den gleichen Kalkgehalt, wie die a. a. O. S. 848 aufgeführten Glassorten Nr. IV und VIII aufweist, jedoch 7.5 Procent Kali und 7.5 Procent Natron enthält, während das Glas Nr. IV 13.5 Procent Kali und das Glas Nr. VIII 15 Procent Natron enthalten.

Es konnte nämlich der Schlussfolgerung jener ersten Mittheilung, wonach das nahezu in gleichem Betrage vorhandene Nebeneinander beider Alkalien einen entscheidend ungünstigen Einfluss auf die thermischen Nachwirkungs-Erscheinungen übt, entgegen gehalten werden, dass in der damals synthetisch hergestellten Glassorte Nr. XXII nicht bloss das Nebeneinander von Kali und Natron, sondern auch der grössere Gesammtantheil dieser beiden Bestandtheile und der entsprechend verminderte Antheil von Kalk ungünstig gewirkt haben könne.

Diese Folgerung wurde jedoch durch die damals gegebene Zusammenstellung der Analysen deutscher Thermometergläser nicht bestätigt, da in diesen die Verschiedenheiten des Kalkgehalts einen besonders erheblichen Einfluss auf die Nachwirkungs-Erscheinungen nicht erkennen lassen. Die Grösse der Nachwirkungen schien vielmehr von dem Gesammtgehalte an Kali und Natron nahezu unabhängig zu sein und allem Anschein nach lediglich in einer einfachen Beziehung zu dem Verhältnisse zwischen dem Natron- und dem Kaligehalte zu stehen. Immerhin überstiegen die bei der Anfertigung der in Rede stehenden Glassorte (XXII) zugelassenen Unterschiede in dem Kalkgehalt und in dem Gesammtgehalt an Alkalien die bei den übrigen Glassorten vorgefundenen Unterschiede.

Das auf Grund vorstehender Erwägungen hergestellte, mit Nr. XXIII bezeichnete Glas hat nunmehr im Allgemeinen die Folgerungen hinsichtlich des ungünstigen Einflusses nahezu gleichwerthigen Vorkommens von Kali und Natron bestätigt. Indessen lässt sich erkennen, dass

Digitized by Google

bei dem Glase Nr. XXII die sehr starke Verminderung des Kalkgehaltes doch nicht ohne Einfluss auf die ungünstige Steigerung der Nachwirkungen gewesen war.

Bei Glas Nr. XX^{III} hat sich nämlich die Depressionsconstante erheblich kleiner als bei Nr. XXII, indessen immer noch mehr als doppelt so gross herausgestellt als bei den Glassorten IV und VIII. Hieraus geht nunmehr völlig unzweifelhaft hervor, dass Kali und Natron bei der Zusammensetzung von Thermometerglas einander nur vollständig ersetzen dürfen, dass dagegen die theilweise Ersetzung von Natron durch Kali und umgekehrt, unter Festhaltung der übrigen Bestandtheile, in Betreff der thermometrischen Eigenschaften nur ungünstig wirkt, indem sie die Nachwirkungs-Erscheinungen steigert. Und zwar ist diese Steigerung nach den Darlegungen im vorigen Berichte um so grösser, je mehr sich das Verhältniss der Alkalien zu einander der Gleichheit nähert.

Zu dem obigen Ergebnisse, wonach das Glas Nr. XX^{III} mindestens die doppelte Grösse der Nachwirkung erkennen lässt wie die beiden Glassorten Nr. IV und VIII, ist übrigens noch zu bemerken, dass die Herstellung von Thermometern aus dem Glase Nr. XX^{III} erst ganz vor Kurzem ermöglicht worden ist, so dass die bei dieser Glassorte bis jetzt beobachtete Depressionsconstante noch nicht als der definitive Betrag angesehen werden kann. Vielmehr ist der Werth derselben offenbar noch im Steigen begriffen, obgleich das Altern auch dieser Thermometer durch die erwähnte Art der Behandlung thunlichst beschleunigt worden ist. Es haben sich nämlich im Mittel aus den Ablesungen bei zwei Thermometern aus dieser Glassorte der Zeitfolge nach für die Depressionsconstante nachstehende Grössen ergeben:

Datum	Depression für 100°
4. Juni 1885	0°10
8. Juni 1885	0.14
22. Juni 1885	0.15
24. Juli 1885	0.16
16. October 1885.....	0.17

Auch bezüglich des Ansteigens der Eispunkte hat diese Glassorte im Vergleich mit den beiden Nummern IV und VIII eine erheblich ungünstigere Beschaffenheit gezeigt. Innerhalb $3^1/_2$ Monaten betrug bei den Thermometern aus Glas XX^{III} der Anstieg des Eispunktes $0^{\circ}.13$, wohingegen bei den Thermometern aus Glas IV, bezüglich VIII innerhalb eines Jahres der Eispunkt nur um die Hälfte dieses Betrages angestiegen war.

Ausser den bisher erwähnten Glassorten sind nun in Jena theils in kleinerem, theils in grösserem Maassstabe im Ganzen noch zwanzig

Digitized by Google

andere Thermometergläser angefertigt und die aus denselben hergestellten Thermometer bei der Normal-Aichungs-Commission auf ihre Nachwirkung untersucht worden. Von den Ergebnissen dieser Untersuchungen sollen hier in der nachfolgenden Tabelle, welche sich an die in der ersten Abhandlung auf Seite 847 und 848 gegebenen Tabellen anschliesst, nur einige von allgemeinerem Interesse kurz aufgeführt werden, während eine ausführliche Mittheilung über die sämmtlichen Versuchsergebnisse an einem anderen Orte erfolgen wird.

Bezeichnung des Glases	Kieselsäure	Natron	Kali	Bleioxyd	Zinkoxyd	Kalk	Baryt	Lithiumoxyd	Thonerde	Borsäure	Depression für 100°
II	24	7	—	—	—	—	53	—	16	—	0°02
V	54	—	16	—	30	—	—	—	—	—	0.09
VII	51	—	—	3.7	27.7	—	—	6.5	1.8	9.3	0.10
IX	63	15	—	10	—	8	—	—	—	4	0.08
X	46	8	—	—	—	—	40	—	—	6	0.09
XI	65	—	18	—	—	—	—	—	5	12	0.09
XIX	50	15	—	—	20	—	15	—	—	—	0.07
XXIII	57	8	—	—	—	20	—	—	10	5	0.10
XXXI	66	11.1	16.9	—	—	6	—	—	—	—	1.03
XVII^{m}	69	15	10.5	—	—	—	—	—	5	—	1.06
XXII	66	14	14	—	—	6	—	—	—	—	1.05

Die zuletzt genannte Glassorte XXII, deren Zusammensetzung bereits im vorigen Berichte S. 848 angegeben wurde, ist des Vergleichs wegen hier nochmals aufgeführt worden. Ihre Depressionsconstante ist, wie auch aus der im Eingange gegebenen Tabelle ersichtlich, inzwischen von 0°84 auf 1°05 angewachsen.

Zum Schlusse sei mir noch gestattet, als das Ergebniss der oben dargelegten Untersuchungen hervorzuheben, dass wir in dem »Jenenser Glas« ein Material gewonnen haben, welches uns in den Stand setzt, Thermometer herzustellen, die auch den strengsten und weitest gehenden Anforderungen der Wissenschaft und Technik entsprechen. Es steht somit zu hoffen, dass es in Zukunft gelingen werde, der deutschen Thermometerfabrication wieder den sonst so wohlverdienten alten Ruf zu sichern.

Dieser Erfolg, welchem sich ein ähnlicher auf dem Gebiete der praktischen Optik schon anzuschliessen beginnt, wird wesentlich den HH. Prof. Abbe und Dr. Schott, sowie der Königl. Preussischen Staatsregierung, welche das ganze Unternehmen hochsinnigst unterstützt hat, zu verdanken sein.

Digitized by Google

51. Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen.

Von L. KRONECKER.

(Fortsetzung der am 30. April gelesenen Mittheilung.)

(Vorgetragen am 26. November; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLVIII]; — ausgegeben am 3. December.)

VII.

Am Schlusse des art. VI habe ich die Logarithmen der Vorzeichenwerthe von:

$$\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

für die Darstellung des Logarithmus des LEGENDRE'schen Zeichens verwendet. Diese Benutzung der Logarithmen beruht auf der Congruenz:

$$(\mathfrak{N}) \quad \frac{1}{\pi i}(\log a - \log|a|) \equiv \frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn}. a \equiv \tfrac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn}. a) \pmod 2,$$

welche offenbar für jede reelle Grösse a und für jeden der verschiedenen Werthe der Logarithmen Geltung hat, sowie auf der allgemeineren Congruenz:

$$(\mathfrak{N}') \qquad \frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn}. \prod_r a_r \equiv \tfrac{1}{2}\sum_r (1 - \operatorname{sgn}. a_r) \pmod 2 \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

welche aus jener unmittelbar folgt.

Die zweite der beiden Formeln, durch welche sich im art. IV die zwischen zwei Zahlen m, n bestehende Reciprocitäts-Beziehung ausgedrückt findet, nämlich die Formel:

$$(\mathfrak{R}') \quad \tfrac{1}{2}\sum_h\left(1 - \operatorname{sgn}. \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\sum_k\left(1 - \operatorname{sgn}. \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)\right) \equiv \tfrac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod 2,$$
$$\left(h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

deren Herleitung — wie im art. V erwähnt worden — den wesentlichen Inhalt des fünften GAUSS'schen Beweises bildet, erweist sich hiernach als völlig übereinstimmend mit der Congruenz:

$$(\overline{\mathfrak{R}}) \quad \frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn}. \prod_h \mathrm{R}\left(\frac{hm}{n}\right) \prod_k \mathrm{R}\left(\frac{kn}{m}\right) \equiv \tfrac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod 2,$$
$$\left(h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

Digitized by Google

welche nur eine logarithmische Umgestaltung der ersten jener beiden Formeln des art. IV, nämlich der dort mit (ℜ) bezeichneten Gleichung, ist. Da nun in der Herleitung eben dieser Gleichung (ℜ) — wie im art. V erwähnt worden — das Charakteristische des dritten Gauss'schen Beweises besteht, so enthüllt sich hiermit in überraschender Weise die eigentliche innere Beziehung jener beiden, von demselben Lemma ausgehenden Gauss'schen Beweismethoden und auch der wahre Grund dafür, dass die letztere der beiden Methoden sich bei der obigen Analyse (vergl. art. V) als die sachlich einfachste erwiesen hat. Indem nämlich beim Übergang zu den Logarithmen die Productformel (ℜ) sich auf eine Additionsformel (ℜ′) reducirt, können sich auch die zur Verification dienenden Mittel entsprechend vereinfachen.

Will man, auf eine solche Vereinfachung verzichtend, sich genau derselben Mittel für die Verification der Formel (ℜ′) bedienen, welche zum Beweise der Formel (ℜ) angewendet werden, so hat man nur in jeder einzelnen Gleichung, die im art. IV bei der Herleitung der Productformel (ℜ) vorkommt, den Übergang zu den Logarithmen zu machen. Auf diese Weise resultirt aus der Gleichung (𝔈) des art. II, mit Hülfe der Congruenz (ℜ′), die Formel:

$$(\mathfrak{O})\quad \frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn}.\mathrm{R}(a)\equiv \tfrac{1}{2}\sum_{g}\left(1-\operatorname{sgn}.\left(\tfrac{1}{2}g-a\right)\right)\pmod 2 \qquad (g=1,2,3,\ldots),$$

in welcher die Summation rechts wenigstens bis zu der Zahl $g=[2a]$ zu erstrecken ist. Gemäss dieser Formel, welche sich auch leicht direct verificiren lässt, ist:

$$\frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn}.\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\equiv \tfrac{1}{2}\sum_{g}\left(1-\operatorname{sgn}.\left(\frac{g}{2n}-\frac{h}{m}\right)\right) \qquad (g=1,2,\ldots n-1).$$

Werden nun, wie im art. IV, die graden und die ungraden Werthe von g gesondert, die einen mit $2k$, die anderen mit $n-2k$ bezeichnet, und die Glieder mit graden Werthen von g negativ genommen, so kommt:

$$(\mathfrak{P})\quad \frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn}.\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\equiv \tfrac{1}{2}\sum_{k}\operatorname{sgn}.\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_{k}\operatorname{sgn}.\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\pmod 2.$$
$$\left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

Ebenso wird:

$$(\mathfrak{Q})\quad \frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn}.\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)\equiv \tfrac{1}{2}\sum_{h}\operatorname{sgn}.\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_{h}\operatorname{sgn}.\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right)\pmod 2,$$
$$\left(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1)\right)$$

und durch Addition der Formeln (𝔓) und (𝔔) entsteht die Congruenz:

$$\frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn}.\prod_{h}\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\prod_{k}\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)\equiv\sum_{h,k}\operatorname{sgn}.\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)\equiv\tfrac{1}{4}(m-1)(n-1)\pmod 2,$$
$$\left(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

Digitized by Google

durch welche offenbar das Reciprocitätsgesetz für die quadratischen Reste ausgedrückt wird. Dieses ergiebt sich also hier durch eine »logarithmische Umgestaltung« des dritten GAUSS'schen Beweises. Denn ebenso wie es bei diesem dritten Beweise unmittelbar aus der Formel:

$$\operatorname{sgn.R}\left(\frac{hn}{m}\right)=\operatorname{sgn.}\prod_k\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)\qquad\left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

resultirt (vergl. art. IV), so folgt es hier aus der Congruenz:

$$\frac{1}{\pi i}\log\operatorname{sgn.R}\left(\frac{hn}{m}\right)\equiv\tfrac{1}{2}\sum_k\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_k\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\pmod 2,$$
$$\left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

welche oben mit (𝔓) bezeichnet ist.

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Congruenz stellt den Überschuss der Anzahl der positiven Werthe von:

$$\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\qquad\left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

über die Anzahl der positiven Werthe von:

$$\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\qquad\left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

dar. Die erstere Anzahl wird offenbar durch die dem Bruche $\frac{hn}{m}$ zunächst liegende ganze Zahl, die letztere aber durch die Zahl $\left[\frac{hn}{m}\right]$ gegeben; jener Überschuss ist also gleich:

$$\tfrac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn.R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right)$$

und also, gemäss der Relation (𝔑), in der That dem Werthe von:

$$\frac{1}{\pi i}\log\operatorname{sgn.R}\left(\frac{hn}{m}\right)$$

nach dem Modul 2 congruent. Die Congruenz (𝔓) ist hiermit direct arithmetisch erwiesen.

VIII.

Ein Beweis des Reciprocitätsgesetzes, welcher von Hrn. A. GENOCCHI schon im November 1852 der Brüsseler Akademie überreicht, bald darauf in deren Abhandlungen publicirt und neulich wieder in Erinnerung

Digitized by Google

gebracht worden ist,[1] geht davon aus, dass der Überschuss der Anzahl der positiven Werthe von:

$$\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2mn} \qquad \left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

über die Anzahl der positiven Werthe von:

$$\frac{h}{m}-\frac{k}{n} \qquad \left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

gleich $\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn}.\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right)$ ist. Es wird dies a. a. O. nachgewiesen und die obige Congruenz $(\mathfrak{R}')$ daraus erschlossen.

Um diesen Genocchi'schen Beweis zu analysiren, bemerke ich zuvörderst, dass für positive Werthe von $\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2mn}$ offenbar auch $\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}$ positiv ist. Jene Grundlage des Genocchi'schen Beweises kann also durch die Formel:

$$(\mathfrak{R})\quad \tfrac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn}.\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right)=\tfrac{1}{2}\sum_{k}\operatorname{sgn}.\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_{k}\operatorname{sgn}.\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)$$
$$\left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right),$$

ausgedrückt werden, welche am Schlusse des art. VII auf kürzestem Wege hergeleitet worden ist, und aus welcher sich die oben mit $(\mathfrak{R}')$ bezeichnete Congruenz:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{h}\left(1-\operatorname{sgn}.\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right)+\tfrac{1}{2}\sum_{k}\left(1-\operatorname{sgn}.\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)\right)\equiv\tfrac{1}{4}(m-1)(n-1)\pmod 2$$
$$\left(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1);\ \ k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

unmittelbar ergiebt. Für den Modul 2 sind aber die Werthe von:

$$\tfrac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn}.\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right),\quad \frac{1}{\pi i}\log\operatorname{sgn}.\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$$

einander congruent; die Genocchi'sche Beweismethode kommt daher mit jener, welche im art. VII entwickelt worden ist, völlig überein, und sie ist daher selbst als eine »logarithmische Umgestaltung« des dritten Gauss'schen Beweises zu charakterisiren.

Da für den Beweis des Reciprocitätsgesetzes nur der nach dem Modul 2 genommene Congruenzwerth von $\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn}.\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right)$ in Betracht

[1] Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Tome 90 p. 300, Séance du 16 février 1880; Tome 101, p. 425, Séance du 10 août 1885.

Digitized by Google

kommt, so kann die Grundlage des GENOCCHI'schen Beweises — ebenso wie durch die Gleichung (ℜ) — auch durch die Congruenz:

$$(\mathfrak{P})\quad \frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) \equiv \tfrac{1}{2}\sum_{k}^{(k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1))} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\sum_{k}^{(k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1))} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right) \pmod 2,$$

dargestellt werden. Diese Congruenz resultirt aber unmittelbar aus den EISENSTEIN'schen Entwickelungen, wenn man in der daraus hervorgehenden Gleichung:[1]

$$\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) = \operatorname{sgn.} \sin\frac{2hn\pi}{m} = \operatorname{sgn} \prod_{k}^{(k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1))} \left(\sin\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{2h\pi}{m}\right)$$

jeden Factor:

$$\sin\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{2h\pi}{m}$$

durch das Product:

$$\sin\left(\frac{h\pi}{m}-\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{h\pi}{m}+\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right)$$

ersetzt und alsdann zu den Logarithmen übergeht. Doch hat, wie ich hinzufügen muss, Hr. GENOCCHI die Grundlage seines Beweises keineswegs den EISENSTEIN'schen Entwickelungen entnommen, sondern unabhängig von diesen — die ihm zur Zeit der Redaction seiner Abhandlung noch unbekannt waren[2] — auf rein arithmetischem Wege selbständig gefunden.

Ich bemerke noch, dass mich Hr. STERN auf eine Formel aufmerksam gemacht hat, welche er im 59. Bande des Journals für Mathematik (S. 154, letzte Zeile) hergeleitet hat, und welche in dem speciellen Falle, wo n Primzahl ist, mit der am Schlusse des art. VI hervorgehobenen Formel genau übereinstimmt.

---

[1] Journal für Mathematik Bd. 29, S. 178 und 179.

[2] Vergl. den Schluss der GENOCCHI'schen Mittheilung in den Comptes Rendus vom 10. August 1885.

Digitized by Google

Digitized by Google

52. Über die Fortpflanzung der Gürtelthiere.

Von Hermann v. Jhering,
Naturalista des brasilianischen Reichsmuseums.

(Eingesandt mit Schreiben d. d. Rio grande, Prov. Rio grande do Sul, 25. September 1885; — vorgelegt von Hrn. Waldeyer am 26. November; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLVIII]; — ausgegeben am 3. December.)

Schon im vorigen Jahrhundert theilte Azara mit, dass von dem in Paraguay und Argentinien lebenden Gürtelthiere *Praopus hybridus* Desm. die einheimische Bevölkerung behaupte, dasselbe bringe bei jedem Wurfe stets nur Junge eines Geschlechtes zur Welt. Auch Burmeister (Description physique de la République Argentine. Vol. III. 1879 p. 433) erwähnt dieser Sage, aber weder er noch andere Zoologen haben sich selbständig mit der Frage befasst. Da auch mir die gleiche Behauptung hier begegnete und die Mulita, eben der *Praopus hybridus*, hier nicht selten ist, so nahm ich mir vor, die Angelegenheit zu studiren, und es war mir möglich zweimal trächtige Weibchen zu erhalten. In beiden Fällen traf ich acht Foetus im Uterus, welche jedesmal nicht nur alle auf absolut gleicher Entwickelungsstufe standen, sondern auch alle das gleiche Geschlecht hatten. Es waren in beiden Fällen männliche Embryonen, deren Penis noch in dem ersten, ein erheblich jüngeres Entwickelungsstadium repraesentirenden Falle schon die typische, am Ende etwas dreilappige Form, welche für diese Art charakteristisch ist, aufwies. Bei dem zweiten Thiere war der Penis der Foetus schon fertig entwickelt, das *orificium urethrae* offen, ein Irrthum in der Bestimmung des Geschlechtes daher unmöglich. Was aber mehr als der positive Befund der Übereinstimmung des Geschlechtes aller Jungen mein Interesse in Anspruch nahm, war das Verhalten der Eihäute, welches zugleich die Erklärung für die Verhältnisse lieferte. Es zeigte sich nämlich, dass zwar jede Frucht ihr eigenes Amnios besass, alle zusammen aber nur ein einziges gemeinsames Chorion.[1] Das letztere ist glatt und liegt lose der Uteruswand an, nur im oberen Theil des Uterus, nahe dessen Fundus, besteht ring-

[1] Es liegen hier also dieselben Verhältnisse vor, wie sie Kölliker bezüglich der Eihäute von *Dasypus (Praopus) novemcinctus* beschrieben hat. (Entwickelungsgeschichte II. Aufl. S. 362.) Über das Geschlecht der Foeten findet sich daselbst keine Angabe. Waldeyer.

Digitized by Google

förmig eine Verwachsung der Uterusschleimhaut mit der hier in's Chorion eingeschalteten Placenta. Es besteht hier eine ringförmige Placenta, die aber mit der gleichnamigen der Raubthiere nichts gemein hat, indem sie eine *Placenta annularis composita* ist. Jede der acht scheibenförmigen Placenten stösst mit den Rändern der zwei nächsten zusammen, alle gemeinsam bilden dann den zur Längsaxe des Uterus senkrecht stehenden Ring. Im jüngeren Stadium (Chorionblase 70 Mm. Durchmesser) war die Verwachsung eine sehr innige, im späteren eine lockere und glaube ich nach dem Befunde annehmen zu müssen, dass die Decidua schon lange vor der Geburt sich von der übrigen Uterusschleimhaut absondert und in fester Verbindung mit der *Placenta foetalis* bleibt, wie das nach meinen allerdings erst wenig umfassenden Erfahrungen (*Felis, Mephitis* — mit nicht ringförmiger Placenta, da ein etwa $^1/_5$ des Ringes einnehmender Theil nur braun pigmentirte freie Zotten trägt, aber nicht zur Placenta entwickelt ist) auch bei den Raubthieren der Fall zu sein scheint. Die südamerikanischen Edentaten dürften daher wohl alle zur Gruppe der Deciduaten gehören. Noch bemerkt sei, dass ausser den mit Amnios versehenen acht Foeten im ersten Falle noch vier linsen- bis bohnengrosse Keimblasen im Chorionsacke eingeschlossen waren, von denen die grösste einen verkümmerten Embryo enthielt. Drei derselben waren kettenförmig an einander gereiht.

Näher auf Einzelheiten einzugehen liegt mir in dieser ersten vorläufigen Mittheilung fern, nur noch auf eine mir auffällige Beobachtung aus der Embryologie der Edentaten möchte ich hinweisen. Die langen, zum Theil enormen Krallen, welche die Gürtelthiere und Ameisenbären auszeichnen, entstehen nämlich nicht wie diejenigen der Raubthiere als äusserlich freie über die Spitze der Endphalange hervorragende Theile, sondern werden im Innern einer völlig anders gebauten, breiten foetalen Endphalange angelegt, wie ich das an Foeten von *Myrmecophaga tetradactyla* wie von *Praopus hybridus* beobachten konnte. Bei weit entwickelten Foeten der letzteren Art mit bereits geöffneten Augen, aber durch eine zarte Membran verschlossenen Nasenlöchern, ist das Ende der Finger und Zehen breit, etwas dreilappig und plump, so dass man eher meinen möchte, es mit dem Foetus eines Hufthieres zu thun zu haben, als mit dem eines Tatu. Durch die Endphalange sieht man die im Innern bereits angelegte Kralle durchschimmern, deren morphologische Bedeutung erst eingehendere Studien erweisen können. Jedenfalls aber liegt hier ein interessanter Fall von Atavismus vor, für dessen Erklärung darauf hingewiesen sei, dass die Endphalangen der fossilen Vorläufer unserer Tatus, der Glyptodonten, nicht sichelförmig, sondern breit, kurz und plump, und, wie

Digitized by Google

ich vermuthen möchte, von einer klauen- oder hufförmigen Hornscheide im Leben überzogen waren. Gleichviel ob diese Annahme zutreffe oder jene Burmeister's von einem »callo terminal«, sicher lag die Endphalange im Innern eines breiten Zehengliedes, wie schon ihre zahlreichen Gefässöffnungen beweisen. Zu dem völlig abweichenden Verhalten der mit mächtiger Sichelkralle versehenen lebenden Gürtelthiere schlägt aber die foetale Ausbildung des Praopusfusses die Brücke. So viel mir bekannt, liegen über diese sonderbare Metamorphose des Armadillfusses bisher keine Angaben vor.

Digitized by Google

Digitized by Google

53. Über die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes im Eisen.

Von A. KUNDT
in Strassburg i. E.

Zweite Mittheilung.

(Vorgelegt am 12. November; — gedruckt im Bericht vom 26. November [St. XLVIII]; — ausgegeben am 3. December.)

Abhängigkeit der Drehung von der Intensität des Magnetfeldes.

In meiner ersten Mittheilung über die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes im Eisen, Cobalt und Nickel habe ich gezeigt, dass diese Metalle ein positives Drehvermögen besitzen. Die Drehung ist im Vergleich zu derjenigen, welche andere magnetische oder diamagnetische Substanzen zeigen, ausserordentlich gross. Am Schluss habe ich bereits auf einige weitere Fragen, die sich an die bisherigen Versuche anschliessen, hingewiesen. Die wichtigste derselben schien mir die nach der Abhängigkeit der Drehung von der Stärke der magnetisirenden Kräfte zu sein. Man nimmt an, dass bei einer diamagnetischen und einer schwach magnetischen Substanz die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene für eine bestimmte Wellenlänge und bestimmte Länge der durchstrahlten Schicht in einem homogenen magnetischen Feld proportional ist der Componente der magnetischen Kraft nach der Richtung der Strahlen, oder wenn diese mit der Richtung der magnetischen Kraftlinien zusammenfallen, proportional der Intensität des Magnetfeldes. Die Drehung, welche die Längeneinheit einer Substanz in einem Feld von der absoluten Intensität Eins hervorbringt, wenn die Lichtstrahlen und Kraftlinien dieselbe Richtung haben, hat man die Constante der Drehung dieser Substanz oder die VERDET'sche Constante derselben genannt. Ebenso wie die Drehung ist auch, soweit bisher die Versuche reichen, der in einem diamagnetischen oder schwach magnetischen Medium inducirte Magnetismus den magnetisirenden Kräften proportional, mithin kann man auch kurz sagen, es ist für diese Körper die Drehung auf

Digitized by Google

jedem Wegelement proportional der nach demselben geschätzten Componente des magnetischen Moments an dem betreffenden Ort.

Für Eisen, Cobalt und Nickel ist aber der inducirte Magnetismus nicht proportional der magnetisirenden Kraft, sondern wächst, wenigstens beim Eisen, zuerst schneller als diese, dann langsamer, um endlich bei einer bestimmten magnetisirenden Kraft einen Maximalwerth zu erreichen, der bei weiterem Anwachsen der ersteren constant bleibt.

Es fragt sich, ist die Drehung im Eisen der jeweiligen Magnetisirung desselben oder der magnetisirenden Kraft proportional? Wie von vornherein zu erwarten war, zeigten die Versuche bald, dass die Drehung nicht der magnetisirenden Kraft proportional blieb, sondern mit Anwachsen dieser einen Grenzwerth erreichte, der nicht überschritten wurde. Damit verliert die VERDET'sche Constante für Eisen ihre Bedeutung. Man kann auch nicht mehr, wie ich es in meiner ersten Mittheilung gethan habe, von einer specifischen Drehung des Eisens sprechen, wenn man unter dieser Bezeichnung ein für alle magnetisirenden Kräfte constantes Verhältniss der Drehung im Eisen zu derjenigen in einer anderen Substanz, etwa Wasser oder Schwefelkohlenstoff versteht.

Das Vorhandensein eines Maximalwerthes der Drehung in einer Eisenschicht giebt aber Veranlassung eine andere Constante einzuführen. Sollte sich durch die Versuche ergeben, dass bei verschieden dicken Eisenschichten der Maximalwerth der Drehung proportional ist der durchstrahlten Schicht, so ist der Quotient aus der Maximaldrehung und der Dicke der drehenden Schicht, d. h. die Maximaldrehung, welche auf die Längeneinheit erfolgt, jedenfalls als ein das magnetooptische Verhalten des Eisens charakterisirender Werth zu betrachten. Es wird unten angegeben, in wie weit die Versuche bisher berechtigen, eine Proportionalität zwischen Schichtendicke und Drehung anzunehmen. — Ausserdem schien es mir wichtig zu untersuchen, wie mit wachsender Intensität des Feldes die Drehung im Eisen bis zum Maximum zunimmt und bei welcher Intensität des Feldes das Maximum erreicht wird. Ausgedehntere Versuche habe ich bisher nur mit Eisen anstellen können; Nickel und Cobalt verhalten sich im Allgemeinen wie Eisen; um die Unterschiede im Verhalten der drei Metalle genau festzustellen, bedürfte es weiterer Versuchsreihen, da die Versuche sich indess bequem nur mit Sonnenlicht anstellen lassen, müssen dieselben auf den Sommer verschoben werden.

Ich erlaube mir daher im Anschluss an meine erste Mittheilung die bisher erhaltenen Resultate der Akademie nachfolgend vorzulegen. An diese Mittheilung knüpfe ich sodann noch einige Bemerkungen über das negative Drehvermögen der Lösungen magnetischer Salze.

Digitized by Google

Anordnung der Versuche.

Die Eisenschichten wurden, wie früher angegeben, galvanoplastisch auf platinirtem durchsichtigem Glas hergestellt. Das zu benutzende Glas erhielt ich von Hrn. LOHMANN in Berlin, der mir grössere Platten ganz dünnen Glases, wie es für Mikroskopdeckgläser benützt wird, platinirte. Das Glas mit Platin drehte ohne Eisenschicht in den stärksten von mir benutzten Feldern nur zwischen 20 und 30 Minuten. Der benutzte Elektromagnet war, wie früher, ein RUHMKORFF'scher gewöhnlicher Construction. Den Strom für denselben lieferte eine GRAMME'sche Maschine. Die Stromintensität wurde durch eingeschaltete Widerstände geändert. Das Feld zwischen den conischen Polen des Elektromagneten ist in grösserer Ausdehnung durchaus nicht als homogen zu betrachten; in dem kleinen Raum zwischen den beiden Durchbohrungen der Pole ist die Intensität des Feldes aber hinreichend gleichmässig, und dieser kleine Raum kommt lediglich zur Verwendung.

Um die Stärke des Feldes zu erhalten, wurde jedesmal die Drehung der Polarisationsebene in einem bestimmten Stück Glas gemessen. Ist einmal das Drehvermögen dieses Glasstückes mit der Drehung in Wasser oder CS_2 verglichen, so ist mit Hülfe der VERDET'schen Constante für diese Medien die Stärke des Magnetfeldes in jedem Fall in absolutem Maass zu berechnen.

Das betreffende Glasstück und der zu untersuchende Eisenspiegel befanden sich vertical über einander auf einem unter den Polen fest angebrachten Stativ, welches allseitige leichte Justirung der Platten erlaubte. Mit Hülfe eines kleinen Triebs mit Zahnstange konnte ohne Verrückungen schnell und leicht hintereinander bald das Glas, bald der Eisenspiegel zwischen die Pole gebracht werden. Dabei war dafür gesorgt, dass in einer Versuchsreihe immer genau wieder dieselbe Stelle der Eisenschicht zwischen die Pole kam. Diese Vorsicht ist nöthig, da die benutzten Spiegel an verschiedenen Stellen oft ziemlich erheblich verschiedene Dicke besassen. Selbstverständlich wurde ausserdem noch die Drehung in einem Theil des platinirten Glases bestimmt, welcher nicht mit Eisen belegt war, und wurde diese Grösse dann von der Drehung abgezogen, welche das mit Eisen bedeckte Glas gab, um die Drehung im Eisen allein zu erhalten.

Als Lichtquelle diente die Sonne, deren Strahlen vor dem Eintritt in den polarisirenden Nicol durch ein rothes Glas gingen. Die Mitte der durch das Glas in erheblicher Intensität gehenden Strahlen entsprach ziemlich genau der FRAUNHOFER'schen Linie *C*.

Für die Bestimmung der Intensität des Feldes in absolutem Maass dienten die folgenden Daten. Die Glasplatte, in welcher die Drehung

Digitized by Google

beobachtet wurde, hatte eine Dicke von $0^{cm}.3651$. Das Verhältniss der Drehung in diesem Glas zu derjenigen in einer gleich dicken Wasserschicht ergab sich gleich 1.240. Wird die VERDET'sche Constante für Wasser und Natronlicht in Winkelwerth nach Hrn. ARONS gleich 0.01295 Minuten genommen, und nimmt man das Verhältniss der Drehung des Wassers für die Linie *C* zu derjenigen für *D* nach VERDET gleich 0.8, so ergiebt sich als VERDET'sche Constante für das benutzte Glas und rothes Licht in Winkelmaass $0'.01285$.

Bei den Versuchen wurde in dem Glas immer die doppelte Drehung bei Stromumkehr bestimmt, es entspricht mithin für das $0^{cm}.3651$ dicke Glas ein Grad Drehung bei Stromwechsel einem Feld von 6391 oder abgerundet von 6400 $cm^{-\frac{1}{2}} gr^{\frac{1}{2}} sec^{-1}$. Mit dieser Zahl sind aus den in Glas beobachteten Drehungen im Folgenden die absoluten Intensitäten des magnetischen Feldes zwischen den Polen berechnet worden.

Die Beobachtungen.

Die folgende Tabelle enthält die mit drei Spiegeln verschiedener Dicke angestellten Beobachtungen.

Ich bemerke dazu, dass die Maximaldrehung des Spiegels Nr. III noch nicht die grösste ist, die ich überhaupt beobachten konnte. War das Sonnenlicht recht intensiv, so liessen noch Eisenschichten hinreichend Licht für die Beobachtung durch, welche so dick waren, dass ich eine Maximaldrehung von etwa 12° erhielt.

Tabelle 1.

Abhängigkeit der Drehung im Eisen von der Intensität des magnetischen Feldes.

Drehung in Glas in Graden	Intensität des magnetischen Feldes. Dimension: $cm^{-\frac{1}{2}} gr^{\frac{1}{2}} sec^{-1}$	Drehung in Eisen in Graden
	Spiegel Nr. I.	
0°.69	4420	1°.72
1.26	8060	3.47
2.20	14100	4.41
2.89	18500	4.45
4.71	30100	4.36

Digitized by Google

Drehung in Glas in Graden	Intensität des magnetischen Feldes. Dimension: $cm^{-\frac{1}{2}}\ gr^{\frac{1}{2}}\ sec^{-1}$	Drehung in Eisen in Graden
	Spiegel Nr. II.	
0°64	4100	2°40
1.06	6780	4.15
2.99	19100	7.38
3.22	20600	7.54
4.46	28500	7.48
	Spiegel Nr. III.	
0°72	4610	3°58
1.47	9410	6.34
2.18	14000	8.82
2.85	18200	9.67
4.56	29200	9.71

Die Maximaldrehung der Längeneinheit.

Für sechs Spiegel wurde die Dicke der galvanoplastischen Eisenschicht durch Wägung bestimmt, um die Maximaldrehung für die Längeneinheit der durchstrahlten Schicht zu erhalten. Man kann nicht darauf rechnen, diesen Werth sehr genau zu bekommen, denn obgleich die Wägungen möglichst sorgfältig mit zwei verschiedenen Waagen ausgeführt wurden, bleibt die genaue Ermittelung der sehr kleinen Gewichtsdifferenzen doch immer etwas unsicher. Das Gewicht der zwischen 6 und 10 ^{qcm} grossen Eisenschichten betrug nur zwischen 0.275 und 1.35 Mgr. Sodann haben die galvanoplastischen Überzüge sehr selten an allen Stellen gleiche Dicke. Man erhält durch die Wägung also nur die mittlere Dicke der Schichten, nicht diejenige der Stellen, an denen die optische Beobachtung vorgenommen wird. Um den hieraus entspringenden Fehler, der sehr bedeutend sein kann, wenigstens etwas zu mindern, wurde bei den meisten gewogenen Spiegeln die Maximaldrehung an verschiedenen Stellen derselben bestimmt und aus den erhaltenen Werthen das Mittel genommen. Die zweite Columne der folgenden Tabelle 2 enthält diese Mittelwerthe, die erste die durch Wägung bestimmte Dicke der Eisenschicht, und die dritte die Werthe, welche die Division der Zahlen der zweiten Columne durch die der ersten ergiebt.

Digitized by Google

Tabelle 2.

Maximaldrehung beim Durchgang des Lichtes durch Eisen.

Dicke der Eisenschicht in Centimetern	Beobachtete Maximaldrehung in Graden	Maximaldrehung für ein Centimeter in Graden
0.00000419	1°66	396000°
0.00000592	2.00	338000
0.00000759	3.20	422000
0.00001025	4.97	485000
0.00001148	5.38	467000
0.00002123	8.51	401000
		Mittel: 418000°

Die Werthe für die Drehungen der Längeneinheit weichen aus den oben angegebenen Gründen stark von einander ab, es ist indessen eine Abhängigkeit derselben von der Dicke der Schicht nicht zu erkennen und ist jedenfalls in erster Annäherung die Maximaldrehung der durchstrahlten Schicht proportional zu setzen. Das Mittel der Werthe der dritten Columne ist 418000°.

Es ist also die einfache Drehung in einem Centimeter Eisen, welches bis zum Maximum magnetisirt ist, abgerundet gleich

200000°

oder die Maximaldrehung beträgt in Bogenmaass in 0.01 Mm. etwas mehr als π.

Dieses Maximum der Drehung wird erreicht, wie die Zahlen der Tabelle 1 und die Curven zeigen, in einem Felde von ungefähr $20000\ \mathrm{cm}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{gr}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}^{-1}$. Bei Vergrösserung der Intensität des Feldes steigt die Drehung nur noch unmerklich.

Von Wichtigkeit wäre es gewesen, ebenso wie die Drehung, das magnetische Moment der Eisenschichten als Function des Feldes zu bestimmen, um zu sehen, ob und wie weit wirklich die Drehung der Magnetisirung proportional ist. Ich habe bisher keine einfache Methode finden können, den Magnetismus der Eisenschichten in der Lage, in welcher sie sich für Beobachtung der Drehung zwischen den Polen befinden, zu bestimmen. Hängt man die Spiegelchen so zwischen den Polen auf, dass ihre Längsrichtung mit den magnetischen Kraftlinien zusammenfällt und mithin die Normale auf die spiegelnde Fläche zu den Kraftlinien senkrecht ist, so ist die Bestimmung des magnetischen Moments nicht schwierig. Versuche, die in meinem Laboratorium ausgeführt werden, ergeben, dass in diesem Fall schon in einem Feld von etwa 2000 das Maximum des magnetischen Moments

Digitized by Google

auftritt. Aus der Magnetisirung der Spiegel in axialer Lage, bei der die Spiegel longitudinal magnetisirt werden, lässt sich aber Nichts schliessen über diejenige, welche eintritt, wenn die Spiegel, wie bei Beobachtung der Drehung, sich in aequatorialer Lage befinden, also transversal magnetisirt werden.

Der Magnetismus des Eisens wächst ferner bekanntlich anfangs schneller als die magnetisirenden Kräfte. Ob das gleiche für die Drehungen gilt, lässt sich aus den vorliegenden Beobachtungen nicht mit Bestimmtheit entscheiden. Der Verlauf der Curven, welche die Beobachtungen mit den Spiegeln I und II ergeben, scheint auf das Vorhandensein eines Wendepunktes in dem aufsteigenden Ast hinzudeuten, doch bedürfte es, um das Vorhandensein eines solchen sicher nachzuweisen, weiterer Versuche.

Reflexion des Lichtes.

Auch bei senkrechter Reflexion des Lichtes von einem magnetisirten Eisenspiegel ist die Drehung der Intensität der magnetisirenden Kräfte nicht proportional, sondern erreicht beim Wachsen letzterer einen Maximalwerth. Ich gebe nachstehend eine Beobachtungsreihe mit dem oben mit Nr. III bezeichneten Spiegel. Die Beobachtungen geschahen in der in meiner ersten Mittheilung angegebenen Weise, nur wurde statt der unter 45° geneigten Glasplatte ein durchbohrter Metallspiegel benutzt, wie es dort auch schon angegeben ist. Die Intensisät des Feldes wurde wie oben durch Beobachtung der Drehung in der Glasplatte gemessen.

Tabelle 3.

Abhängigkeit der Drehung von der Intensität des magnetischen Feldes bei Reflexion des Lichtes von Eisen.

Drehung in Glas	Intensität des magnetischen Feldes	Drehung am Eisen
	Spiegel Nr. III.	
0°78	4990	— 0°27
1.68	10800	— 0.55
2.59	16600	— 0.62
3.10	19800	— 0.66
4.73	30300	— 0.67

Man sieht, dass ebenfalls bei einem Feld von etwa 20000 die Drehung ihren Maximalwerth erreicht.

Digitized by Google

Ich habe noch zahlreiche andere Versuche über die Drehung bei Reflexion angestellt, auf die ich hier aber nicht eingehen will. Hervorheben will ich nur, dass der Maximalwerth der Drehung bei senkrechter Reflexion einmal von der Dicke der benutzten Spiegel, dann aber in hohem Maasse von der Oberflächenbeschaffenheit derselben abhängt.

Die Spiegel sind häufig mit einer sehr dünnen Oxydschicht überzogen. Diese Schicht, die für den Durchgang des Lichtes ohne Bedeutung ist, kann die Drehung bei der Reflexion erheblich modificiren. Ich habe mich hiervon direct überzeugt, indem ich Eisen-, Cobalt- und Nickelspiegel »anlaufen« liess, das heisst durch Erwärmen eine Oxydschicht auf denselben erzeugte. Man erhält leicht jede gewünschte »Anlassfarbe«. Solche angelassene Spiegel zeigen bei senkrechter Reflexion des Lichtes, wenn sie magnetisirt werden, die mannigfachsten Erscheinungen. Zuweilen tritt eine sehr starke Drehung der Polarisationsebene ein, zuweilen ist das reflectirte Licht stark elliptisch, so dass beim Drehen des analysirenden Nicols nur unbedeutende Helligkeitsdifferenzen auftreten. Wird durch Erwärmen die Eisenschicht in ihrer ganzen Dicke in Oxyd verwandelt, so wird überhaupt keine Drehung mehr beobachtet.

Dies complicirte Verhalten der oberflächlich oxydirten Spiegel erklärt sich folgendermaassen. Die das Metall bedeckende Oxydschicht ist durchsichtig und dreht die Polarisationsebene des durchgehenden Lichtes nicht merklich. Ein Theil des normal auffallenden geradlinigen Lichtes wird an der Vorderfläche der Oxydschicht reflectirt, ein zweiter Theil wird an der Grenzfläche von Oxyd und Metall reflectirt. Bei dieser Reflexion tritt die magnetische Drehung der Polarisationsebene ein. Beide reflectirten Strahlenpartien interferiren nach der Reflexion mit einander. Der Schwingungszustand, welcher aus der Interferenz resultirt, hängt ab einmal von dem Gangunterschied, den die beiden Strahlen durch die Oxydschicht erhalten haben, zweitens von der Drehung, die die Polarisationsebene des einen interferirenden Bündels an der Grenzschicht von Oxyd und Metall erfahren hat. Es ist leicht ersichtlich, dass selbst bei kleiner elektromagnetischer Drehung der Polarisationsebene und beliebig gewähltem Gangunterschied, sehr verschiedene Schwingungszustände des reflectirten interferirenden Lichtes resultiren können. Will man aus Versuchen über Drehung bei Reflexion des Lichtes von elektrolytisch hergestellten Spiegeln allgemeine Schlüsse ziehen, so bedarf es mithin der grössten Vorsicht, da sehr dünne Oxydschichten die Resultate schon erheblich beeinflussen können.

Digitized by Google

Bemerkung über die negative Drehung der Lösungen magnetischer Salze.

Als VERDET nachgewiesen hatte, dass concentrirte Eisenchloridlösungen eine negative Drehung zeigen, d. h. eine Drehung, deren Richtung entgegengesetzt derjenigen ist, welche eine diamagnetische Substanz in dem betreffenden magnetischen Feld zeigen würde, und dass eine Anzahl Salze magnetischer Metalle wenigstens die positive Drehung des Lösungsmittels vermindern, schien bezüglich der elektromagnetischen Drehung ein Gegensatz zwischen magnetischen und diamagnetischen Substanzen aufgefunden, der für unsere Anschauungen über das Wesen des Magnetismus und Diamagnetismus nicht ohne Bedeutung sein konnte. Darauf bezüglich sagt MAXWELL, nachdem er das negative Drehvermögen des Eisenchlorids besprochen hat:

This shews that the difference between ferromagnetic and diamagnetic substances does not arise merely from the magnetic permeability being in the first case greater and in the second less than that of air, but that the properties of the two classes of bodies are really opposite.[1]

Er fügt freilich gleich hinzu, dass nicht alle magnetischen Substanzen negativ, und alle diamagnetischen positiv drehen; das neutrale chromsaure Kali, welches diamagnetisch ist, zeigt z. B. negative Drehung.

Die obige Schlussfolgerung MAXWELL's und alle Bestrebungen das negative Drehvermögen einer Anzahl von Salzen magnetischer Metalle durch die negative Drehung der in ihnen enthaltenen magnetischen Atome zu erklären, sind durch den Nachweis, dass Eisen, Cobalt und Nickel selbst positiv drehen, hinfällig geworden. Um so auffallender bleibt der Gegensatz im Verhalten der Eisensalze zu dem des Eisens.

Ich möchte nun hier auf eine Thatsache hinweisen, die vielleicht später zum Ausgangspunkt einer Erklärung der elektromagnetischen Drehung in den Salzen dienen kann.

Alle bisher untersuchten chemisch einfachen Körper, seien sie stark magnetisch oder stark diamagnetisch, zeigen positive elektromagnetische Rotation; negative Drehung geben nur chemisch zusammengesetze Körper.

Von Elementen, für die positive Drehung constatirt ist, führe ich die folgenden 11 an: *Fe, Co, Ni, Br, Se, S, P, C* (Diamant), *O, N, H.* Die Reihe enthält die am stärksten magnetischen Elemente und stark

[1] MAXWELL: Electricity and Magnetism. Second Edition. Vol. II. p. 412.

Digitized by Google

diamagnetische, wie Schwefel und Selen. Für die anderen Elemente ist der Sinn der Drehung nicht ermittelt, und wird für den grössten Theil derselben, da sie sehr undurchsichtig sind und voraussichtlich nur geringes Drehungsvermögen besitzen, auch kaum experimentell festzustellen sein. Negative Drehung zeigen ferner nur solche chemische Verbindungen, in denen Atome stark magnetischer Elemente enthalten sind, wie Eisensalze u. s. w. Es ist daher allerdings zu vermuthen, dass diese Atome das Bedingende für die negative Drehung sind. So lange wir aber durchaus keine Kenntniss davon haben, wie eine magnetisirende Kraft auf die einzelnen Atome eines Molecules wirke, wie die Atome im Molecul sich gegenseitig magnetisch beeinflussen, wird auch nichts Bestimmtes über die Abhängigkeit der Drehung der Polarisationsebene von der Zusammensetzung der Körper ausgesagt werden können. Schliesslich will ich noch bemerken, dass nach Versuchen, welche Hr. Stscheglajeff in meinem Laboratorium angestellt hat, auch bei Eisenchloridlösungen die Drehung der Intensität des Feldes nicht proportional ist, und Versuche mit Lösungen anderer magnetischer Salze, welche ich zur Zeit ausführen lasse, scheinen zu dem gleichen Resultat zu führen.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

INHALTSVERZEICHNISS

		Seite
48.	G. Kirchhoff: Zur Theorie der Gleichgewichtsvertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln	615
49.	v. Lendenfeld: Beitrag zur Kenntniss des Nerven- und Muskelsystems der Hornschwämme	623
50.	Wiebe: Über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Nachwirkungs-Erscheinungen bei Thermometern	629
51.	Kronecker: Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen	637
52.	v. Jhering: Über die Fortpflanzung der Gürtelthiere	643
53.	Kundt: Über die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes im Eisen	647

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE
aus den Jahren 1884 und 1885.

(In Commission in Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.)

Schrader: Gedächtnissrede auf Justus Olshausen	M. 1.00
Hagen: Geschwindigkeit des strömenden Wassers in verschiedenen Tiefen, untersucht nach den von Brünings ausgeführten Messungen	„ 4.00
Tobler: Die altvenezianische Übersetzung der Sprüche des Dionysius Cato	„ 3.50
Eichler: Beiträge zur Morphologie und Systematik der Marantaceen	„ 6.30
Kronecker: Über bilineare Formen von vier Variabeln	„ 2.50
Schrader: Zur Frage nach dem Ursprunge der altbabylonischen Cultur	„ 3.00
Tobler: Über das Buch des Uguçon da Laodho	„ 5.00
Dillmann: Über die Regierung, insbesondere die Kirchenordnung des Königs Zar'a-Jacob	„ 5.00
Imhoof-Blumer: Die Münzen der Dynastie von Pergamon	„ 5.00
Roth: Beiträge zur Petrographie plutonischer Gesteine. IV.	„ 7.50
Virchow: Über alte Schädel von Assos und Cypern	„ 5.00
Wiedemann: Über die Bestimmung des Ohm	„ 4.50
Diels: Über die Berliner Fragmente der Ἀθηναίων πολιτεία des Aristoteles	„ 4.00
Schrader: Die Keilinschriften am Eingange der Quellengrotte des Sebeneh-Su	„ 3.00

Studer: Über die von S. M. S. Gazelle auf der Reise um die Erde 1874—1876 gesammelten Isopoden	„ 2.50
Marshall: Agilardiella radiata	„ 1.50
Krabbe: Über das Wachsthum des Verdickungsringes und der jungen Holzzellen in seiner Abhängigkeit von Druckwirkungen	„ 4.50
Studer: Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—1876 gesammelten Asteriden und Euryaliden	„ 4.50
Freudenthal: Die durch Averroes erhaltenen Fragmente Alexander's zur Metaphysik des Aristoteles	„ 3.00
Bohn: Der Tempel des Dionysos zu Pergamon	„ 1.50
Hirschfeld, G.: Paphlagonische Felsengräber	„ 6.00
Schweinfurth: Alte Baureste und hieroglyphische Inschriften im Uadi Gasus. Mit Bemerkungen von A. Erman. (Mit 2 Tafeln.)	„ 2.80

Register für die Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie zu Berlin vom Jahre 1874 bis 1881 M. 3.00

Digitized by Google

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHE

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAF

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebie Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Natur in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitglie fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Au Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Ad und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weite heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige St Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Ge Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollstän berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nach

---

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Nat Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei M die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,
" " " Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,
" " " October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1884 nicht zugekommen sein sol hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung ebenfalls Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1885 a

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harr in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSE

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 ℳ.

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsh

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE M

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSE

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 ℳ.

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Em oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welch der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich de Buchhandlung in Verbindung setzen.

Digitized by Google

13892

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT X.

DECEMBER 1885.

MIT TAFEL VII UND VIII.

BERLIN 1886.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN.

Beigefügt sind der Titel und das Inhalts-Verzeichniss für den Jahrgang 1885, sowie das Namen- und Sachregister.

Digitized by Google

Anzeige.

dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich
sischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind
eren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende
Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-
regelmässig Donnerstags acht Tage nach
Sitzung. Die sämmtlichen zu einem Kalender-
ehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit
fender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten
lem eine durch den Band ohne Unterschied der
rien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungs-
r, und zwar die Berichte über Sitzungen der physi-
-mathematischen Classe allemal gerade, die über
gen der philosophisch-historischen Classe ungerade
ern.

§ 2.

Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über
der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mit-
gen und über die zur Veröffentlichung geeigneten
ftlichen Angelegenheiten.

Darauf folgen die den Sitzungsberichten über-
en wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der
zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört,
ertig übergebenen, dann die, welche in früheren
gen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehö-
Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften
ierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte be-
e Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung
fertig vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder,
lle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung
hrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes
utzen. Einsendungen auswärtiger oder correspon-
r Mitglieder, welche direct bei der Gesammt-
ie oder bei einer der Classen eingehen, hat der
nde Secretar selber oder durch ein anderes Mit-
um Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren
er der Akademie nicht angehören, hat er einem
t geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.
er allen Umständen hat die Gesammtakademie
ie Classe die Aufnahme der Mittheilung in die
ischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in
in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte
bersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche
demie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses
es beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist
ch ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtaka-
oder der betreffenden Classe statthaft.

Abgesehen von einfachen in den Text einzuschal-
Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus
Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mit-
theilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den
Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von
besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche
Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissen-
schaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Aus-
gabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch
nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in
deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn
der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen
Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen
beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er
dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der
betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes
Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit
auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungs-
berichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher
Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt
werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender
Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis
in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaft-
lichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unent-
geltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf
welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere
gleiche Separatabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert
zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu
lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden
Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der
Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte.
Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redac-
tion und den Druck der in dem gleichen Stück erschei-
nenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft
heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des
geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwort-
lich. Für alle übrigen Theile derselben sind nach
jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

Digitized by Google

54. Zu LINDEMANN's Abhandlung: „Über die LUDOLPH'sche Zahl".

Von K. WEIERSTRASS.

(Vorgetragen am 22. October; — gedruckt im Bericht vom 3. December [St. XLIX]; — ausgegeben am 10. December.)

Für die Ergebnisse der in der genannten Abhandlung[1] mitgetheilten Untersuchungen des Hrn. LINDEMANN, namentlich für den darin enthaltenen, bis dahin vergebens erstrebten Beweis, dass die Zahl π keine algebraische Zahl und somit die Quadratur des Kreises auf constructivem Wege unausführbar ist, hat sich in den weitesten Kreisen ein so lebhaftes Interesse kundgegeben, dass ich glaube, es werde eine möglichst elementar gehaltene, nur auf allbekannte Sätze sich stützende Begründung der LINDEMANN'schen Theoreme, wie ich sie im Nachstehenden zu geben versuche, zahlreichen Mathematikern willkommen sein.[2]

[1] Diese Abhandlung, deren Inhalt durch die Überschrift nur unvollständig angegeben wird, ist von mir am 22. Juni 1882 der Akademie vorgelegt worden und bald darauf etwas weiter ausgeführt auch in den »Mathematischen Annalen« (Bd. XX) erschienen.

[2] Ich bemerke ausdrücklich, dass die Veröffentlichung dieses im Sommer 1882 entstandenen und seinem wesentlichen Inhalte nach am 26. October desselben Jahres in der Akademie vorgetragenen Aufsatzes im Einverständnisse mit Hrn. LINDEMANN erfolgt, und dass ich damit nur bezwecke, die von demselben gegebenen oder angedeuteten Beweise seiner Sätze ohne wesentliche Modification der leitenden Grundgedanken zu vereinfachen und zu vervollständigen. Das erstere erreiche ich hauptsächlich dadurch, dass ich nicht, wie Hr. LINDEMANN es thut, bei dem Leser die vollständige Kenntniss des Inhalts der berühmten HERMITE'schen Abhandlung »Sur la fonction exponentielle« (Compt. rend. 1873) voraussetze, sondern aus derselben nur die Methode zur Herleitung des in §. 1 unter Nr. VI aufgestellten Hülfssatzes entnehme.

Der Aufsatz ist übrigens im Manuscript mehreren befreundeten Mathematikern mitgetheilt und dann unter Benutzung der Bemerkungen, die mir einige von ihnen haben zukommen lassen, umgearbeitet worden. Namentlich hat mir Hr. H. A. SCHWARZ verschiedene redactionelle Änderungen vorgeschlagen, auf die ich gern eingegangen bin. Besonderen Dank schulde ich ferner Hrn. DEDEKIND für eine auf den Beweis des im Anfange des §. 3 aufgestellten Hülfssatzes sich beziehende Mittheilung, durch welche es mir möglich geworden ist, diesen Beweis wesentlich zu vereinfachen.

Digitized by Google

§. 1.

Hülfssätze aus der Theorie der Exponentialfunction.

I. Es bedeute $[z, \lambda]$ für jeden ganzzahligen, nicht negativen Werth von λ die durch die Gleichung

$$\frac{[z,\lambda]}{\lambda!} = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} \frac{z^{\varkappa}}{\varkappa!} \tag{1}$$

definirte ganze Function λten Grades des Arguments z, ferner sei

$$g(z) = \sum_{\lambda=0}^{l} b_\lambda z^\lambda \tag{2}$$

eine beliebige ganze Function von z, und es werde gesetzt:

$$G(z) = \sum_{\lambda=0}^{l} b_\lambda [z, \lambda]; \tag{3}$$

dann besteht die Gleichung

$$g(z)e^{-z}dz = d\left(-G(z)e^{-z}\right), \tag{4}$$

und es ist $G(z)$ eine ganze Function der Veränderlichen z von demselben Grade wie die Function $g(z)$.

Dabei ist zu bemerken, dass durch die vorstehende Gleichung die Function $G(z)$ eindeutig definirt wird.

II. Es seien

$$\begin{cases} f(z) = \sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu z^{n+1-\nu}, \\ h(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu \end{cases} \tag{5}$$

zwei ganze Functionen von z, beziehlich vom $(n+1)$ten und vom $n$ten Grade; die Coefficienten der zweiten sollen willkürlich anzunehmende Grössen und die Coefficienten der ersten nur der Beschränkung unterworfen sein, dass a_0 nicht gleich Null sein und die Function $f(z)$ mit ihrer ersten Ableitung $f'(z)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen darf. Man bestimme, unter m eine beliebig anzunehmende positive ganze Zahl verstehend, auf die in (I.) angegebene Weise eine Reihe von ganzen Functionen

$$H_0(z), H_1(z), \ldots H_m(z), \tag{6}$$

welche den Gleichungen

$$\begin{cases} h(z)e^{-z}dz = d\left(-H_0(z)e^{-z}\right) \\ f'(z)H_{\mu-1}(z)e^{-z}dz = d\left(-H_\mu(z)e^{-z}\right) \end{cases} \quad (\mu = 1, 2, \ldots m) \tag{7}$$

genügen; dann hat man, wenn

Digitized by Google

(8) $$h_0(z) = h(z), \quad h_\mu(z) = f'(z) H_{\mu-1}(z) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots m)$$

gesetzt wird, für $\mu = 0, 1, \ldots m-1$,

(9) $$d\left(-\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!} f(z)^{m-\mu} e^{-z}\right) = \frac{h_\mu(z)}{(m-\mu)!} f(z)^{m-\mu} e^{-z} dz - \frac{h_{\mu+1}(z)}{(m-\mu-1)!} f(z)^{m-\mu-1} e^{-z} dz,$$

und (für $\mu = m$)

(10) $$d\left(-H_m(z) e^{-z}\right) = h_m(z) e^{-z}.$$

Aus diesen $(m+1)$ Gleichungen ergiebt sich, wenn man sie durch Addition mit einander vereinigt:

(11) $$\frac{h(z)}{m!} f(z)^m e^{-z} dz = d\sum_{\mu=0}^{m}\left\{-\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!} f(z)^{m-\mu} e^{-z}\right\}.$$

Die Coefficienten der Functionen $[z, \lambda]$ sind, wie aus der Formel (1) unmittelbar erhellt, ganze Zahlen; die Coefficienten der durch die Gleichung (3) definirten Function $G(z)$ also ganze lineare Functionen der Grössen $b_0, b_1, \ldots b_l$ mit ganzzahligen Coefficienten. Demgemäss lehren die Formeln (7), dass jede der Functionen $H_0(z), H_1(z), \ldots H_m(z)$ eine ganze Function der Grössen

$$z, a_0, a_1, \ldots a_{n+1}, c_0, c_1, \ldots c_n$$

mit ganzzahligen Coefficienten ist.

III. Die im Vorstehenden definirte Function $H_m(z)$ ist niemals durch die Function $f(z)$ theilbar, ausgenommen in dem Falle, wo die Grössen $c_0, c_1, \ldots c_n$ sämmtlich den Werth Null haben und somit jede der Functionen $H_0(z), H_1(z), \ldots H_m(z)$ sich für jeden Werth von z auf Null reducirt.

Es werde gesetzt

(12) $$\overline{H}_m(z) = \sum_{\mu=0}^{m}\left\{\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!} f(z)^{m-\mu}\right\},$$

so ist [nach Gleichung (11)]

$$\overline{H}_m(z) - \frac{d\overline{H}_m(z)}{dz} = \frac{h(z)}{m!} f(z)^m.$$

Wenn daher die Coefficienten der Function $h(z)$ nicht sämmtlich den Werth Null haben, so ist $\overline{H}_m(z)$ eine ganze Function von z, die nicht für jeden Werth dieser Grösse verschwindet und deren Grad (nach I.) nicht grösser ist als $m(n+1) + n = (m+1)(n+1) - 1$. Bezeichnet man also mit $\rho + 1$ die kleinste positive ganze Zahl, für welche $\overline{H}_m(z)$ nicht durch $f(z)^{\rho+1}$ theilbar ist, und setzt

$$\overline{H}_m(z) = H_m^*(z) f(z)^\rho,$$

Digitized by Google

so ist $H_m^*(z)$ eine ganze Function von z, die nicht für jeden Werth dieser Grösse verschwindet, und $\rho \leqq m$. Man hat dann

$$\left(H_m^*(z) - \frac{dH_m^*(z)}{dz}\right) f(z) - \rho H_m^*(z) f'(z) = \frac{h(z)}{m!}^{m-\rho+1} f(z)^{\rho},$$

und es ist daher $\rho H_m^*(z) f'(z)$ durch $f(z)$ theilbar. Dies aber ist, da die Functionen $f(z), f'(z)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen und die Function $H_m^*(z)$ nicht durch $f(z)$ theilbar ist, nur der Fall für $\rho = 0$; es ist also $f(z)$ kein Theiler von $\overline{H}_m(z)$ und somit, der Gleichung (12) zufolge, auch kein Theiler der Function $H_m(z)$.

IV. Bezeichnet man (unter der Annahme, dass $n > 1$ sei) mit z', z'' irgend zwei derjenigen Werthe von z, für welche $f(z) = 0$ wird, so ergiebt sich aus der Gleichung (11):

$$(13) \qquad H_m(z'')e^{-z''} - H_m(z')e^{-z'} = -\int_{z'}^{z''} \frac{h(z)}{m!}^{m} f(z) e^{-z} dz.$$

Aus den Gleichungen (7 und 1 — 4) erhellt, dass die Function $H_m(z)$, bei unbestimmten Werthen der Grössen $c_0, c_1, \ldots c_n$, vom $(mn + n)$ten Grade ist und dass in derselben die Coefficienten von

$$z^{mn+n}, z^{mn+n-1}, \ldots z^{mn+n-(m-1)}$$

beziehlich durch

$$a_0^m \quad , a_0^{m-1} \quad , \ldots a_0$$

theilbar sind. Daraus folgt, dass die Function $a_0^{m(n-1)} H_m(z)$ sich auf die Form

$$(14) \qquad a_0^{m(n-1)} H_m(z) = G(z, m) f(z) + g(z, m)$$

bringen lässt, in der Art, dass $G(z, m), g(z, m)$ beide ganze Functionen der Grössen $z, a_0, a_1, \ldots a_{n+1}, c_0, c_1, \ldots c_n$ mit ganzzahligen Coefficienten werden und $g(z, m)$ in Beziehung auf z von nicht höherem als dem $n$ten Grade ist. Die Gleichung (13) kann also in die folgende verwandelt werden:

$$(15) \quad g(z'', m)e^{-z''} - g(z', m)e^{-z'} = -\int_{z'}^{z''} \frac{h(z)\left(a_0^{n-1} f(z)\right)^m}{m!} e^{-z} dz.$$

Die Coefficienten der Functionen $H_m(z), G(z, m), g(z, m)$ sind, wie für die erste aus ihrer oben angegebenen Bildungsweise, für die beiden anderen aber aus der vorstehenden Definition derselben hervorgeht, homogene ganze lineare Funtionen der willkürlich anzunehmenden Grössen $c_0, c_1, \ldots c_n$. Wenn man daher, unter ν irgend eine der Zahlen $0, 1, \ldots n$ verstehend, mit $g_\nu(z, m)$ die Function bezeichnet, in welche $g(z, m)$ dadurch übergeht, dass man $c_\nu = 1$

Digitized by Google

und die übrigen der Grössen $c_0, c_1, \ldots c_n$ sämmtlich gleich Null annimmt, so hat man

$$(16) \qquad g(z, m) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g_\nu(z, m),$$

und es gehen aus der Gleichung (15) die folgenden $(n+1)$ Gleichungen hervor:

$$(17) \quad g_\nu(z'', m)e^{-z''} - g_\nu(z', m)e^{-z'} = -\int_{z'}^{z''} \frac{z^\nu \left(a_0^{n-1} f(z)\right)^m}{m!} e^{-z} dz. \quad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

Die Functionen $g_\nu(z, m)$ sind ganze Functionen der Grössen $z, a_0, a_1, \ldots a_{n+1}$ mit ganzzahligen Coefficienten. Bezeichnet man ferner mit $G_\nu(z, m)$ die Function, in welche $G(z, m)$ durch die Annahme

$$h(z) = z^\nu$$

übergeht, so ist

$$(18) \quad \begin{cases} G(z, m) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu G_\nu(z, m), \\ a_0^{m(n-1)} H_m(z) = f(z) \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu G_\nu(z, m) + \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g_\nu(z, m), \end{cases}$$

und es ergiebt sich aus der letzten Gleichung, da $H_m(z)$ (nach III.) nur dann durch $f(z)$ theilbar ist, wenn die Grössen c_ν sämmtlich verschwinden, dass der Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g_\nu(z, m)$$

nur dann für jeden Werth von z gleich Null ist, wenn jede der Grössen $c_0, c_1, \ldots c_n$ den Werth Null hat — mit anderen Worten, dass unter den in den Gleichungen (17) vorkommenden $(n+1)$ ganzen Functionen von z

$$g_0(z, m), g_1(z, m), \ldots g_n(z, m)$$

für keinen Werth von m eine lineare Abhängigkeit stattfindet.

Aus dieser Eigenschaft der Functionen $g_\nu(z, m)$ ergiebt sich ferner:

Giebt man der Grösse z irgend $(n+1)$ bestimmte Werthe

$$z_0, z_1, \ldots z_n,$$

unter denen keine zwei gleiche sich finden, so hat die Determinante

$$\left| g_\nu(z_\lambda, m) \right| \quad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots n)$$

stets einen von Null verschiedenen Werth.

Wäre nämlich diese Determinante gleich Null, so würden sich $(n+1)$ Grössen $c_0, c_1, \ldots c_n$ so bestimmen lassen, dass die $(n+1)$ Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g_\nu(z_\lambda, m) = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots n)$$

Digitized by Google

beständen, ohne dass sämmtliche Grössen $c_0, c_1, \ldots c_n$ den Werth Null hätten. Dann würde aber der Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g_\nu(z, n),$$

der eine ganze Function der Veränderlichen z von nicht höherem als dem $n$ten Grade ist, für jeden Werth von z verschwinden, was nach dem Vorhergehenden nicht stattfinden kann.

V. Da

$$\frac{z^\nu \left(a_0^{n-1} f(z)\right)^m}{m!} e^{-z}$$

eine (transcendente) ganze Function von z ist, so hat das Integral auf der Rechten der Gleichung (17) bei gegebenen Werthen von m, ν, z', z'' einen von dem Integrationswege unabhängigen, eindeutig bestimmten Werth, den man, unter τ eine auf das Intervall (0 ... 1) beschränkte reelle Veränderliche verstehend, in der Form

$$\int_0^1 \frac{(z''-z')(z'+(z''-z')\tau)^\nu \left(a_0^{n-1} f(z'+(z''-z')\tau)\right)^m}{m!} e^{-z'-(z''-z')\tau} d\tau$$

darstellen kann. Es lässt sich aber, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ, eine ganze Zahl M so bestimmen, dass für jeden Werth von m, der grösser als M ist, und für jeden der betrachteten Werthe von τ

$$\left| \frac{(z''-z')(z'+(z''-z')\tau)^\nu \left(a_0^{n-1} f(z'+(z''-z')\tau)\right)^m}{m!} e^{-z'-(z''-z')\tau} \right| < \delta$$

und somit auch, nach einem bekannten Satze, der absolute Betrag des Integrals

$$\int_{z'}^{z''} \frac{z^\nu \left(a_0^{n-1} f(z)\right)^m}{m!} e^{-z} dz$$

kleiner als δ ist. Aus der Gleichung (17) ergiebt sich also, wenn man beide Seiten derselben mit

$$e^{z''+z'}$$

multiplicirt

$$\lim_{m=\infty} \left\{ g_\nu(z', m) e^{z''} - g_\nu(z'', m) e^{z'} \right\} = 0. \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n) \tag{19}$$

VI. Bis jetzt sind die Coefficienten der Function $f(z)$ keiner anderen Beschränkung als der oben (unter II.) angegebenen unterworfen worden. Setzt man aber nunmehr noch fest, dass dieselben sämmtlich gegebene ganze Zahlen sein sollen, so werden, nach dem

Digitized by Google

oben (IV.) Bemerkten, für jeden Werth der Zahl m auch die Coefficienten der Functionen $g_\nu(z, m)$ sämmtlich ganze Zahlen. Man kann ferner, wenn $z_0, z_1, \ldots z_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ sind, den Gleichungen (19) gemäss m so gross annehmen, dass jede der Differenzen

$$g_\nu(z_0, m)\, e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda, m)\, e^{z_0} \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 0, 1, \ldots n\\ \nu = 0, 1, \ldots n\end{pmatrix}$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist, als eine beliebig klein angenommene positive Grösse δ. Zugleich hat dann die Determinante

$$\left| g_\nu(z_\lambda, m) \right| \quad (\lambda, \nu = 0, 1 \ldots n)$$

einen von Null verschiedenen Werth, indem unter den Grössen $z_0, z_1, \ldots z_n$ keine zwei gleiche sich finden.

Damit ist ein Satz bewiesen, der im Folgenden hauptsächlich zur Begründung der LINDEMANN'schen Theoreme dienen wird und sich so aussprechen lässt:

»Es sei $f(z)$ eine ganze Function $(n+1)$ Grades der Veränderlichen z mit gegebenen ganzzahligen Coefficienten, die so beschaffen sind, dass die Gleichung

$$f(z) = 0$$

$(n+1)$ von einander verschiedene Wurzeln hat, welche mit

$$z_0, z_1, \ldots z_n$$

bezeichnet werden mögen. Alsdann lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ, auf manigfaltige Weise ein System von $(n+1)$ ganzen Functionen

$$g_0(z), g_1(z), \ldots g_n(z)$$

des Arguments z von nicht höherem als dem $n$ten Grade, deren Coefficienten sämmtlich ganze Zahlen sind, so bestimmen, dass erstens jede der Differenzen

$$g_\nu(z_0)\, e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda) e^{z_0} \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 0, 1, \ldots n\\ \nu = 0, 1, \ldots n\end{pmatrix}$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist, und zweitens die Determinante

$$\left| g_\nu(z_\lambda) \right| \quad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots n)$$

einen von Null verschiedenen Werth hat.«

§. 2.

Beweis, dass die LUDOLPH'sche Zahl π eine transcendente Zahl ist.

Da $e^{\pi i} = -1$ ist und die Function e^z nur für solche Werthe ihres Arguments, welche (ungrade) Vielfache von πi sind, den Werth -1 annimmt, so kann dem zu beweisenden Satze der folgende substituirt werden:

Digitized by Google

»Die Grösse $e^x + 1$ hat, wenn x eine algebraische Zahl ist, stets einen von Null verschiedenen Werth.«

Es bedeute x_1 irgend eine gegebene algebraische Zahl. Dieselbe sei Wurzel einer Gleichung $r$ten Grades:

$$x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_r = 0,$$

deren Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen sind — wobei angenommen werden darf, dass $r > 1$ sei, weil für $r = 1$ $e^{x_1} = e^{-c_1}$ und somit eine positive Grösse ist. Die vorstehende Gleichung hat dann ausser x_1 noch $(r-1)$ andere Wurzeln; werden diese mit $x_2, \ldots x_r$ bezeichnet, so ist es, damit der aufgestellte Satz bestehe, nothwendig und hinreichend, dass die Grösse

$$\prod_{\lambda=1}^{r}(e^{x_\lambda} + 1)$$

einen von Null verschiedenen Werth habe. Dies aber lässt sich folgendermaassen zeigen:

Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ von einander unabhängige Veränderliche, so hat man

$$\prod_{\lambda=1}^{r}(e^{\xi_\lambda} + 1) = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_r} e^{\varepsilon_1 \xi_1 + \varepsilon_2 \xi_2 + \ldots + \varepsilon_r \xi_r}, \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r = 0, 1)$$

oder, wenn man $2^r = p$ setzt und die p Functionen

$$\varepsilon_1 \xi_1 + \varepsilon_2 \xi_2 + \ldots + \varepsilon_r \xi_r, \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r = 0, 1)$$

in irgend einer Ordnung genommen, mit $\zeta_0, \zeta_1, \ldots \zeta_{p-1}$ bezeichnet,

$$\prod_{\lambda=1}^{r}(e^{\xi_\lambda} + 1) = \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{\zeta_\mu}.$$

Sind also

$$z_0, z_1, \ldots z_{p-1}$$

die Werthe, welche

$$\zeta_0, \zeta_1, \ldots \zeta_{p-1}$$

dadurch annehmen, dass man

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \ldots \quad \xi_r = x_r$$

setzt, so ist

$$\prod_{\lambda=1}^{r}(e^{x_\lambda} + 1) = \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{z_\mu}.$$

Die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe, welche in der Reihe $z_0, z_1, \ldots z_{p-1}$ vorhanden sind, sei $n+1$, und es mögen die Ausdrücke $\zeta_0, \zeta_1, \ldots \zeta_{p-1}$ so geordnet sein, dass unter den $(n+1)$ Grössen $z_0, z_1, \ldots z_n$ keine zwei gleiche sich finden, und $z_0 = 0$ ist; wobei zu bemerken, dass $n+1 > 1$ ist, weil in der Reihe $z_0, z_1, \ldots z_{p-1}$ auch die Grössen $x_1, \ldots x_r$ enthalten sind. Dann

Digitized by Google

kann man, unter z eine unbestimmte Grösse verstehend, eine ganze Function $f(z)$ vom Grade $n+1$ herstellen, welche nur ganzzahlige Coefficienten hat und für $z = z_0, z_1, \ldots z_n$ verschwindet. Es kann nämlich das Product

$$\prod_{\mu=0}^{p-1}(z - \zeta_\mu)$$

dargestellt werden als ganze Function der Grössen $z, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ mit ganzzahligen Coefficienten, welche sich nicht ändert, wenn die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ in beliebiger Weise permutirt werden, und sich somit, wenn man für $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ die Wurzeln einer Gleichung $r$ten Grades mit lauter rationalen Zahlcoefficienten einsetzt, in eine ganze Function $p$ten Grades von z mit eben solchen Coefficienten verwandelt. Es lässt sich also $\prod_{\mu=0}^{p-1}(z - z_\mu)$ als ganze Function von z mit lauter rationalen Zahlcoefficienten darstellen; dividirt man diese Function dann durch den grössten Theiler, den sie mit ihrer ersten Ableitung gemein hat, so ist der Quotient eine ganze Function $(n+1)$ten Grades von z, aus der man, indem man sie mit einer passenden ganzen Zahl multiplicirt, eine Function

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_{n+1}$$

erhält, welche lauter ganzzahlige Coefficienten hat und für $z = z_0, z_1, \ldots z_n$ verschwindet.

Nachdem diese Function $f(z)$ hergestellt worden, kann man aus ihr, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ, ein System von $n+1$ ganzen Functionen

$$g_0(z), g_1(z), \ldots g_n(z)$$

von der im Schlusssatz (VI.) des vorigen Paragraphen angegebenen Beschaffenheit ableiten, so dass, wenn man

$$g_\nu(0)e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda) = \varepsilon_{\lambda,\nu}\delta \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 0, 1, \ldots n \\ \nu = 0, 1, \ldots n\end{pmatrix}$$

setzt, jede der Grössen $\varepsilon_{\lambda,\nu}$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist.

Die Grössen $g_\nu(z_\lambda)$ sind sämmtlich algebraische Zahlen; multiplicirt man jede derselben mit a_0^n, so verwandeln sie sich alle in ganze algebraische Zahlen.[1]

---

[1] Nach der von Hrn. KRONECKER eingeführten Terminologie heisst eine Grösse x eine algebraische Zahl, wenn sie einer algebraischen Gleichung von der Form

$$x^\nu + A_1 x^{\nu-1} + \ldots + A_\nu = 0,$$

in der die Coefficienten $A_1, \ldots A_\nu$ sämmtlich rationale Zahlen sind, genügt. Sind insbesondere diese Coefficienten sämmtlich ganze Zahlen, so wird x eine ganze

Digitized by Google

Nimmt man nun δ so klein an, dass $|(p-1)\,a_0^n\delta| < 1$ ist, so ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung

$$a_0^n g_\nu(0)\sum_{\mu=0}^{p-1} e^{z_\mu} = \sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu) + \varepsilon_\nu\,, \qquad (\nu = 0, 1 \ldots n)$$

wo jede der Grössen ε_ν dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist.

Es ist aber

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(\zeta_\mu)$$

für jeden Werth von ν eine symmetrische ganze Function der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ mit ganzzahligen Coefficienten; also ist die ganze algebraische Zahl

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu)$$

zugleich eine rationale Zahl, d. h. sie ist eine ganze Zahl im gewöhnlichen Sinne. Ferner lässt sich zeigen, dass die $n+1$ Zahlen

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

nicht sämmtlich den Werth Null haben. Man hat nämlich

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu) = \sum_{\lambda=0}^{n} N_\lambda g_\nu(z_\lambda)\,,$$

wo $N_0, N_1, \ldots N_n$ sämmtlich positive ganze Zahlen sind; es müsste also, wenn die in Rede stehenden Zahlen alle den Werth Null haben sollten, die Determinante

$$|\,g_\nu(z_\lambda)\,| \quad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots n)$$

gleich Null sein, was nicht der Fall ist.

Es giebt also mindestens einen bestimmten Werth von ν, für welchen

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu)$$

eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl, und somit

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu) + \varepsilon_\nu = a_0^n g_\nu(0)\sum_{\mu=0}^{p-1} e^{z_\mu} = a_0^n g_\nu(0)\prod_{\lambda=1}^{r}(e^{x_\lambda}+1)$$

nicht gleich Null ist.

---

algebraische Zahl genannt, und es ist in diesem Falle auch jede ganze rationale Function von x mit lauter ganzzahligen Coefficienten eine ganze algebraische Zahl.

Hiernach sind, da

$$a_0^n f(z) = (a_0 z)^{n+1} + a_1(a_0 z)^n + \ldots + a_n a_0^{n-1}(a_0 z) + a_{n+1} a_0^n$$

ist, $a_0 z_0, a_0 z_1, \ldots a_0 z_n$ sämmtlich ganze algebraische Zahlen, und dasselbe gilt also auch, da der Grad der Function $g_\nu(z)$ nicht grösser als n ist, von jeder der Grössen $a_0^n g_\nu(z_\lambda)$.

Digitized by Google

Daraus folgt unmittelbar, dass das Product

$$\prod_{\lambda=1}^{r}(e^{x_\lambda}+1)$$

und somit auch jeder einzelne Factor desselben einen von Null verschiedenen Werth hat; w. z. b. w.

Damit ist, dem oben Bemerkten gemäss, dargethan, dass die Zahl πi und daher auch π selbst eine transcendente Zahl ist.

Als ein Corollar zu diesem Satze ergiebt sich, dass die »Quadratur des Kreises« eine unlösbare Aufgabe ist, wenn verlangt wird, dass sie durch eine geometrische Construction, bei der nur algebraische Curven und Flächen zur Anwendung kommen, bewerkstelligt werde. (Vergl. den Schlusssatz des §. 3)

§. 3.

Allgemeinere, auf die Exponentialfunction sich beziehende Sätze.

I. Zunächt ist der folgende Hülfssatz zu beweisen. Es seien gegeben $k+1$ Reihen von je r Grössen:

$$\begin{array}{ll}(1) & A_1', A_2', \ldots A_r' \\ (2) & A_1'', A_2'', \ldots A_r'' \\ \vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (k) & A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \ldots A_r^{(k)} \\ (k+1) & x_1, x_2, \ldots x_r,\end{array}$$

wobei angenommen werde, dass in jeder der k ersten Reihen wenigstens eine Grösse vorkomme, die einen von Null verschiedenen Werth hat, und in der letzten Reihe keine zwei gleiche Grössen sich finden. Man bilde das Product

$$\sum_{a=1}^{r} A_a' e^{x_a} \cdot \sum_{b=1}^{r} A_b'' e^{x_b} \ldots \sum_{t=1}^{r} A_t^{(k)} e^{x_t}$$

und bringe dasselbe, welches mit P bezeichnet werde, auf die Form[1]

$$P = \sum_{a,b,\ldots t} A_a' A_b'' \ldots A_t^{(k)} e^{x_a+x_b+\ldots x_t}. \qquad (a,b,\ldots t=1,\ldots r)$$

[1] Es ist nothwendig, dass bei dieser Umformung von P das Argument der Exponentialgrösse, durch welche das Product aus den Factoren

$$e^{x_a}, e^{x_b}, \ldots e^{x_t}$$

dargestellt wird, gleich $x_a + x_b + \ldots + x_t$ genommen werde, und nicht etwa, was an sich gestattet wäre, gleich dieser Summe plus einem Vielfachen von $2\pi i$. Ohne diese Festsetzung würden die im Folgenden einzuführenden Grössen C_λ nicht gehörig bestimmt sein.

Digitized by Google

Aus der Gesammtheit der Werthe, welche die aus k Gliedern bestehende Summe

$$x_a + x_b + \ldots + x_t$$

annimmt, wenn man für $a, b, \ldots t$ alle möglichen Systeme von k der Reihe $1, 2, \ldots r$ entnommenen Zahlen setzt, hebe man die von einander verschiedenen, deren Anzahl $n+1$ sein möge, heraus; bezeichnet man dieselben mit $z_0, z_1, \ldots z_n$, so ergiebt sich

$$P = \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda e^{z_\lambda},$$

wo für jeden bestimmten Werth von λ

$$C_\lambda = \sum_{a,b,\ldots t}{}' A'_a A''_b \ldots A^{(k)}_t$$

ist, unter der Bedingung, dass die Summation sich über diejenigen Werthsysteme $a, b, \ldots t$, für welche $x_a + x_b + \ldots + x_t = z_\lambda$ ist, erstrecke. Es ist nun zu beweisen, dass unter den so definirten Grössen C_λ mindestens eine sich findet, die nicht gleich Null ist.

Die Grössen $x_1, \ldots x_r$ können sowohl complexe als reelle Werthe haben. Man betrachte eine complexe Grösse $t + t'i$ (wo t, t' reelle Grössen bezeichnen) als positiv, wenn $t > 0$ oder auch $t = 0, t' > 0$, dagegen als negativ, wenn $t < 0$ oder auch $t = 0, t' < 0$ ist; dann darf man, da das Product P seinen Werth nicht ändert, wenn in dem gegebenen Grössensysteme irgend zwei Colonnen unter einander vertauscht werden, voraussetzen, es seien die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_r$ so geordnet, dass die Differenzen

$$x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots x_{r-1} - x_r$$

sämmtlich positive Grössen sind.

Dies vorausgesetzt, nehme man aus jeder der obigen Reihen $(1), (2), \ldots (k)$ die erste Grösse, welche nicht den Werth Null hat, heraus; diese sei A'_α in der ersten Reihe, A''_β in der zweiten, $\ldots, A^{(k)}_\varkappa$ in der $k$ten, so ist

$$A'_\alpha A''_\beta \ldots A^{(k)}_\varkappa e^{x_\alpha + x_\beta + \ldots + x_\varkappa}$$

eines der Glieder, aus denen P zusammengesetzt wird. Irgend ein anderes Glied, dessen Coefficient nicht den Werth Null hat, sei

$$A'_a A''_b \ldots A^{(k)}_t e^{x_a + x_b + \ldots + x_t},$$

so ist

$$a \geqq \alpha, b \geqq \beta, \ldots t \geqq \varkappa,$$

und es giebt unter den Zahlen $a, b, \ldots t$ mindestens eine, welche grösser ist, als die entsprechende der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \varkappa$. Folglich ist

Digitized by Google

$(x_a + x_b + \ldots + x_t) - (x_\alpha + x_\beta + \ldots + x_\nu) = (x_a - x_\alpha) + (x_b - x_\beta) + \ldots + (x_t - x_\nu)$

eine positive Grösse und somit $(x_a + x_b + \ldots + x_t)$ nicht gleich $(x_\alpha + x_\beta + \ldots + x_\nu)$. Es findet sich also unter den Gliedern

$$A'_a A''_b \ldots A^{(k)}_t e^{x_a + x_b + \ldots + x_t}$$

keines, in welchem das Argument der Exponentialgrösse denselben Werth hätte, wie in dem Gliede

$$A'_\alpha A''_\beta \ldots A^{(k)}_\nu e^{x_\alpha + x_\beta + \ldots + x_\nu};$$

der Coefficient des letzteren ist also eine der Grössen C_λ, unter denen sich hiernach unter allen Umständen eine findet, welche nicht gleich Null ist.[1]

II. Nunmehr seien, wie in §. 2, $x_1, x_2, \ldots x_r$ die Wurzeln einer Gleichung $r$ten Grades

$$x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_r = 0,$$

deren Coefficienten sämmtlich gegebene rationale Zahlen sind, und deren Discriminante einen von Null verschiedenen Werth hat. Ferner seien $N_1, N_2, \ldots N_r$ gegebene ganze Zahlen, unter denen wenigstens eine nicht gleich Null ist. Dann lässt sich beweisen, dass die Summe

$$\sum_{\varrho=1}^{r} N_\varrho e^{x_\varrho}$$

niemals den Werth Null hat.

Man bezeichne die Grössen, welche aus der vorstehenden Summe dadurch hervorgehen, dass man in derselben die Grössen $x_1, \ldots x_r$ auf jede mögliche Weise permutirt, mit

$$X', X'', \ldots X^{(k)},$$

wo $k = r!$ ist, so hat, wenn n irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots k$ bedeutet, $X^{(n)}$ die Form

$$X^{(n)} = \sum_{\varrho=1}^{r} N^{(n)}_\varrho e^{x_\varrho},$$

wo die Reihe der Zahlen $N^{(n)}_1, N^{(n)}_2, \ldots N^{(n)}_r$ aus der Reihe $N_1, N_2, \ldots N_r$ durch eine bestimmte Permutation der Glieder der letzteren hervorgeht. Setzt man dann

$$P = \prod_{n=1}^{k} X^{(n)},$$

---

[1] Dass man in der Reihe der Grösse $C_0, C_1, \ldots C_n$ eine, die nicht gleich Null ist, ohne Weiteres auf die angegebene Weise ermitteln könne, wenn man die Grössen $x_1, \ldots x_r$ so auf einander folgen lässt, dass die Differenzen $x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots x_{n-1} - x_n$ sämmtlich positive Werthe (in dem festgesetzten Sinne) erhalten, ist eine Bemerkung, die ich Hrn. DEDEKIND verdanke.

Digitized by Google

so ist

$$(1) \qquad P = \sum_{a,b,\ldots t} N_a' N_b'' \ldots N_t^{(k)} e^{x_a + x_b + \cdots + x_t}, \qquad (a, b, \ldots t = 1, 2, \ldots r)$$

woraus sich, wenn man die von einander verschiedenen Werthe der Grössen

$$x_a + x_b + \ldots + x_t, \qquad (a, b, \ldots t = 1, \ldots r)$$

wie in (I.), mit $z_0, z_1, \ldots z_n$ bezeichnet,

$$(2) \qquad P = \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda e^{z_\lambda}$$

ergiebt, wo jetzt die Grössen C_λ sämmtlich ganze Zahlen sind, von denen, dem in (I.) Bewiesenen gemäss, wenigstens eine nicht gleich Null ist.

Mittels der gegebenen Gleichung, deren Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_r$ sind, kann man nun eine Gleichung $(n+1)$ten Grades mit lauter ganzzahligen Coefficienten herstellen, deren Wurzeln die Grössen $z_0, z_1, \ldots z_n$ sind. Bildet man nämlich, unter $z, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ von einander unabhängige Veränderliche verstehend, aus den durch die Formel

$$z - (\xi_a + \xi_b + \ldots + \xi_t) \qquad (a, b, \ldots t = 1, \ldots r)$$

repräsentirten Grössen ein Product, so ist dasselbe eine ganze Function von $z, \xi_1, \ldots \xi_r$ mit lauter ganzzahligen Coefficienten, und zugleich eine symmetrische Function von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$, verwandelt sich also, wenn man $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots \xi_r = x_r$ setzt, in eine ganze Function von z mit lauter rationalen Zahlcoefficienten, welche für $z = z_0, z_1, \ldots z_n$, und zwar nur für diese Werthe von z, verschwindet. Dividirt man dann diese Function durch den grössten Theiler, den sie mit ihrer ersten Ableitung gemein hat, so ist der Quotient eine ganze Function $(n+1)$ten Grades, aus der man, indem man sie mit einer passenden ganzen Zahl multiplicirt, eine ganze Function

$$(3) \qquad f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_{n+1}$$

erhält, welche lauter ganzzahlige Coefficienten hat und für $z = z_0, z_1, \ldots z_n$ verschwindet.

Aus dieser Function $f(z)$ kann man nun, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ, ein System von $(n+1)$ ganzen Functionen

$$g_0(z), g_1(z), \ldots g_n(z)$$

von der im Schlusssatze (VI.) des §. 1 angegebenen Beschaffenheit ableiten, so dass, wenn

$$(4) \qquad g_\nu(z_0) e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda) e^{z_0} = \varepsilon_{\lambda,\nu} \delta \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots n \\ \nu = 0, 1, \ldots n \end{pmatrix}$$

Digitized by Google

gesetzt wird, jede der Grössen $\varepsilon_{\lambda,\nu}$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist. Dann ergiebt sich aus dem obigen Ausdrucke der Grösse P

$$(5) \qquad a_0^n g_\nu(z_0) e^{-z_0} P = \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda) + a_0^n e^{-z_0} \delta \sum_{\lambda=0}^{n} \varepsilon_{\lambda,\nu} C_\lambda. \quad (\nu = 0, 1 \ldots n)$$

Hier ist nun jede der Grössen $a_0^n g_\nu(z_\lambda)$ eine ganze algebraische Zahl; es lässt sich aber zeigen, dass jede der $(n+1)$ Summen

$$\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda)$$

eine ganze rationale Zahl, d. h. also eine ganze Zahl im gewöhnlichen Sinne ist.

Versteht man wieder unter $z, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ von einander unabhängige Veränderliche, so ist das Product

$$\sum_{a=1}^{r} N_a' e^{\xi_a} \cdot \sum_{b=1}^{r} N_b'' e^{\xi_b} \ldots \sum_{t=1}^{r} N_t^{(k)} e^{\xi_t}$$

und somit auch die Summe

$$\sum_{a,b,\ldots t} N_a' N_b'' \ldots N_t^{(k)} e^{\xi_a + \xi_b + \cdots + \xi_t} \qquad (a, b, \ldots t = 1, \ldots r)$$

eine symmetrische Function von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$. Entwickelt man dieselbe in eine Potenzreihe von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$, so ist die Summe der Glieder $m$ter Dimension dieser Reihe, nämlich

$$\frac{1}{m!} \sum_{a,b,\ldots t} N_a' N_b'' \ldots N_t^{(k)} (\xi_a + \xi_b + \ldots + \xi_t)^m, \qquad (a, b, \ldots t = 1, \ldots r)$$

und daher auch, wenn $g(z)$ eine beliebige ganze Function von z ist,

$$\sum_{a,b,\ldots t} N_a' N_b'' \ldots N_t^{(k)} g(\xi_a + \xi_b + \ldots + \xi_t) \qquad (a, b, \ldots t = 1, \ldots r)$$

eine symmetrische ganze rationale Function der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$. Die letztere erhält also, wenn man (für $\nu = 0, 1, \ldots n$) $g(z) = g_\nu(z)$ annimmt und $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots \xi_r = x_r$ setzt, einen rationalen Werth, der sich durch Multiplication mit a_0^n in eine ganze Zahl verwandelt. Es ist aber nach dem Obigen, für jeden bestimmten Werth von λ

$$(6) \qquad C_\lambda = \sum_{a,b,\ldots t}' N_a' N_b'' \ldots N_t^{(k)},$$

wenn die Summation über diejenigen Zahlensysteme, für welche $x_a + x_b + \ldots + x_t = z_\lambda$ ist, erstreckt wird, und daher

$$(7) \qquad \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda) = \sum_{a,b,\ldots t} N_a' N_b'' \ldots N_t^{(k)} a_0^n g_\nu(x_a + x_b + \ldots + x_t),$$

also auch $\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda)$ eine ganze rationale Zahl.

Es lässt sich aber auch zeigen, dass diese Zahl wenigstens für einen Werth von ν einen von Null verschiedenen Werth hat. Da

Digitized by Google

nämlich die Grössen C_λ (nach I.) nicht sämmtlich gleich Null sind, so müsste, wenn alle $(n+1)$ Zahlen

$$\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

den Werth Null hätten, die Determinante

$$|g_\nu(z_\lambda)| \quad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots n)$$

gleich Null sein, was nicht der Fall ist.

Nimmt man also die Grösse δ so klein an, dass jede der Grössen

$$a_0^n e^{-z_0}\delta \sum_{\lambda=0}^{n} \varepsilon_{\lambda,\nu} C_\lambda \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist, so findet sich unter den Grössen auf der Rechten der Gleichungen (5) wenigstens eine, die nicht gleich Null ist; woraus sich unmittelbar ergiebt, dass das Product P, und somit auch die Grösse

$$\sum_{\varrho=1}^{r} N_\varrho e^{x_\varrho},$$

welche ein Factor dieses Productes ist, einen von Null verschiedenen Werth hat; was zu beweisen war.

Selbstverständlich gilt dieser Satz auch, wenn unter $N_1, N_2, \ldots N_r$ rationale Zahlen verstanden werden.

Nimmt man für $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend r von einander verschiedene ganze Zahlen an, so ergiebt sich als ein besonderer Fall des vorstehenden Theorems der von Hermite bewiesene Satz, dass die Zahl e keine algebraische Zahl ist.

Eine naheliegende Verallgemeinerung des Theorems ergiebt sich folgendermaassen:

Sind $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend r gegebene, von einander verschiedene algebraische Zahlen, so lässt sich stets eine algebraische Gleichung — im Allgemeinen von höherem als dem $r$ten Grade — mit lauter rationalen Zahlcoefficienten und nicht verschwindender Determinante herstellen, unter deren Wurzeln die gegebenen Grössen $x_1, x_2, \ldots x_r$ sich finden. Ist der Grad dieser Gleichung gleich r, so sind $x_1, x_2, \ldots x_r$ solche r Grössen, für welche das bewiesene Theorem unmittelbar gilt. Hat die Gleichung aber ausser $x_1, x_2, \ldots x_r$ noch l andere Wurzeln:

$$x_{r+1}, \ldots x_{r+l},$$

und werden unter $N_1, N_2, \ldots N_{r+l}$ rationale Zahlen verstanden, so ist

$$\sum_{\varrho=1}^{r+l} N_\varrho e^{x_\varrho}$$

nur in dem Falle gleich Null, wo $N_1, N_2, \ldots N_{r+l}$ sämmtlich den

Digitized by Google

Werth Null haben. Nimmt man also für jeden Werth von ρ, der grösser als r ist, $N_\rho = 0$ an, so ergiebt sich:

Werden unter $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend r von einander verschiedene algebraische Zahlen, unter $N_1, N_2, \ldots N_r$ aber beliebige rationale Zahlen verstanden, so kann die Gleichung

$$\sum_{\rho=1}^{r} N_\rho e^{x_\rho} = 0$$

nur dadurch befriedigt werden, dass man jeder der Zahlen N_ρ den Werth Null giebt.

III. Jetzt seien

$$X_1, X_2, \ldots X_r$$
$$x_1, x_2, \ldots x_r$$

zwei Systeme von je r gegebenen algebraischen Zahlen, wobei angenommen werde, dass die Grössen $X_1, X_2, \ldots X_r$ nicht sämmtlich gleich Null seien, und unter den $x_1, x_2, \ldots x_r$ keine zwei gleiche sich finden.

Die Grössen $X_1, X_2, \ldots X_r$ lassen sich durch eine Grösse ξ, welche eine der Wurzeln einer bestimmten irreductibelen algebraischen Gleichung mit lauter rationalen Zahlcoefficienten ist, in der Form

$$X_1 = G_1(\xi), \; X_2 = G_2(\xi), \ldots X_r = G_r(\xi)$$

ausdrücken, wo $G_1(\xi), G_2(\xi), \ldots G_r(\xi)$ ganze Funtionen von ξ, deren Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen sind, bedeuten. Bezeichnet man mit ξ' irgend eine andere Wurzel der genannten Gleichung, so sind die Grössen

$$G_1(\xi'), \; G_2(\xi'), \ldots G_r(\xi')$$

nicht alle gleich Null, weil der bekannten Eigenschaft einer irreductibelen Gleichung gemäss $G_\rho(\xi')$ nicht gleich Null sein kann, wenn nicht (für denselben Werth von ρ) auch $G_\rho(\xi) = 0$ ist. Nun seien $\xi, \xi', \ldots \xi^{(k-1)}$ sämmtliche Wurzeln der in Rede stehenden Gleichung, so bringe man das Product

$$P = \sum_{a=1}^{r} G_a(\xi) e^{x_a} \cdot \sum_{b=1}^{r} G_b(\xi') e^{x_b} \ldots \sum_{t=1}^{r} G_t^{(k-1)}(\xi^{(k-1)}) e^{x_t}$$

auf die in (I.) beschriebene Weise, indem man für die dort mit

$$A'_\rho, A''_\rho, \ldots A_\rho^{(k)} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots n)$$

bezeichneten unbestimmten Grössen beziehlich

$$G_\rho(\xi), G_\rho(\xi'), \ldots G_\rho(\xi^{(k-1)})$$

substituirt, auf die Form

$$\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda e^{z_\lambda},$$

Digitized by Google

wo die Grössen $z_0, z_1, \ldots z_n$ also von einander verschiedene algebraische Zahlen sind, die $C_0, C_1, \ldots C_n$ aber zunächst als symmetrische ganze Functionen von $\xi, \xi', \ldots \xi^{(k-1)}$ mit lauter rationalen Zahlcoefficienten und sodann sämmtlich als rationale Zahlen dargestellt werden können. Da nun $C_0, C_1, \ldots C_n$ nicht sämmtlich gleich Null sind, so hat nach dem Schlusssatze von (II.) die Grösse

$$\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda e^{z_\lambda}$$

unter den in Betreff der Grössen $X_1, X_2, \ldots X_r, x_1, x_2, \ldots x_r$ gemachten Voraussetzungen einen von Null verschiedenen Werth. Dasselbe gilt also auch von dem Producte P und somit auch von dem Ausdrucke

$$\sum_{\varrho=1}^{r} X_\varrho e^{x_\varrho} = \sum_{\varrho=1}^{r} G_\varrho(\xi) e^{x_\varrho},$$

der ein Factor des Productes ist.

Damit ist bewiesen:

»Werden unter $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend r von einander verschiedene, unter $X_1, X_2, \ldots X_r$ aber beliebige **algebraische** Zahlen verstanden, so kann die Gleichung

$$\sum_{\varrho=1}^{r} X_\varrho e^{x_\varrho} = 0$$

nur in dem Falle, wo $X_1, X_2, \ldots X_r$ sämmtlich den Werth Null haben, bestehen.«

In diesem von Lindemann ohne ausgeführten Beweis aufgestellten allgemeinen Satze finden die von Hermite begonnenen Untersuchungen über die Exponentialfunction ihren Abschluss.

IV. Schliesslich mögen noch einige, aus dem vorstehenden Theorem unmittelbar sich ergebende specielle Sätze angeführt werden.

Nimmt man $r = 2$, $X_1 = -1$, $x_2 = 0$ an und setzt x für x_1, X für X_2, so ergiebt sich, dass die Gleichung $e^x = X$ nicht bestehen kann, wenn x, X beide algebraische Zahlen sind und zugleich x einen von Null verschiedenen Werth hat. Daraus folgt:

»Die Exponentialgrösse e^x ist stets eine transcendente Zahl, wenn x eine von Null verschiedene algebraische Zahl ist.«

»Der natürliche Logarithmus einer algebraischen Zahl X ist immer eine transcendente Zahl, wenn X nicht den Werth 1 hat.«

Diese beiden, von Lindemann besonders hervorgehobenen Sätze scheinen mir zu den schönsten Sätzen der Arithmetik zu gehören.

Nimmt man ferner

$$r = 3, X_1 = i, X_2 = -i, x_2 = -x_1, x_3 = 0$$

Digitized by Google

an und setzt $\frac{xi}{2}$ für x_1, X für X_3, so ergiebt sich, dass die Gleichung

$$2 \sin \frac{x}{2} = X$$

nicht bestehen kann, wenn x, X beide algebraische Zahlen sind und x einen von Null verschiedenen Werth hat. Daraus folgt:

Ein Kreisbogen, dessen Sehne, durch den Halbmesser des Kreises gemessen, eine algebraisch ausdrückbare Länge hat, kann nicht durch eine geometrische Construction, bei der nur algebraische Curven und Flächen zur Anwendung kommen, rectificirt werden; eben so wenig ist der zu einem solchen Bogen gehörige Kreissector durch eine derartige Construction quadrirbar.

Hat nämlich in einem Kreise, dessen Halbmesser als Längeneinheit angenommen wird, ein Bogen die Länge x, seine Sehne also die Länge $2 \sin \frac{x}{2}$ und der zugehörige Kreissector den Inhalt $\frac{1}{2}x$, so würde, wenn durch eine Construction der angegebenen Art der Bogen rectificirbar oder der Sector quadrirbar wäre, daraus eine algebraische Gleichung zwischen x und $2 \sin \frac{x}{2}$ sich ergeben. Eine solche Gleichung existirt aber nicht, wenn $2 \sin \frac{x}{2}$, wie angenommen, eine algebraische Zahl ist.

Digitized by Google

Digitized by Google

55. Der unterirdische Gammarus von Clausthal.

(G. pulex, var. subterraneus.)

Von Dr. Robert Schneider
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Schulze am 22. October; — gedruckt im Bericht vom 3. December [St. XLIX]; — ausgegeben am 10. December.)

Hierzu Taf. VII.

In meinem Aufsatze über »subterrane Organismen«[1] habe ich unter anderen typischen thierischen Bewohnern der Schächte und Bergwerke auch des in den Clausthaler Gruben einheimischen bleichen *Gammarus* Erwähnung gethan und besonders im Anschluss an dieses unterirdisch lebende Thier den Gesichtspunkt geltend gemacht, dass die in Bergwerken älteren Datums eingebürgerten Organismen gelegentlich beachtenswerthe Übergangs- oder Mittelstufen zwischen den entsprechenden Grotten und Höhlen bewohnenden und andererseits den entsprechenden oberirdisch lebenden Formen repraesentiren dürften. Es liegt auf der Hand, dass uns Höhlen- und Grottenbewohner keinen zuverlässigen Maassstab dafür gewähren können, wie lange schon sie den Bedingungen subterraner Existenz, resp. den damit verbundenen Abänderungsprincipien unterworfen waren. Nur ganz allgemeine Annahmen sind zulässig, derart z. B., dass Organismen wie der *Proteus,* der *Amblyopsis,* der *Gammarus puteanus,* der *Asellus cavaticus* u. a. schon eine lange Reihe von Jahrtausenden hindurch ihr unterirdisches Dasein führen und demgemäss in mehr oder minder intensiver Weise von ihren ursprünglich oberirdisch lebenden Vorfahren abänderten. Aber auch über den genaueren Gang dieser Abänderung, die allmählichen Descendenzstufen, welche während solchen Processes durchlaufen sein müssen, lehren uns diese Höhlenbewohner nichts sicheres, ja wir haben kaum einen stricten Beweis dafür, ob eine typische Höhlenspecies von einer anderen, in demselben Verbreitungsbezirke überall oberirdisch vorkommenden wirklich abstamme oder nicht, wenngleich ein solcher Schluss der nächstliegende und natürlichste sein muss.[2]

[1] Abhandlung zum Programm des Königl. Real-Gymnasiums zu Berlin. Ostern 1885.

[2] Darwin führt einen solchen Fall als von Prof. Silliman ihm mitgetheilt an in »Entstehung der Arten«, 6. Aufl. S. 163.

Digitized by Google

Und doch wäre gerade die Klärung solcher Gesichtspunkte, wie sie sich aus jedem Studium der Dunkelfauna in erster Linie ergeben müssen, im Sinne Darwin'scher Entwickelungslehre von höchster Bedeutung, von unschätzbarem Werthe. Übergangsformen zwischen scheinbar unvermittelten, aber doch entschieden verwandten Arten aufzufinden, ist nach Darwin's eigenem Ausspruche der werthvollste Dienst, welcher der Descendenztheorie geleistet werden könne. — und wo liegt das Bedürfniss, solche aufzufinden, näher, als bei jetzt unterirdisch lebenden Organismen, die doch ganz unzweifelhaft ursprünglich von oberirdischen und oft wohl jetzt noch existirenden herrühren.

Bis zu einem gewissen Grade nun, meine ich, sind Organismen, welche in möglichst alten Kunstschächten (der Gruben und Bergwerke) völlig eingebürgert sind, geeignet, über diese eben angeführten dunklen Punkte einiges Licht zu verbreiten. Denn erstlich werden diese Schacht und Stollen bewohnenden Organismen immer mit Sicherheit als die directen Nachkommen irgend einer bestimmten, in denselben Districten verbreiteten, oberirdischen Art zu recognosciren sein, da doch die Zeitdauer ihrer subterranen Existenz, resp. Modification noch keine so bedeutende gewesen sein wird, um ihre Abstammung unkenntlich zu machen. Die Dauer unterirdischen Aufenthaltes ihrerseits wird sich vielmehr zu jener der Grotten- und Höhlenbewohner verhalten, wie historische zu geologischen Zeitspannen, wie Jahrhunderte zu vielen Jahrtausenden. Auf Grund dessen können also Bergwerksbewohner derart — in zeitlicher Beziehung und damit auch in Bezug auf den Grad ihrer Transmutation — schon als vermittelnde Glieder zwischen der entsprechenden oberirdischen und der nächststehenden Grotten bewohnenden Form betrachtet werden, wenn anders eine solche überhaupt existirt. Dies wäre ein zweiter Punkt von Bedeutung, insofern solche vermittelnden Übergangsstufen uns werthvolle Lichtblicke in den feineren Gang und Verlauf subterraner Transmutation, besonders während der Anfangsstadien, bieten dürften. Drittens aber kommt hier noch als bedeutungsvoll hinzu, dass wir im Stande sind, bei Schachtbewohnern über deren subterranes Alter eine annähernd genaue Controle zu üben, wenn wir das Alter des betreffenden Schachtes oder Stollens kennen. Wir würden also gelegentlich ermitteln können, während welcher Zeitdauer ungefähr ein Organismus bis zu einem bestimmten Grade abänderte.[1]

Zu diesen Erwägungen nun hat mich ganz besonders das Vorhandensein des subterranen *Gammarus* in den Clausthaler Schächten,

[1] Ich habe diese allgemeinen Gesichtspunkte schon in meiner oben erwähnten Abhandlung erörtert, glaube aber, dass es nicht unzweckmässig sein wird, sie an dieser Stelle noch einmal geltend gemacht zu haben.

Digitized by Google

dem ich im Folgenden eine Besprechung widmen möchte, geführt, um so mehr als zwischen den beiden bekannten einheimischen Extremen: dem *G. puteanus* Koch der Brunnen und Grotten und seinen Varietäten einerseits, den oberirdischen Arten *G. pulex* L. und *G. fluviatilis* Rösel andererseits, — einigermaassen vermittelnde Beziehungen zu allgemeinem Bedauern bisher vermisst wurden, in welchem Sinne sich auch Rougemont und Fries[1] äussern.

Gleich bei dieser Gelegenheit möchte ich nicht versäumen, allen Denen öffentlich Dank zu sagen, welche mich theoretisch und praktisch bei den vorliegenden Arbeiten in liebenswürdigster Weise unterstützt haben: den HH. Professoren von Martens und Hilgendorf zu Berlin, dem Hrn. Bergrath Fickler, sowie den Steigern HH. Grummet und Max zu Clausthal.

Zunächst schicke ich einige allgemeine Angaben, Localität, Vorkommen etc. des in Frage stehenden Thieres betreffend, voraus.

Der bleiche *Gammarus* belebt in unzählbaren Schwärmen fast alle bekannteren Stollen des Clausthaler Grubendistrictes; besonders massenhaft fand ich ihn in denen der ältesten Bergwerke, der berühmten Gruben »Karoline« und »Dorothea«. Schon diese ganz überraschende Dichtigkeit des Vorkommens in jenen Schachtteufen, deren Existenz in das 16. und 17. Jahrhundert zurückreicht, spricht für völlige und uralte Einbürgerung des Thieres daselbst. Beim Mangel an grösseren Feinden, welche dem Thiere durch perpetuirliche Nachstellung gefährlich werden könnten, beim Fortfall irgend einer Art von Concurrenz Seitens ähnlicher oder gleich häufiger Geschöpfe, hat sich das Thier in seiner dunklen, sicheren Verborgenheit offenbar schon seit geraumen Zeiten bis zu diesem staunenerregenden Grade ungestört vermehren können. Nahrung bietet sich ihm reichlich dar in Gestalt kleinerer, dort gleichfalls massenhaft eingebürgerter Wasserthiere, als Copepoden, Chaetopoden, Turbellarien, Infusorien, — sowie organischer Detritus etc. Dieser entschieden moderirte Kampf um's Dasein drückt sich nicht sowohl in der erstaunlichen Vermehrung der Gesammtheit, als auch in der bedeutenden Grössenentwickelung einzelner Exemplare aus, welch' letzterer Umstand wohl auf höhere Altersstufen, welche hier leichter erreicht werden können, hindeutet. Dieselbe interessante Erscheinung ist auch beim Grotten und Brunnen bewohnenden *G. puteanus* beobachtet worden, und die auch bei letzterem häufig vorkommenden, auffallend grossen Exemplare veranlassen Rougemont zu ähnlichen Erwägungen.[2]

---

[1] Fries, Mittheilungen aus dem Gebiete der Dunkelfauna. Göttingen 1879. S. 6.

[2] De Rougemont. Naturgeschichte des *Gammarus puteanus*. Inaugural-Dissert. München 1857. — (R. erwähnt unter anderen ein gigantisches Exemplar von 33^{mm} Länge.)

Digitized by Google

Der wissenschaftlich interessirte Besucher der Clausthaler Schächte ist beim ersten frappirenden Anblicke dieser absolut bleichen Amphipoden unwillkürlich versucht zu glauben, dass er es hier überhaupt mit *G. puteanus* (oder einer seiner nah verwandten Formen) zu thun habe, bis das Vorhandensein deutlicher, ja sogar relativ grosser Augenflecke ihn belehrt, dass das vorliegende Thier vielmehr in seiner anderweitigen äusseren Gesammterscheinung mit dem gewöhnlichen *G. pulex* identisch sei und von diesem direct abstammen müsse.[1] In der Ansicht, dass der *Gammarus* die alten Strecken der Grube Dorothea besonders schon seit geraumer Zeit bevölkert, ja sogar, dass das Alter dieser subterranen Besiedelung mit dem der Strecken selbst annähernd zusammenfällt, bestärkt mich ausserdem die Aussage einiger alten, sehr zuverlässigen Bergleute, dass nämlich ihrem besten Wissen nach diese Krebse schon seit Menschengedenken vorhanden gewesen wären.[2] Interessanter Weise habe ich nun aber auch bei Untersuchung der jüngeren Strecken (Georg-Stollen, 31. Strecke, von der Grube Marie aus befahrbar), deren Alter circa 50—70 Jahre beträgt, constatiren können, dass erstlich die Zahl der hier lebenden Individuen noch bei Weitem nicht an jene der älteren Stollen heranreicht, also jene bedeutende Vermehrung noch nicht stattgehabt haben kann; dass zweitens die hier eingebürgerten Exemplare deutliche Spuren eines erst kürzeren subterranen Aufenthaltes, resp. einer geringeren diesbezüglichen Anpassung an sich tragen, was sich besonders im Vorhandensein einer noch schwach gelblichen oder bräunlichen Pigmentirung documentirt. Wir haben keinen Grund, zu bezweifeln, dass auch sie sehr schnell nach Anlage dieser Stollen in dieselben eingedrungen sind, aber naturgemäss noch nicht so intensive Spuren subterraner Modification an sich

---

[1] Ich will nicht unterlassen, bei dieser Gelegenheit mitzutheilen, dass ich unter den Schaaren dieser Gammariden ein einzelnes versprengtes Exemplar vom wirklichen blinden *G. puteanus* entdeckt habe; dasselbe ist jedenfalls durch Grundwässer aus entfernter liegenden natürlichen Cavernen hierher verschlagen worden, was ab und zu, aber jedenfalls selten, vorkommen mag. In den Rhizomorphen (subterranen Pilzen), welche im Steinkohlenschachte »Glückauf« bei Burgk i. S. massenhaft wuchern und von Grundwässern bespült werden, habe ich ebenfalls drei kleine Exemplare gefunden. Ich kann also den Localitäten, die bisher in unserem engeren Vaterlande als Aufenthaltsort des blinden *Gammarus* bekannt waren, diese beiden noch hinzufügen. Jedenfalls ein neues Zeugniss dafür, dass dieser Kruster eine sehr allgemeine, unterirdische Verbreitung bei uns hat.

[2] Bei meinem letzten Besuche der Clausthaler Bergwerke konnte ich leider wegen Unzugänglichkeit der Grube Dorothea in Folge Grubenbrandes die alten Original-Fundstätten nicht aufsuchen. Da die fraglichen Stollen (19- und 13-Lachterstollen), resp. die in ihnen fliessenden Wässer aber auch die Grube »Marie« berühren, so habe ich von hier aus zu demselben Zwecke gelangen können. Es wollte mir fast scheinen, als ob durch die brenzlichen Wetter ein grosser Theil der Gammariden hierher verscheucht worden sei.

Digitized by Google

tragen können, wie jene der ältesten Strecken. Im »Ernst August-Stollen« endlich (der sogenannten unterirdischen Schifffahrt) habe ich Exemplare aus dem Grundschlamme des Canalwassers heraufgeholt, welche das fast völlig normale, dunkle Pigment des gewöhnlichen *G. pulex* aufzuweisen hatten, entsprechend dem noch geringeren Alter dieses Stollens (von circa 30 Jahren) und der Thatsache, dass die Wassermassen desselben in horizontaler Richtung mit der Oberwelt communiciren. Also auch noch feinere, den temporären Verhältnissen entsprechende Übergangsstufen lassen sich hier nachweisen.

Die Beantwortung der Frage, woher und auf welche Weise die ursprüngliche Einwanderung des *Gammarus* speciell in die alten Stollen der Karoline und Dorothea erfolgte, dürfte noch einiges Interesse verdienen. Die Thatsache, dass seit Inbetriebsetzung dieser Gruben die erforderlichen Aufschlagwässer (Druckwässer für die Hebevorrichtungen etc.) aus verschiedenen der zahlreich über das Clausthaler Plateau verstreuten Teiche nach unten zugeführt wurden, giebt uns einen Fingerzeig, dass der Ursprung hier liegen müsse. Die gleichzeitig sich aufdrängende Frage: werden auch noch bis auf den heutigen Tag gelegentlich Gammariden von oben her miteingeschleppt? — muss ich für die alte Grube Dorothea entschieden verneinen, denn unter den Hunderten dort gefangener Exemplare habe ich auch kein einziges entdecken können, welches Spuren eines erst neuerdings erfolgten Hinuntergelangens an sich getragen hätte; alle zeigten dieselbe typische milchweisse Färbung und eine ebenso typische Neigung, das Gesichtsorgan zu reduciren, von welcher später noch die Rede sein wird. Es wird daher vielmehr diese ganze Besiedelung in alter, wahrscheinlich denkbar ältester Zeit erfolgt sein; ja, ich halte es für das Wahrscheinlichste, dass der Hauptstamm, welcher die heute vertretene, so zahlreiche Nachkommenschaft lieferte, während der allerersten Stadien des Eindringens jener Teichwässer in die neu erschlossenen Schachtteufen hinabgeführt wurde. Es lag für mich natürlich nahe, speciell den grössten von allen, den sogenannten Hirschlerteich, welcher von Alters her jene Aufschlagwässer für die Grube Dorothea lieferte, sowie dessen Abzugsgräben ebenfalls auf das Vorkommen oberirdischer Gammariden hin zu untersuchen. Die Untersuchung des Teiches selbst ergab nur einige ganz junge Exemplare von *G. pulex*; einer einigermaassen reichlichen Bevölkerung durch das Thier scheint heutzutage dieser grosse Wasserbehälter jedenfalls zu entbehren. In dem Haupt-Abzugsgraben, welcher die Wässer nach der Grube führt, konnte ich keine Spur des Thieres entdecken, obwohl die physischen Bedingungen hier die denkbar günstigsten sind: stark fliessendes Wasser, überall mit kleinen Steinen bedeckter Boden etc. Jedenfalls scheinen auch diese Thatsachen da-

Digitized by Google

gegen zu sprechen, dass noch bis in jüngste Zeit regelmässige Wanderungen von oben nach unten erfolgen und erfolgt sind. In dem sogenannten »tiefen Striegelgraben«, einem anderen alten, jetzt ziemlich ausser Gebrauch stehenden Abzugscanale nach der Grube hin, mit stagnirendem, trübem Wasser, fand ich an einer einzigen Stelle (dicht am Teiche, also von der Grube sehr weit entfernt), fast im Schlamme und unter dichtem Gewirre des hier massenhaft wuchernden Batrachiumkrautes versteckt, eine Art isolirter Colonie von *G. pulex*. Es ist kaum denkbar, dass unter jetzigen Bedingungen von dieser abgeschlossenen, gleichsam wie eine Relictenstätte erscheinenden Localität aus noch eine Communication nach den Schachtsohlen hin stattfinden könne.

Ich wende mich nunmehr zur Besprechung der morphologisch-anatomischen Eigenthümlichkeiten, soweit ich solche nach zahlreichen Untersuchungen am unterirdischen *Gammarus* der ältesten Clausthaler Gruben nachweisen konnte. Diejenigen Punkte, in welchen unser Thier schon entschieden und constant vom gewöhnlichen oberirdischen *G. pulex* abweicht, resp. gewisse Anklänge an den völlig blinden Grottenbewohner *G. puteanus* darbietet, will ich einzeln hervorheben.

Der subterran völlig accommodirte *Gammarus* entbehrt jeden Pigmentes, erscheint daher völlig bleich und gerade so durchsichtig milchweiss wie *G. puteanus* und seine Subspecies *Niphargus, Crangonix* etc. Und zwar ist sowohl das eigentliche, sonst theils in der Matrix selbst, theils unterhalb derselben eingelagerte feinkörnige Hautpigment vollkommen verloren gegangen, als auch fehlt der intensiv rothe bis orangegelbe Farbstoff, welcher beim oberirdischen *Gammarus* den Öltropfen des Corpus adiposum zukommt und nicht unwesentlich zur allgemeinen Färbung mit beiträgt. Die übrigens ziemlich stark aufgespeicherten Fettzellen erscheinen bei unserem *Gammarus* absolut farblos. Das Nachdunkeln in Weingeist conservirter Exemplare, wie es die Monographen des *G. puteanus* von diesem erwähnen, findet hier gerade so statt. Man darf sich übrigens bei manchen lebenden Exemplaren unseres bleichen *Gammarus* durch eine dunklere Farbe des durchschimmernden Tractus, sowie der Kiemengegend nicht täuschen lassen, da dies mit der Pigmentablagerung nichts zu thun hat; ersteres rührt leicht von aufgenommenen Nahrungsstoffen (die fast immer stark Eisenoxydhydrat-haltig, daher bräunlich) her, letzteres direct von bei der Athmung ausgeschiedenem Eisenoxydhydrat. Die noch vorhandene matte Färbung der in den jüngeren Strecken lebenden Individuen beruht auf dem Vorhandensein gelber Öltropfen im Corpus adiposum (besonders dem C. a. viscerale), während von dem Hautpigmente nichts deutliches mehr zu erkennen war; ersteres

Digitized by Google

scheint also dem Einflusse der Lichtentziehung länger Stand zu halten.[1] Die noch völlig dunkelbraun, also normal pigmentirten Exemplare aus dem Wasser der unterirdischen Schifffahrt (Ernst August-Stollen) zeigten die bemerkenswerthe Erscheinung, dass sie sehr schnell beim Einsetzen in Alkohol das Pigment verloren, während dasselbe bei oberirdischen Gammariden entschieden langsamer ausgezogen wird.[2]

Als einzige mikroskopisch etwas pigmentirt erscheinende Stelle am Körper des bleichen *Gammarus* kann ich die zahnartigen Fortsätze der Mandibeln anführen, welche eine tief- bis mattgelbliche Färbung, die durch Weingeist nicht ausgezogen wird, aufzuweisen haben: schwächer tritt diese an den kamm- oder sägeartigen Zähnen des mittleren Endgliedes vom ersten Maxillenpaar auf. Es scheint auch hier Eisen mit im Spiele zu sein.

Es darf nicht verkannt werden, dass auch die oberirdisch lebenden Gammariden überhaupt, entsprechend ihrer Vorliebe für dunkle Orte, relativ leicht zu einer gewissen Ausblassung ihres Pigmentes neigen, aber ich glaube, nie zur völligen. So hat FRIES bei einigen längere Zeit im Dunkel gehaltenen Exemplaren eine leichte Verfärbung beobachtet[3] und derselbe Forscher constatirt umgekehrt ein schwaches Wiederdunkeln bei *G. puteanus*, wo derselbe zerstreutem Tagelichte ausgesetzt war.[4]

Das Auge des unterirdischen *Gammarus* (der älteren Grubenwässer) ist nicht mehr das intacte, normal entwickelte des oberirdisch lebenden *G. pulex*, wiewohl gleich hinzugefügt werden muss, dass die hier bisher eingetretene Reduction eine noch in den ersten Anfängen begriffene ist: ein Hinweis darauf, dass selbst solche höher entwickelte Augen, die schon unter normalen Verhältnissen sich dem vollen Lichte zu entziehen suchen (wie es doch bei dem *G. pulex* unbestritten der Fall), erst nach sehr langen Zeiträumen streng subterranen Einflusses die ersten deutlichen Spuren der Verkümmerung an sich tragen. Die das Auge constituirenden Krystallkegel zeigen nämlich in ihrem Gesammtverbande eine entschiedene und persistente Auflockerung, verglichen mit jenen eines normalen *G. pulex*-Auges

[1] Nach GERSTÄCKER unterliegt überhaupt die spärlichere oder reichlichere Füllung mit jenen rothgelben Fetttropfen je nach dem Alter und der Beschaffenheit der Kost wesentlichen Schwankungen. — Dr. H. G. BRONN's Classen und Ordn. des Thierr. Fortsetz. von Dr. A. GERSTÄCKER. V B. II. Abth. S. 365.

[2] Die auch bei langer Aufbewahrung in Spiritus noch vorhandene gelbliche Färbung oberirdischer Gammariden rührt ebenfalls von dem Pigmente der Fettzellen her, welches sich also auch hier stabiler erweist als das Hautpigment. Mit Äther wird auch das erstere schnell und völlig extrahirt.

[3] FRIES. Die Falkensteiner Höhle, ihre Fauna und Flora. Württemb. naturw. Jahresh. 1874, S. 31.

[4] FRIES. Mittheilungen aus dem Gebiete der Dunkelfauna, S. 5.

Digitized by Google

(vergl. Fig. 1 mit 2). Damit im Zusammenhange mag es stehen, dass das ganze Auge erstlich im Allgemeinen eine grössere Fläche einnimmt, also grösser erscheint als das eines entsprechend grossen *G. pulex*,[1] dann aber auch nicht mehr die gewöhnlich mehr schmal bohnen- oder nierenförmige, gestreckte Gestalt des intacten *Gammarus*-Auges, sondern eine breitere, mehr unregelmässig ovale besitzt und eine geringere Geschlossenheit der Conturen aufzuweisen hat. Dass die Krystallkegel nicht mehr die normal feste, gegenseitige Bindung haben, verräth sich übrigens auch durch die Neigung, bei Schnitten u. dergl. leichter auseinander zu fallen. Der Grund dieses ganzen gelockerten Zusammenhanges aber ist in dem Pigmente zu suchen, welches Krystallkegel und Retinula-Endigungen auszukleiden hat und hier eine entschiedene Reduction zeigt. Dieses hat nämlich einen gewissen Grad von Contraction oder Zusammenschrumpfung erfahren, mit anderen Worten, es reicht (nebst den Retinulae) nicht mehr so tief in die Krystallkegel selbst hinein (bis zum Ende ihres vorderen Dritttheiles unter normalen Verhältnissen), und umfasst dieselben auch von aussen nicht mehr so geschlossen becherförmig, sondern nur in einzelnen Längsstreifen; letzteres macht sich besonders geltend bei den peripherisch gelegenen Kegeln, so dass diese oft in ihrer ganzen Länge freizuliegen scheinen und jedenfalls eine nur noch sehr lockere Beziehung zum Pigmente verrathen. Dass die peripherischen Glaskörper bei manchen auch oberirdisch lebenden Gammariden-Arten ihren Zusammenhang mit Retinula und Pigment am ehesten zu lockern geneigt sind, im Vergleiche mit den centralen, — dass dieselben morphologisch sogar degeneriren, d. h. kleiner, unregelmässiger etc. werden können, ist mehrfach beobachtet, so durch O. Sars bei *G. neglectus*, durch Grenacher bei *G. locusta*.[2] Ich habe aber bei zahlreichen Vergleichs-Untersuchungen an Exemplaren des oberirdischen *G. pulex* nie finden können, dass hier eine ähnliche Auslösung der randständigen Krystallkegel vorliege wie beim unterirdischen. Die allgemeine Form der Krystallkegel selbst ist überhaupt mancherlei Schwankungen unterworfen und giebt keine besonderen Anhaltspunkte für unseren Fall.[3]

[1] Ich habe schon anderen Orts darauf hingewiesen, dass ein gewisses Grösser-Erscheinen höher entwickelter optischer Organe nach anhaltender Verdunkelung gewissermaassen als erstes Stadium einer allmählich eintretenden Verkümmerung zu betrachten sein dürfte und habe dafür den Ausdruck »Megalophthalmie« gebraucht. Dieselbe Erscheinung bieten auch die bleichen Tipuliden der Clausthaler Schächte (*Culex, Chironomus, Tipula*). — Über die ausserordentlichen Grössen-Verschiedenheiten von Gammariden-Augen, sogar innerhalb derselben Gattungen, vergl. Gerstäcker, Fortsetz. von Bronn's Classen, T. 37 etc.

[2] Sars. Histoire naturelle des Crustacés d'eau douce de Norvège. 1. Livr. Malacostracés. Christiania 1867. 4.

[3] Vergl. Gerstäcker, Bronn's Classen, T. 41, Fig. 4, 5, 6, 7.

Digitized by Google

Ich kann ferner hervorheben, dass das Augenpigment des unterirdischen *Gammarus* eine Dunkelung erfahren hat. Während es bei der superterranen Form lebhaft rothbraun bis chocoladebraun erscheint, deutlich da wo die Ausläufer desselben in die Krystallkegel eintreten und im macerirten Zustande, — ist es bei ersterem fast trübschwarz, auch nach der Macerirung.[1] Schliesslich will ich noch erwähnen, dass die im Ernst August-Stollen gefangenen Exemplare noch keinen deutlich erkennbaren Unterschied hinsichtlich des ebenmässigen Zusammenhanges zwischen Krystallkegeln und Pigment vom Normalzustande darboten.

Die Beziehung des *Ganglion opticum* zu den Glaskörpern ist, soweit ich bis jetzt beurtheilen kann, beim unterirdischen *Gammarus* noch eine unveränderte, indessen hoffe ich auf Grund weiterer Untersuchungen, die ich augenblicklich noch nicht abschliessen konnte, baldigst einiges Specielle noch über diesen Punkt mittheilen zu können.

Das vordere Fühlerpaar unseres *Gammarus* scheint das Princip einer Verlängerung resp. Vermehrung seiner Geisselgliederzahl zu befolgen; wenigstens kann ich mich nach Vergleichung einer sehr langen Reihe gleich grosser Exemplare (und zwar ♂ mit ♂, ♀ mit ♀ verglichen) dieser Schlussfolgerung nicht verschliessen. Nachfolgende kleine Tabelle, aus circa 30 der beobachteten Fälle zusammengestellt, dürfte die Sache in etwas veranschaulichen, wenn man die erste Columne mit der dritten, die zweite mit der vierten durchweg vergleicht.

Oberirdisch		Unterirdisch	
1.	2.	3.	4.
♂	♀	♂	♀
29	30	40	36
28	29	38	35
28	28	35	32
27	27	33	31
27	26	33	30
27	25	33	30
26	24	32	28
24	24	32	28
22	24	30	28
21	23	30	27
21	23	29	25
20	23	29	25
19	21	27	24
	21	27	24
	21	23	23
	21		

[1] FRIES führt an, dass er bei den im Dunkel gehaltenen Exemplaren des oberirdischen *Gammarus* ausser jener Ausblassung des Körperpigmentes, auch eine solche des Augenpigmentes beobachtet habe. Ich weiss nicht, ob es sich hier wirklich um eine Ausblassung des Pigmentes gehandelt hat; scheinbare Trübungen des über dem Auge liegenden Integumentes habe ich bei oberirdischen und unterirdischen Individuen gelegentlich bemerkt. Vergl. FRIES, Falkensteiner Höhle, S. 31.

Digitized by Google

Dass die Vorder-Antennen, diese besonders für die Entfaltung des Tastsinnes (und wahrscheinlich auch Geruchsinnes) so wichtigen Organe zu einer Stärker- resp. Länger-Entwickelung ihres Endtheiles neigen bei einem Geschöpfe, für welches der Gesichtssinn keine Bedeutung mehr hat, kann uns gar nicht Wunder nehmen. Wie es beim *G. puteanus* und seinen blinden Verwandten eigentlich mit der Zahl der Geisselglieder steht im Vergleiche zum *G. pulex*, habe ich leider aus Mangel an genügendem Material nicht selbst constatiren und auch auf literarischem Wege bisher nicht ermitteln können. Sollte vielleicht die Streckung dieses Leitorganes für den Gesammtkörper einen allerersten causalen Hinweis ausdrücken auf das allgemeine Princip, den ganzen Körper gestreckter zu entwickeln, wie es so unverkennbar bei *G. puteanus* und den ebenbürtigen Blindkrebsen vorliegt?

Die Riechzapfen an den Geisselgliedern der Vorder-Antennen, welche bei *G. puteanus* als länger entwickelt geschildert werden, scheinen bei unserem *Gammarus* keine messbare Längenzunahme darzubieten; ebensowenig die sogenannten Kolbenorgane (*Calceoli; Cupules membraneux*, M. Edw.) an dem unteren Antennenpaar der Männchen, welche Organe bei *G. puteanus* ganz fehlen, eine wahrnehmbare Rückbildung.

Von jener eigenthümlichen Nebengeissel am ersten Antennenpaare, welche bei *G. pulex* und *fluviatilis* vier- (♂[1]) oder dreigliedrig (♀), bei *G. puteanus* stets nur zweigliedrig, wollte es mir nach einer ebenfalls sehr langen Reihe von Beobachtungen scheinen, als ob dieselbe eine gewisse Neigung zur Verkürzung des letzten Gliedes besässe; indessen schienen manche der beobachteten Fälle auch wieder dagegen zu sprechen, und ich bin vorläufig fern davon, dies als durchgreifend hinstellen zu wollen.[1] Fries spricht sich dahin aus, dass gerade dieser Unterschied zwischen unseren oberirdischen Arten und *G. puteanus* eine ursprüngliche Abstammung des letzteren von ersteren bezweifeln lasse.[2] Ohne mich selbst auf den direct entgegengesetzten Standpunkt stellen zu wollen, glaube ich doch, dass man eine derartige Reduction dieses Organes (von drei und vier Gliedern auf zwei) erklären könne auf Grund dessen, dass die Praevalenz desselben beim

---

[1] Diese Nebengeissel ist im Allgemeinen sogar bei den Arten derselben Gattung (speciell den verschiedenen *Gammarus*) bedeutenden Schwankungen unterworfen. Dybowski fand die Gliederzahl bei den zahlreichen Formen des Baikalsees zwischen 1—40 schwankend; bei anderen kann sie auch ganz fehlen. Jedenfalls scheint es Thatsache, dass die blinden Formen fast regelmässig eine sehr reducirte oder gar keine Nebengeissel besitzen. Vergl. Gerstäcker, Bronn's Classen S. 298.

[2] Fries. Mittheilungen aus dem Gebiete der Dunkelfauna. S. 9. Anm.

Digitized by Google

♂ als secundärer Sexualcharakter aufzufassen ist und dass dieser allmählich verloren gehen kann, wenn unter subterranen Bedingungen zugleich mit dem allgemeinen Kampfe ums Dasein auch die geschlechtliche Zuchtwahl in ihrer Forcirung nachlässt. Die Annahme einer weiteren Rückbildung der drei Glieder auf zwei würde dann kaum noch Bedenken erwecken.

Die Mandibeln, Maxillenpaare[1] und Kieferfüsse bieten nichts abweichendes von den bei *G. pulex* bestehenden Verhältnissen. Das fünfte Glied der Greiffüsse aber (die Greifhand), speciell des zweiten Paares, neigt entschieden von der gewöhnlichen Form zu der bei *G. puteanus* vorhandenen in mehrerlei Beziehung hinüber. Dieselbe ist beim Clausthaler *Gammarus* allgemein breiter als sonst (bei *G. puteanus* sehr breit birnenförmig und dementsprechend verkürzt[2]), ihr Vorderrand neigt mehr zur geraden Abstutzung (bei *G. puteanus* ist diese Linie fast völlig gerade, bei der oberirdischen Form mehr ausgebaucht und geschwungen verlaufend), endlich ist der Borstenbesatz am unteren Rande weit dichter; die bei der oberirdischen Form ziemlich scharf von einander getrennten (9) Borstenbüschel gehen in einander über, so dass das Ganze mehr eine Art zusammenhängenden Borstenwaldes darstellt, — auch eine mehr an *G. puteanus* erinnernde Erscheinung.[3] Andererseits erscheinen die sämmtlichen Borsten überhaupt verkürzt im Vergleiche mit den entsprechenden des oberirdischen Thieres. Diese Verhältnisse sind durch die Fig. 3 *a*, *b* und *c* veranschaulicht, unter denen *b*, wie leicht ersichtlich, eine Art vermittelnde Stellung einnimmt. Im Anschluss daran kann ich gleich constatiren, dass allgemein, auch am übrigen Körper des Clausthaler *Gammarus*, das Tastborstensystem zu einer gewissen Verdichtung neigt.[4]

---

[1] Bei *G. puteanus* sind an der Innenlade des zweiten Maxillenpaares drei Borsten etwas weiter am inneren Rande nach abwärts gerückt, während bei *G. pulex* der ganze Rand bis unten gleichmässig mit Borsten ausgestattet ist. (Von FRIES speciell an den in der Falkensteiner Höhle gefangenen Exemplaren beobachtet. Dunkelfauna. S. 9.)

[2] Dass die Form der Greifhand bei verschiedenen unterirdischen und blinden Species sehr variabel sein kann und auch hier gelegentlich keine sonderliche Breiten-Entwickelung zeigt, vergl. besonders GERSTÄCKER, BRONN's Classen, T. 27, 28, 29 und 30.

[3] DE ROUGEMONT. Naturgeschichte des *G. puteanus*.

[4] GERSTÄCKER sagt über diesen Punkt: »Die weit ausgedehnte Verbreitung solcher die Tastempfindung vermittelnden Haargebilde, verbunden mit einer besonderen Reichhaltigkeit derselben an dieser oder jener Gliedmaassengruppe, zeichnet vorwiegend solche Arten aus, deren Gesichtsorgane eine Rückbildung erfahren haben oder selbst ganz verschwunden sind.« BRONN's Classen. S. 350.

Digitized by Google

Die Kalk- und Eisenablagerung im und am Körper des unterirdischen Clausthaler *Gammarus*.

Es bleibt mir noch übrig, einige chemisch-physiologische (resp. histologische) Eigenthümlichkeiten geltend zu machen, welche der subterrane *Gammarus* abweichend von seiner oberirdischen Stammform sich erworben hat und welche auch ihrerseits auf die Dauer der Zeit die allgemeine Modificirung nicht unwesentlich beeinflussen dürften.

Ablagerung von Kalk-Concretionen in die übrigens das äussere Skelet der Amphipoden bildende Chitinsubstanz sind allgemein beobachtet worden, so von Leydig, Pagenstecher, Gamroth (bei *Caprella*), Hoek, Frey, Leuckart etc. Irgend eine typische, diese Erscheinung beherrschende Gesetzmässigkeit scheint sich bei den bisher daraufhin untersuchten, speciell oberirdischen Gammariden nicht ergeben zu haben. Vorherrschend sind es sphaerische, zuweilen regelmässig kreisrunde, oft auch zu zweien biscuitförmig oder zu mehreren steinpflasterartig an einander gefügte, meist radiär gestreifte Gebilde von kohlensaurem Kalk,[1] die sich unter der Hypodermis einlagern; eine Abbildung solcher hat auch Gerstäcker (Bronn's Classen, T. 40) aufgenommen.[2] Sie können indessen auch fehlen oder durch sehr kleine Plättchen und dazwischen eingestreute nadelartige Bildungen ersetzt werden, die sich willkürlich und regellos über alle Körpertheile verbreiten.[3]

Ich habe nun gefunden, dass diese Kalkablagerung beim unterirdischen *Gammarus* von Clausthal eine ungemein kräftige und im Vergleiche zu der des gewöhnlichen *G. pulex*, ich möchte beinahe sagen, gesetzmässig vertheilte ist. Jene sphaerischen oder plättchenförmigen Gebilde kommen auch vor, erstere z. B. in der Kopfgegend, in den beiden Laden der zweiten Maxille etc. (vergl. Fig. 8 *a*), letztere über den ganzen Rumpf zerstreut, entschieden vorherrschend aber sind stern- oder büschelförmige, oft ziemlich grosse Krystallgruppen (Fig. 8 und 5), welche durch die Fig. 8 *b* dargestellte Form gelegentlich eine natürliche Vermittelung zu der sphaerischen hin finden. Oft treten diese Krystallgruppen stark gehäuft und dann wirrer und mehr regellos geknäuelt auf, aber auch dann immer noch den Hang zur typischen Sterngruppirung verrathend (Fig. 9 *a*), und solche finden sich besonders da, wo Borsten zu mehreren an einer Stelle oder in Reihen inseriren (ersteres in den Gliedern der Gangbeine, letzteres in den Maxillenladen, den Kieferfüssen etc.); ja man kann deutlich erkennen, wie diese Kalkabsonderungen hier in eine feste Beziehung zu der Insertionsstelle

[1] Durch verdünnte Salz- oder Essigsäure leicht nachweisbar.
[2] Nach C. Hoek in Tijdschr. d. Nederl. Dierkund. Vereen IV.
[3] Vergl. Gerstäcker, Br. Cl. S. 316.

Digitized by Google

der Borsten treten und diesen eine Art mineralischer Grundlage behufs stärkeren Haltes gewähren. Dies Verhältniss ist aus Fig. 9 *a* deutlich zu ersehen, während ein Vergleich mit 9b die Abwesenheit eines deutlichen Kalkskeletes in der Maxille des oberirdischen *Gammarus* ergiebt. Jenes auf zweckmässiger Verwendung beruhende Ablagerungsprincip ist es nun auch offenbar, welches in den drei Schwimmfusspaaren (den drei *Pedes spurii anteriores*) eine äusserst ebenmässige Erscheinung zu Wege bringt. In jedem Segmente der beiden, mit langen Fiederborsten besetzten Endglieder nämlich erscheinen zwei grosse, meist zu sphaerischer Abrundung neigende Concretionen (je nach der Lage des Gliedes neben oder über einander liegend zu beiden Seiten des central verlaufenden Hauptmuskels), so dass jeder Fiederborste ein Kalkkörper entspricht und, im Ganzen betrachtet, zwei regelrecht neben einander herlaufende Reihen von solchen entstehen (Fig. 4 und 6).[1] Zwischendurch finden sich auch noch kleinere prismatische oder zu Gruppen vereinigte Krystallchen ordnungslos zerstreut, desgleichen im Basalgliede dieser Gliedmaassen, welches aber ausserdem meistens noch eine starke Concentration grosser Krystallgruppen in der Mittellinie zwischen den beiden Hauptmuskelpartien aufzuweisen hat (Fig. 4 und 5).[2] Bei den damit verglichenen oberirdischen Exemplaren war von dieser regelmässigen Doppel-Ablagerung, also auch der Reihenbildung nichts zu bemerken, sondern es fanden sich hier viel zahlreichere und kleinere Krystalle, zuweilen auch grössere sternförmige Gruppirungen dazwischen, aber stets ohne die Regelmässigkeit in Zahl und Anordnung (Fig. 7).[3]

Die Frage liegt sehr nahe, warum gerade in den Ruderspaltfüssen diese hervorragende Ausscheidung von kohlensaurem Kalke erfolgt. Auf Grund der Thatsache, dass sich Kalkgehalt allgemein besonders leicht aus dauernd und stark bewegten Medien (resp. Wässern) an der davon betroffenen Stelle auszuscheiden pflegt, — glaube ich, kann jene Erscheinung aus der specifischen Function dieser Organe erklärt werden, nämlich den davor liegenden Kiemen durch beständiges Hin- und Hervibriren Athemwasser zuzuführen, derart, dass selbst in der

[1] Bei Behandlung dieser Concretionen mit verdünnter Salzsäure tritt eine ziemlich allmähliche und langsame Lösung ein und es hinterbleibt gewöhnlich eine rundliche Contur mit innerem concentrischen Kreise, die aber auch schliesslich verschwindet.

[2] Nur in ganz vereinzelten Fällen habe ich statt dessen in den gefiederten Endgliedern zahlreiche kleinere Kalkkörperchen gefunden, und dann in dichter Reihe an einander gelagert und zwar meist genau in der Richtung der Berührungsfläche zweier Segmente, mit offenbarer Neigung zum Verschmelzen.

[3] Bei dem geringen Material an *G. puteanus*, welches mir bisher zur Verfügung stand, habe ich bei diesem den bewussten Punkt noch nicht eingehend untersuchen können; bei dem einen, auch den Clausthaler Schächten entstammenden Exemplare war diese regelmässige Ablagerung auch nicht zu constatiren, sondern sehr zahlreiche kleine Kalkkörper erfüllten diese ganzen Glieder ausserordentlich dicht.

Digitized by Google

Ruhelage des Gesammtkörpers dauernde Bewegung stattfindet, mithin hier in der That eine weit grössere Gesammtsumme von Bewegungsthätigkeit vorliegt, als bei den davor und dahinter liegenden Extremitäten. Mit demselben Gesetze könnte es auch wohl vereinbar sein, dass in den eigentlichen Kieferstücken der Mandibeln eine sichtbare Kalkablagerung fast regelmässig fehlt, während der tasterartige Anhang derselben solche gewöhnlich enthält.

Dass im Körper dieser unterirdischen Gammariden der Kalk sich in allgemein bedeutenderem Maasse absondert, in Folge dessen man stellenweise sogar von einer Art lockeren Skeletes sprechen kann, muss natürlich auch mit einem entsprechend bedeutenden Kalkgehalte der von dem Thiere bewohnten unterirdischen Wässer in Verbindung stehen, welchen die darauf hin angestellten Analysen auch bestätigten.

Auf die chemisch-physiologische Rolle, welche das Eisen wahrscheinlich im Körper der meisten unterirdisch lebenden Wasserbewohner spielt, habe ich schon in meiner Abhandlung über »subterrane Organismen« hingewiesen. Der besonders reiche Eisengehalt gerade der meisten unterirdisch fliessenden Gewässer bietet natürlich auch hier die erste Ursache aller weiteren Beeinflussung, die gewöhnlich starke und dauernde Ausscheidung von Eisenoxydhydrat aus diesen Wässern giebt den in ihnen lebenden Wesen Veranlassung, nothgedrungen gewisse Quantitäten eisenreicher Substanz mit der Nahrung zugleich in ihren Organismus aufzunehmen. Auf Grund erneuter Controlversuche (an neu beschafftem Material vorgenommen) habe ich nun die damals schon für den *Gammarus* von Clausthal geltend gemachten hier einschlägigen Erscheinungen vollkommen bestätigt gefunden und stelle sie bei dieser Gelegenheit noch einmal kurz zusammen. Fig. 12, das Abdominalstück eines *Gammarus* nach der Reaction auf Eisenoxyd[1] darstellend, wird dieselben einigermaassen erläutern.

[1] Die eisenoxydhaltigen Körpertheile sind blau wiedergegeben, die Ausscheidung von Berlinerblau nach Einwirkung von Kaliumeisencyanür und Salzsäure andeutend. Über die Behandlung hierbei bemerke ich noch folgendes. Die vorher mechanisch gereinigten Objecte müssen möglichst anhaltend und gründlich mit sehr verdünnter Blutlaugensalz-Lösung (0.5 Procent) behandelt werden, wobei noch absolut keine Reaction erfolgt, ein Beweis, dass alles Eisen zunächst nur in unlöslicher oder unzugänglicher Form vorhanden ist. Bei Berührung mit verdünnter Salzsäure tritt dann sofort die Reaction ein, worauf das Object möglichst schnell mit Aqua destillata (oder event. 70—90 procent. Alkohol) ausgewaschen und von der Luft abgeschlossen werden muss; letzteres, weil sich in der sauren Lösung aus dem Blutlaugensalze selbst Eisenblausäure ($C_6N_6.Fe.H_4$) und daraus unter Einfluss atmosphaerischen Sauerstoffes Berlinerblau zu bilden pflegt, — was zu grossen Irrthümern führen könnte. Ohne diese Vorsicht von mir behandelte Objecte zeigten z. B. allgemein eine Bläuung der ganzen Muskulatur, was offenbar zum grossen Theile wenigstens aus dem Reagens selbst herrührt. Immerhin musste es mir auffällig erscheinen, dass auf gleiche Weise behandelte Objecte, von oberirdischen Gammariden herrührend, diese Reactionserscheinung nicht zeigten.

Digitized by Google

Der Darminhalt des Thieres enthält immer eine bedeutende Menge Eisenoxydhydrat aufgespeichert; dass von hier aus, als physiologischem Urquell, durch die weiteren Processe der Digestion, Circulation etc. ein Theil davon weiter verarbeitet und event. an anderen Körperstellen wieder ausgeschieden wird, ist bei dem Einflusse der hier wirksamen Secrete auf Eisenverbindungen wohl unzweifelhaft. Eine höchst intensive Eisenausscheidung zeigen alle sechs Kiemenpaare und besonders ihre äussere Umgebung; ein Theil davon wenigstens dürfte hier auf Rechnung dessen zu setzen sein, dass durch die Wirkung der Respirationsthätigkeit nach aussen hin aus dem zugeführten Athemwasser (welches stets Oxydulsalz gelöst enthält) beständig etwas Oxyd ausgeschieden wird und sich hier allmählich concentrirt. In den Kiemenlamellen selbst findet sich das Eisen, aber weit feiner vertheilt, in der ganzen Randlinie und den sogenannten Verdickungsleisten, welche, von aussen gesehen, wie dunklere, unterbrochene Streifen die ganze Kieme quer durchziehen (Fig. 12 d). Aber auch an den Berührungsflächen der drei Prae-Abdominalsegmente (an welchen die drei vorderen Spaltfusspaare gelenken), welche keine Kiemen mehr tragen, findet sich dieselbe kräftige Ausscheidung, wie an den davor liegenden (Fig. 12 b). Dies kann theilweise, mit der Respiration noch indirect im Zusammenhange, durch die dabei betheiligte Wirksamkeit der *Pedes spurii anteriores* bedingt werden. Es scheint aber, als ob auch das subcutane Drüsensystem, welches gerade an diesen Segmenten stark entwickelt ist, dabei betheiligt wäre; wenigstens zeigten diese Abdominal-Drüsengruppen stets eine ganz besonders scharfe Eisenreaction (Fig. 12 c), und dies kann ich von dem ganzen über den Körper des Thieres hin auftretenden Drüsensysteme behaupten. Interessant ist dann noch das ganz regelmässige Auftreten von Eisenmengen an den Insertionsstellen der Borsten, und zwar besonders die Gangbeine, dann auch die drei letzten Spaltfusspaare betreffend. Nach der Reaction mit Kaliumeisencyanür und Salzsäure erscheinen oft die ganzen Endglieder dieser Bewegungsorgane (besonders die Kralle der Gangbeine) gebläut, was offenbar von kleinen Mengen in Lösung gegangenen Eisens herrühren wird. Die zahlreicheren starken Endstacheln der hinteren Spaltfüsse zeigen oft vor der Reaction schon einen tief dunkelbraunen Inhalt, der von vornherein auf Eisenoxydgehalt hindeutet (Fig. 10). (Dieselbe Erscheinung zeigt sich übrigens auch zuweilen an den Borsten-Insertionen der Gangbeine und anderer Stellen.) Um so auffallender muss es erscheinen, dass die zwischen den beiden eben erwähnten Gliedmaassengruppen liegenden *Pedes spurii anteriores* einer irgendwie wesentlichen und tiefer eingreifenden Eisenablagerung entbehren, wie aus der Figur

Digitized by Google

leicht zu ersehen.[1] Es wird dieser stetige Mangel sicherlich in naher Wechselbeziehung stehen zu der gerade in diesen Spaltfüssen so überwiegenden und gesetzmässigen Kalkausscheidung. Beiderlei mineralische Elemente substituiren sich also gewissermaassen in den verschiedenen Gliedmaassensystemen, offenbar im Zusammenhange mit deren verschiedener physiologischer Function. Endlich will ich noch als besondere Merkwürdigkeit hervorheben, dass der feinkörnige Inhalt der Riechzäpfchen (an den Geisselgliedern der vorderen Antennen) immer mehr oder minder zur Eisenaufnahme neigt, so dass diese zarten Organe nach der Reaction zwischen den sie umstehenden farblosen Borsten deutlich gebläut erscheinen (Fig. 11). Das habe ich übrigens auch bei *G. puteanus* beobachtet, andererseits aber ebenfalls (und zwar zuweilen besonders stark) bei den oberirdischen, jener versteckten Stelle des »Striegelgrabens« entnommenen Exemplaren. Es soll überhaupt diese merkwürdige Eisen-Accumulation nicht als ein direct und ausschliesslich subterranes Modulationsmoment hingestellt werden, sondern als in erster Linie beruhend auf dem etwaigen starken Eisengehalte eines Wassers, der ja gelegentlich auch unter superterranen Verhältnissen (besonders wohl in Gebirgswässern) sich finden kann.[2]

Nach alle dem aber darf man es jedenfalls nicht unterschätzen, welch' bedeutenden Antheil diese gesteigerten mineralisch-physiologischen Einflüsse auf die Dauer der Zeit an Verlauf und Art der allgemeinen Transmutation eines unterirdisch lebenden Geschöpfes nehmen dürften.

Zusammenfassung. Der unterirdische *Gammarus* von Clausthal weicht also vom gewöhnlichen ab, resp. nähert sich um etwas mehr den blinden Grottenformen in folgenden Punkten:

1. in der absoluten Bleichheit des Körpers;
2. in der beginnenden Verkümmerung des Auges;
3. in der Form des fünften Gliedes des zweiten Greiffusspaares;
4. event. in der Streckung der Vorder-Antennen.

Dazu kommen noch die Eigenthümlichkeiten der verstärkten Kalk- und Eisenaufnahme.

---

[1] Ausserdem bleiben die Muskelpartien auch nach vorgenommener Eisenreaction hier so gut wie unverändert erhalten, während sie in den übrigen Gliedmaassen durch dieselbe fast völlig resorbirt werden (vergl. Fig. 12). Die Kalkkrystalle fehlen natürlich in der Zeichnung, da das Object der Eisenreaction und demnach auch der Einwirkung von Salzsäure ausgesetzt war.

[2] Dem gewöhnlichen oberirdischen *G. pulex* aus allen Gewässern von nur durchschnittlichem Mineralgehalt fehlt jene typische Eisenablagerung völlig.

Digitized by Google

Selbstverständlich muss zugegeben werden, dass der *Gammarus* von Clausthal nicht eine Mittelform zwischen den beiden Extremen im streng mathematischen Sinne ist, — wohl aber kann man ihn als Vermittelungsform betrachten. Zwischen ihr und jenem Extrem, welches der völlig blinde *G. puteanus* in seinen verschiedenen Variationen darstellt, liegt unbestritten eine ungleich weitere Kluft, als zwischen eben derselben und unseren einheimischen oberirdisch lebenden Formen. Noch für menschliche Begriffe unendlich lange Zeiträume müssen erforderlich sein und gewesen sein, um jene vollkommen subterran modificirte Form aus einer unserem Clausthaler Vorkommen entsprechenden Anpassungsstufe entstehen zu lassen, wenn wir bedenken, dass letztere vom Normalzustande noch nicht allzu weit differirende immerhin ein bis zwei Jahrhunderte (und vielleicht darüber) bis zu ihrem jetzigen Standpunkte gebraucht haben wird.[1] Es soll auch nicht unbedingt behauptet werden, dass der *G. puteanus* auf dem hier angedeuteten Wege der Umwandlung direct aus dem heutigen, als Art fixirten *G. pulex* sich entwickelt habe; eine als solche heutzutage ausgestorbene Art, die vielleicht auch der Vorfahr unseres *G. pulex* und *fluviatilis* war, kann ebenso gut die Stammform der heutigen blinden Gammariden Deutschlands gewesen sein, eine Vermuthung, welcher auch FRIES Raum giebt.[2] Möge das Angeführte, wie gesagt, nur hinweisen auf den wahrscheinlichen Transmutations- resp. Reductionsweg, welchen die Natur hier eingeschlagen hat.

[1] Vergl. FRIES, Dunkelfauna. S. 4.
[2] Ebenda.

Digitized by Google

Tafelerklärung.

1. Auge von *Gammarus pulex, var. subterraneus.*
2. Auge von *G. pulex.*
3. Fünftes Glied des zweiten Greiffusspaares: *a* von *G. pulex*, *b* von *G. p. var. subterraneus*, *c* von *G. puteanus.*
4. Einer der drei vorderen Spaltfüsse von *G. p. var. subt.* mit den Kalkkrystallreihen.
5. Basalglied desselben (stärker vergrössert).
6. Stück von einem der Terminalglieder (stärker vergrössert: bei *a* Epithel sichtbar).
7. Ein gleiches von *G. pulex.*
8. Verschiedene Formen von Kalk-Concretionen aus verschiedenen Theilen von *G. p. var. subt.*
9. Maxille des zweiten Paares: *a* von *G. p. var. subt.* (mit den Kalkkrystallen), *b* von *G. pulex.*
10. Endstück eines der hinteren Spaltfüsse (darin eine sternförmige Kalkgruppe).
11. Stück einer vorderen Antenne nach der Eisenreaction: bei *r* die Riechzapfen.
12. Ganzer Abdominaltheil eines *G. p. var. subt.* nach der Eisenreaction: *a* Darm, *b* die drei vorderen Abdominalsegmente, *c* Abdominaldrüsen-Systeme. *d* Kiemen.

Digitized by Google

56. Mittheilung über einen Differential-Erd-Inductor.

Von Prof. Leonhard Weber
in Breslau.

(Vorgelegt von Hrn. Siemens am 5. November: — gedruckt im Bericht vom 3. December [St. XX]: — ausgegeben am 10. December.)

Im Nachfolgenden gestatte ich mir, der Königlichen Akademie die Beschreibung eines Apparates vorzulegen, welcher auf meinen Vorschlag hin von den HH. Hartmann und Braun in Bockenheim bei Frankfurt construirt ist und welcher dazu bestimmt ist, die magnetische Inclination nach einer Modification der W. Weber'schen Inductionsmethode zu messen.[1] Diese Modification hat, insofern sie auf eine sogenannte Nullmethode hinausläuft, wiederum Ähnlichkeit mit derjenigen des Hrn. Mascart. Bei beiden wird die Combination zweier der Zeit nach aus einander liegenden Beobachtungsreihen vermieden und die sonst erforderliche Controle durch ein Variationsinstrument entbehrlich gemacht. Ob die Mascart'sche oder die von mir eingeschlagene Methode die kleineren technischen Schwierigkeiten bietet, vermag ich indessen noch nicht zu übersehen.

Das Wesentliche meines Verfahrens besteht in Folgendem. Eine Inductionsrolle A (s. Fig. 1) ist um einen ihrer Durchmesser in dem horizontalen Axenlager $\alpha\,\alpha$ drehbar und zwar um 180°. Gleichzeitig wird mittelst Zahnradübertragung $\gamma\,\gamma$ eine zweite genau gleiche Rolle B in dem verticalen Axenlager $\beta\,\beta$ ebenfalls um 180° gedreht. Die Intensitäten der in beiden Rollen bei der Drehung inducirten Ströme entsprechen resp. der Vertical- und der Horizontal-Componente des Erdmagnetismus, so dass in unseren Breiten die Intensität in A die grössere ist. Durch Einschaltung eines an der Drehung nicht theilnehmenden Widerstandes in den Stromkreis von A lassen sich nun beide Ströme gleich machen. Prüft man diese Gleichheit mittelst

[1] Nach erfolgter Mittheilung an die Königliche Akademie wurde bemerkt, dass eine im Wesentlichen gleiche Methode von Hrn. F. Neumann in seinen Vorlesungen vorgetragen sei. Hr. O. E. Meyer bestätigte dies in der That bei Durchsicht seiner Nachschriften der Neumann'schen Vorlesungen. Die Neumann'sche Methode ist jedoch bisher nicht publicirt und, wie es scheint, auch keiner experimentellen Prüfung und Anwendung unterzogen worden.

Digitized by Google

eines Differential-Galvanometers oder in einer nachher zu beschreibenden Weise mittelst eines Galvanoskops, so ist, wenn F_1 und F_2 die Windungsflächen von A und B, W_a und W_b die gesammten Widerstände der beiden Stromkreise und V und H die Componenten des Erdmagnetismus bedeuten, im Falle der Stromgleichheit

$$1. \qquad \frac{V \cdot F_1}{W_a} = \frac{H \cdot F_2}{W_b}$$

oder, wenn $F_1 = F_2$ ist und i den Inclinationswinkel bezeichnet

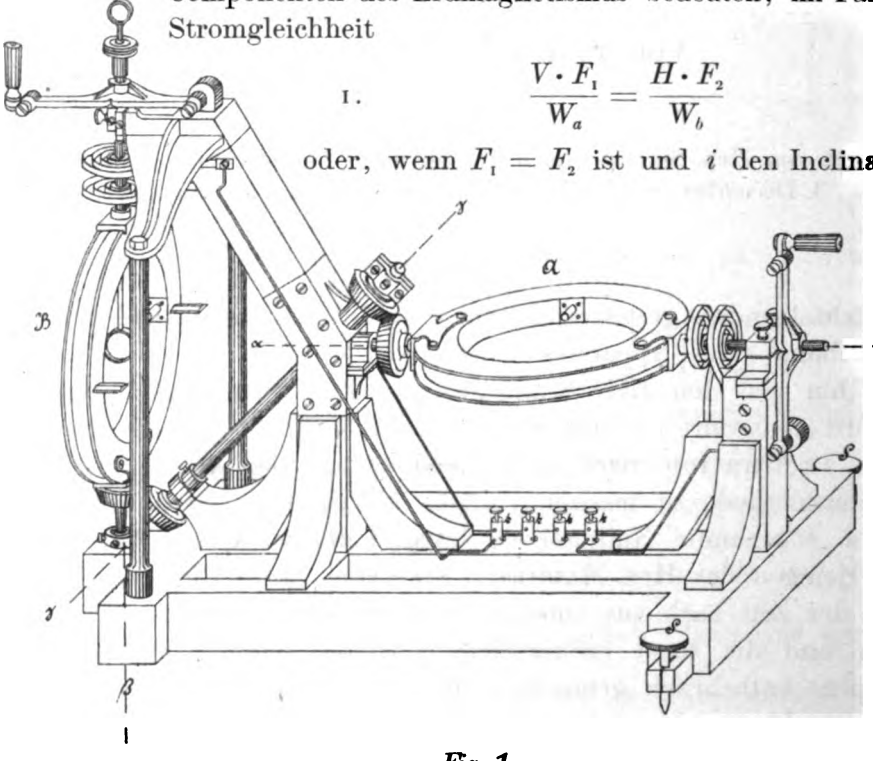


Fig. 1.

$$2. \qquad \operatorname{tg} i = \frac{V}{H} = \frac{W_a}{W_b}.$$

Die Inclination ist demnach mittelst einer Nullmethode aus dem Verhältniss zweier mit beliebiger Genauigkeit messbarer Widerstände zu bestimmen.

Die Anwendung des Differentialgalvanometers zur Prüfung der Stromgleichheit in beiden Kreisen bietet keine weiteren Schwierigkeiten. Mit ebenso grosser, wenn nicht grösserer Bequemlichkeit lässt sich jedoch zu demselben Zwecke ein gewöhnliches Galvanometer benutzen, wenn man die folgende, soweit mir bekannt, bisher noch nicht beschriebene Schaltungsweise anwendet. In beide Stromkreise wird je einer von zwei gleichen Widerständen w (s. Fig. 2) eingeschaltet, ausserdem in den zu $\alpha\,\alpha$ gehörigen Kreis der einem Widerstandskasten zugehörige Widerstand R. Verbindet man nun

Digitized by Google

die beiden gleichsinnigen Anfangspunkte der Widerstände w durch kurzen Schluss s, und die beiden Endpunkte durch ein Galvanometer, so ist leicht zu zeigen, dass, im Falle der Stromgleichheit in den

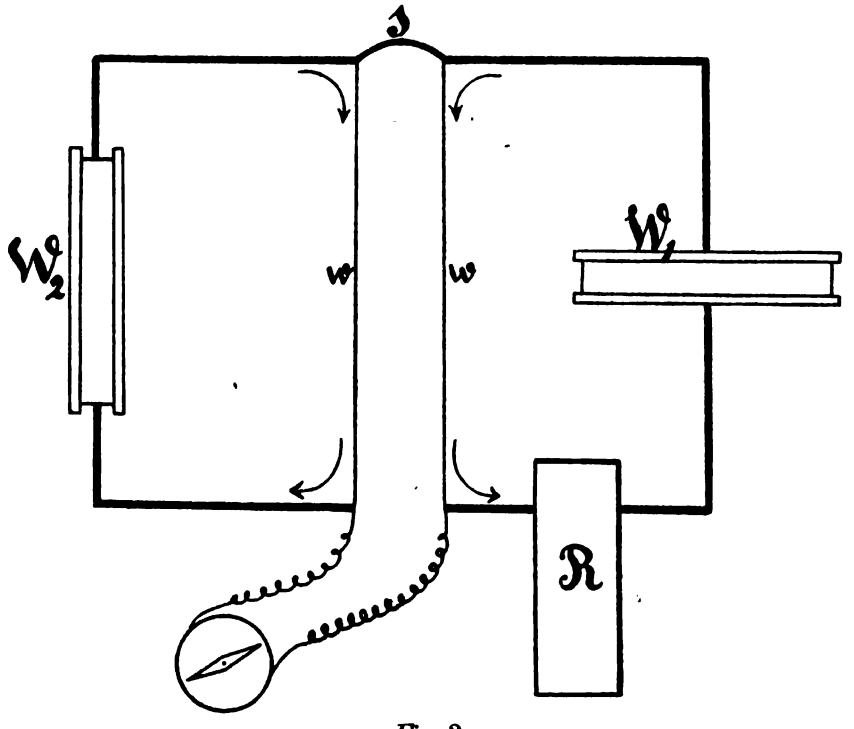


Fig. 2.

Stücken w, das Galvanometer keinen Ausschlag giebt. In diesem Falle geht aber auch durch s kein Strom und die in beiden Stromkreisen cursirenden Ströme verhalten sich genau so, als wenn die Verbindung s und das Galvanometer nicht vorhanden wären. Mithin kann Gleichung 1. unmittelbar Anwendung finden. Darin setzt sich W_a zusammen aus dem Widerstande W_1 der Rolle A sammt ihren Zuleitungsdrähten, dem eingeschalteten Widerstande R und w; während W_b aus dem Widerstande W_2 der Rolle B sammt ihren Zuleitungsdrähten und dem Widerstande w besteht. Demnach wird

1a. $$\frac{V \cdot F_1}{W_1 + R + w} = \frac{H \cdot F_2}{W_2 + w}$$

oder, falls $F_1 = F_2$ ist,

2a. $$\operatorname{tg} i = \frac{V}{H} = \frac{W_1 + R + w}{W_2 + w}.$$

Die diesen einfachen Formeln zu Grunde liegende erste Voraussetzung, dass nämlich die Axe $\alpha\alpha$ horizontal und in der Richtung

Digitized by Google

des magnetischen Meridianes, sowie dass die Axe $\beta\beta$ vertical liege, ist durch vorherige Justirung und Einstellung des ganzen Apparates zu verwirklichen. Ebenso ist durch Justirung zu bewirken, dass die beiden Drehungen genau um 180° erfolgen und symmetrisch zur Maximalinduction liegen.

Die zweite Voraussetzung der Gleichheit beider Windungsflächen F_1 und F_2 kann vom Mechaniker nur näherungsweise hergestellt werden. Zur Correction des noch übrig bleibenden übrigens sehr kleinen Fehlers ist die Vorsorge getroffen, dass beide Rollen in ihren Lagern vertauscht werden können. Man erhält dann durch einen zweiten Versuch ein von R wenig verschiedenes R', für welches nun Stromgleichheit eintritt. Für diesen Versuch gilt dann

$$1\,b. \qquad \frac{V \cdot F_2}{W_2' + R' + w} = \frac{H \cdot F_1}{W_1 + w}$$

Aus 1a. und 1b. folgt

$$2\,b. \qquad \operatorname{tg} i = \frac{V}{H} = \sqrt{\frac{(W_2 + R' + w)(W_1 + R + w)}{(W_1 + w)(W_2 + w)}}$$

und

$$3. \qquad \frac{F_1}{F_2} = \sqrt{\frac{(W_1 + R + w)(W_1 + w)}{(W_2 + R' + w)(W_2 + w)}}.$$

Die Inclination kann also entweder auf Grund zweier Versuche mit Vertauschung der Rollen aus 2b. berechnet werden, oder, nachdem durch 3. das constante Verhältniss $\frac{F_1}{F_2}$ ein für allemal ermittelt ist,[1] auf Grund eines einzigen Versuches nach Gleichung 1a., nämlich

$$\frac{V}{H} = \frac{W_1 + R + w}{W_2 + w} \cdot \frac{F_2}{F_1}.$$

Zum Zwecke der vorgedachten Justirung wird der ganze Apparat auf einen in der Zeichnung nicht vorhandenen starken hölzernen Rahmen gesetzt, welcher sich um einen ungefähr unterhalb $\beta\beta$ befindlichen Zapfen auf dem das Ganze tragenden festen Bocke ein Geringes drehen und sodann festsetzen lässt. Auf diesem Rahmen steht der Apparat mit seinen drei Fussschrauben S. Mit Hülfe einer einfachen Declinationsnadel wird zunächst der ganze Bock so gesetzt, dass die Axe $\alpha\alpha$ näherungsweise in den Meridian fällt. Hierauf richtet man mit Hülfe einer dem Apparate beigegebenen Reiterlibelle die Axe $\alpha\alpha$ horizontal

[1] Das Verhältniss $\frac{F_1}{F_2}$ kann natürlich auch nach anderen bekannten Methoden bestimmt werden.

Digitized by Google

und $\beta\beta$ vertical. Die letztere Einstellung lässt sich dadurch machen, dass dieselbe Libelle auf zwei seitliche Ansätze der in $\beta\beta$ steckenden Rolle gelegt wird. Nun bringt man die Rolle B senkrecht zum Meridian in die (auch in der Figur festgehaltene) Anschlagstellung. Die eine der Anschlagschrauben wird so justirt, dass die Fläche der Rolle B senkrecht zur Axe $\alpha\alpha$ steht, was sich zunächst durch mechanische Ausmessung schon mit einem sehr grossen Genauigkeitsgrade erzielen lässt. Alsdann wird dieselbe Rolle herausgenommen und mit derselben Anschlagschraube in $\alpha\alpha$ zum Anschlag gebracht. Legt man nun die Libelle quer über die Rolle, so sollte dieselbe einspielen, falls die beiden Anschlagplatten bei $\alpha\alpha$ und $\beta\beta$ in derselben relativen Lage gegen die Axen sich befinden. Ist dies nicht der Fall, so muss die Axe $\beta\beta$ in ihren beiden Lagern corrigirt werden. Zu diesem Zweck corrigirt man, während noch B in den Lagern $\alpha\alpha$ liegt, den halben Fehler der Libelleneinstellung an der Anschlagschraube von B und die andere Hälfte durch gleichzeitiges entgegengesetztes Drehen der beiden Fussschrauben S. Nun wird B aus den Lagern $\alpha\alpha$ gehoben, wieder in $\beta\beta$ gesetzt und mit derselben Anschlagschraube wie vorher zum Anschlag gebracht. Jetzt ist sowohl die verticale Lage von $\beta\beta$ als auch die rechtwinkelige Stellung der Rolle B gegen $\alpha\alpha$ nachzucorrigiren, was dadurch bewirkt wird, dass sowohl das untere wie das obere Lager von $\beta\beta$ gelöst und mittelst der ausgiebigen Press- und Zugschrauben, welche dieselben fixiren, justirt wird. Hierauf werden die beiden Anschlagschrauben von A so gestellt, dass in beiden Anschlagstellungen die quer über A gelegte Libelle einspielt. Nun wird das bis dahin gelöste obere Zahnrad der Axe $\gamma\gamma$ so angezogen, dass der bereits justirte eine Anschlag von B und der entsprechende von A gleichzeitig erfolgen. Nachdem dies geschehen, wird der zweite Anschlag von B so justirt, dass er mit dem entsprechenden von A zusammenfällt. Mit diesen Justirungen ist erreicht, dass $\alpha\alpha$ horizontal, $\beta\beta$ vertical liegt; dass ferner die Drehungen beider Rollen von einem Anschlag zum anderen genau um 180° erfolgen und dass in den Anschlagstellungen die Windungsebene der Rolle A horizontal und diejenige von B senkrecht zu $\alpha\alpha$ liegt. Da ausserdem durch verstellbare Flanschenringe auf den Axen der Rollen, sowie auf der Axe $\gamma\gamma$ dafür gesorgt ist, dass die Rolle in $\alpha\alpha$ und die Axe $\gamma\gamma$ innerhalb ihrer eigenen Richtung etwas verschoben werden können, so lässt sich hierdurch der Eingriff der Zahnräder in einander so vollständig reguliren, dass die Drehung der einen Rolle diejenige der anderen ohne das geringste Wackeln oder todten Gang zur Folge hat. Zeigt sich ferner, dass nach Vertauschung der Rollen in ihren Lagern jetzt nicht mehr gleichzeitiger Anschlag derselben stattfindet, so wird dies durch

Digitized by Google

geringe Drehung des oberen Zahnrades der Axe $\gamma\gamma$ mittelst zweier Zugschrauben leicht bewirkt.

Es erübrigt nun noch die bisher nur näherungsweise gemachte Einstellung von $\alpha\alpha$ in den Meridian mit grösster Schärfe zu bewirken. Zu diesem Zwecke genügt es, wenn Rolle B (in $\beta\beta$ befindlich) zum Anschlage gebracht und in dieser Stellung senkrecht gegen den Meridian durch Drehen des ganzen Apparates gerichtet wird. Man erreicht dies durch einen dem Apparate beigegebenen Ringmagnet mit Spiegelablesung, der innerhalb eines starken kupfernen Dämpfers mittelst Bayonnettverschluss in die Mitte von Rolle B gestellt wird. Lässt man nämlich jetzt einen Strom von passender Stärke so durch B hindurchgehen, dass für den Mittelpunkt die erdmagnetische Horizontalkraft nahezu compensirt wird, so muss der Magnet unverändert einspielen, falls Rolle B senkrecht zum Meridian stand.

Zur Controle der richtig gemachten Justirungen kann man noch das Magnetometergehäuse in die Mitte der in $\alpha\alpha$ befindlichen, in ihre Mittellage (d. h. mit senkrechter Windungsfläche) gebrachten Rolle einhängen. Lässt man sodann einen constanten Strom in entgegengesetzten Richtungen durch A hindurchgehen, so müssen die Ablenkungen gleich gross ausfallen.

Man kann sich nun auch noch durch directen Versuch überzeugen, dass bei der Drehung der Rollen keinerlei Inductionswirkung von der einen zur anderen ausgeübt wird. Zu diesem Zwecke rückt man die in $\alpha\alpha$ liegende Rolle aus dem Zahnrade aus, schliesst den Kreis einer der Rollen in sich, während die andere mit dem Galvanometer verbunden wird. Dreht man erstere bei beliebiger Stellung der zweiten, so darf nicht das geringste Zucken der Galvanometernadel eintreten.

Endlich ergiebt sich aus dem Verhalten des Galvanometers bei der Beobachtung selbst eine Controle dafür, ob beide Rollen genau gleichzeitig durch die Mittellage, d. h. durch die Stelle der maximalen Induction hindurchgehen. Ist dies nämlich der Fall, so macht die Galvanometernadel bei Drehung und Rückdrehung genau gleiche, nur nach je einer Seite der Nulllage gehende Ausschläge, eventuell bei völliger Gleichheit der Ströme den Ausschlag Null. Andernfalls werden die Ausschläge ungleich und bei Gleichheit der Integralströme macht die Nadel während der ersten Hälfte der Drehung einen kleinen Ausschlag nach der einen, und während der zweiten Hälfte der Drehung einen solchen nach der anderen Seite. Diese Beobachtung ist indessen nur dann zu machen, wenn das Galvanometer vollkommen aperiodisch ist, wie das bei dem von mir benutzten Siemens'schen Glockengalvanometer der Fall ist.

Digitized by Google

Die wesentliche Einrichtung des vorzüglich solide und elegant gearbeiteten Apparates wird aus Vorstehendem mit Hülfe der Fig. 1 hinreichend deutlich zu entnehmen sein. Bezüglich der Dimensionen füge ich hinzu, dass die Durchmesser der Rollen 30^{cm} betragen. Jede Rolle hat 130 Windungen 1^{mm} dicken Drahtes. Die Zuleitungen geschehen mittelst Kupferbandspiralen und starker zu den Klemmschrauben k führender inductionsfrei angebrachter Drähte. Die Widerstände der Rollen betrugen für Rolle A, $W_1 = 2.912$ S. E.; für Rolle B, $W_2 = 2.879$ S. E. Diese Widerstände sind näherungsweise gleich den Widerständen der beiden Galvanometerrollen gewählt, da es ursprünglich in meiner Absicht lag, das Galvanometer als Differentialgalvanometer zu benutzen. Für die Herstellung der beiden Stromkreise und die darin einzuschaltenden Widerstände war ein SIEMENS'scher Universal-Widerstandskasten mit Brücke unmittelbar geeignet. Die beiden gleichen Widerstände w wurden zu je 10 S. E. genommen. Zur Beobachtung der Galvanometerausschläge benutzte ich ein stark vergrösserndes HARTMANN'sches Fernrohr und eine Glasscala von ZEISS mit transparenter Beleuchtung, so dass noch eine Abschätzung bis auf 0.02 Mm. bei einem Scalenabstand von 1^{m} möglich war.

Als Beispiel der Anwendung des Apparates lasse ich drei Beobachtungsreihen mit zweimal vertauschten Rollen folgen, wobei zu bemerken ist, dass man, nachdem ein für allemal das Verhältniss der Windungsflächen festgestellt ist, nur die mittlere Reihe gebraucht. Um denjenigen Widerstand R bez. R' möglichst genau zu bestimmen, bei welchem der Ausschlag Null ist, wurden nach vorläufiger ungefährer Feststellung desselben die benachbarten Widerstände in fortlaufender Reihe gestöpselt und die jedesmaligen Ausschläge notirt, welche hierbei durch Null hindurchgehen mussten. Ausserdem wurden bei jedem Widerstande zwei Beobachtungen gemacht, entsprechend einer Rechts- und einer Linksdrehung des Apparates. Die hierbei eintretenden Ausschläge waren aus den im Vorstehenden erörterten Gründen bei sich ändernder Declination mitunter etwas verschieden und es wurde deswegen aus beiden das Mittel genommen. Eine Beobachtungsreihe liess sich in etwa 5 — 10 Minuten machen. Der die Drehung besorgende zweite Beobachter stand auf einer quer über den Fussboden gelegten starken Holzbohle, um möglichst wenig Erschütterung durch seine Bewegungen zu verursachen.

Die Vorzeichen der bei den Rückdrehungen erfolgenden Ausschläge sind in folgender Tabelle gleich entgegengesetzt verzeichnet.

Digitized by Google

R resp. R' in S. E.	Ausschläge bei Rechts-Drehung	Ausschläge bei Links-Drehung	Mittel	
	1. Satz. Rolle A in $\beta\beta$; Rolle B in $\alpha\alpha$.			
14.7	− 0.15	− 0.15	− 0.15	
14.8	− 0.10	− 0.15	− 0.12	
14.9	− 0.02	− 0.05	− 0.03	
15.0	− 0.02	+ 0.05	+ 0.01	Durch Interpolation für Ausschlag Null: $R' = 14.97$
15.1	+ 0.10	+ 0.08	+ 0.09	
15.2	+ 0.10	+ 0.12	+ 0.11	
15.3	+ 0.15	+ 0.15	+ 0.15	
15.4	+ 0.15	+ 0.20	+ 0.17	
	2. Satz. Rolle A in $\alpha\alpha$; Rolle B in $\beta\beta$.			
15.1	− 0.30	− 0.20	− 0.25	
15.2	− 0.10	− 0.10	− 0.10	
15.3	− 0.05	− 0.05	− 0.05	
15.4	+ 0.05	+ 0.05	+ 0.05	
15.5	+ 0.10	+ 0.15	+ 0.12	$R = 15.36$
15.6	+ 0.10	+ 0.20	+ 0.15	
15.7	+ 0.20	+ 0.20	+ 0.20	
15.8	+ 0.25	+ 0.25	+ 0.25	
15.9	+ 0.35	+ 0.35	+ 0.35	
	3. Satz. Rolle A in $\beta\beta$; Rolle B in $\alpha\alpha$.			
14.5	− 0.25	− 0.25	− 0.25	
14.6	− 0.15	− 0.20	− 0.17	
14.7	− 0.15	− 0.15	− 0.15	
14.8	− 0.08	− 0.12	− 0.10	
14.9	− 0.05	− 0.05	− 0.05	
15.0	− 0.02	0.00	− 0.01	$R' = 15.01$
15.1	+ 0.05	+ 0.05	+ 0.05	
15.2	+ 0.10	+ 0.10	+ 0.10	
15.3	+ 0.12	+ 0.10	+ 0.11	
15.4	+ 0.20	+ 0.15	+ 0.17	
15.5	+ 0.30	+ 0.20	+ 0.31	
				Mittel aus Satz 1 und 3: $R' = 14.99$ $R = 15.36$

Hieraus ergiebt sich zufolge Formel 3. das Verhältniss beider Windungsflächen

$$\frac{F_1}{F_2} = 1.00813$$

und zufolge 2b. der Inclinationswinkel

$$i = 65^\circ\ 20'\ 0''.$$

Digitized by Google

Dieser für die Inclination gefundene Werth ist nun kein absoluter für Breslau geltender, da das Beobachtungslocal nicht ganz eisenfrei war. Dagegen lässt sich aus den angeführten Zahlen die Genauigkeit des Verfahrens beurtheilen. Aus einer genaueren Betrachtung derselben, insbesondere aus einer zum Zwecke der Interpolation gemachten graphischen Darstellung der Ausschläge als Functionen der Widerstände geht zwar hervor, dass die zweiten Decimalen der beobachteten Scalentheile nicht mehr ganz sicher sind und dass in Folge dessen auch eine Unsicherheit der zweiten Decimale der Widerstände eintritt. Ich glaube indessen nicht zu viel zu behaupten, wenn ich die Unsicherheit in den obigen Beobachtungen für R auf $\pm$ 0.02 S. E. abschätze. Dies würde einem Fehler des Inclinationswinkels von $\pm$ 56″ oder rund von einer Bogenminute entsprechen. Die Grösse dieses Fehlers scheint mir innerhalb der Grenze derjenigen Fehler zu liegen, welche für Inductionsinclinatorien überhaupt aus der Aufstellung und Horizontirung entspringen. Bis auf jenen Fehler von $\pm$ 1 Minute lässt sich also die Inclination nach zuvoriger Justirung und nach Ermittelung des Verhältnisses der Windungsflächen durch eine einzige in etwa fünf Minuten zu machende Beobachtungsreihe bestimmen.

Digitized by Google

Digitized by Google

57. Zur physiologischen Bedeutung des Gerbstoffes in den Pflanzen.

Von Dr. Max Westermaier.

(Vorgelegt von Hrn. Schwendener am 19. November; — gedruckt im Bericht vom 3. December [St. XLIX]; — ausgegeben am 10. December.)

Hierzu Taf. VIII.

Die vorliegende Mittheilung bezieht sich im Allgemeinen auf den Chemismus in den Assimilationszellen, insbesondere auf eine während und am Schluss der Vegetationsperiode in diesen Zellen reichlich vertretene chemische Verbindung. Es soll nämlich gezeigt werden, dass der Gerbstoff, dessen Auftreten im Parenchym des Blattes, der Rinde u. s. w. längst bekannt ist, in den eigentlichen Stätten der Assimilation und in deren Umgebung in einer Weise vorkommt, dass der Schluss auf eine Rolle beim Assimilationsprocess selbst gerechtfertigt erscheint.

Pringsheim[1] fand an der Chlorophyllplatte von *Mesocarpus scalaris* »Gerbstoffbläschen« in grosser Zahl. Schnetzler[2] wies durch Eisensalz nach, dass in Süsswasseralgen (*Vaucheria, Spirogyra, Conferva* u. s. w.) eine bedeutende Quantität Tannin enthalten sei. Es gelingt auch leicht, zu zeigen, dass ein reichliches Vorkommen von Gerbstoff in vielen Palissadenzellen von *Dikotylen* eine verbreitete Erscheinung ist. Übrigens hat bekanntlich Pringsheim nicht nur obige Thatsache festgestellt, sondern auch direct seine Ansicht dahin ausgesprochen (S. 354, 355), jene Gerbstoffbläschen seien Bildungsproducte der Chlorophyllkörper.

Da ferner auch die Frage noch nicht entschieden ist, »ob im photochemischen Zerlegungsacte der Kohlensäure bei verschiedenen Pflanzen nicht etwa verschiedene primäre Assimilationsproducte entstehen«,[3] so verdient das häufige und reichliche Vorkommen des genannten Körpers (Gerbstoff) im Inhalt der assimilirenden Zellen sicherlich genaue Beachtung.

[1] Pringsheim's Jahrbücher XII S. 354: »Über Lichtwirkung und Chlorophyllfunction in der Pflanze«.

[2] Archives des Sc. phys. et nat. 1879; citirt im Bot. Centralblatt Bd. 16, S. 157.

[3] Dies der Wortlaut einer Stelle aus der von der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1884 gestellten Preisaufgabe.

Digitized by Google

§. 1.

Nach ein- bis mehrtägiger Einwirkung des sauren chromsauren Kalis (vielfach auch sofort) lässt sich in dem Assimilationsgewebe der Blätter von *Rosa, Mespilus germanica, Salix fragilis, Sal. pentandra, Drymis Winteri, Quercus pedunculata, Corylus Avellana, Ligustrum vulgare, Ribes*-Arten theils in allen, theils in vielen Palissadenzellen ein körniger oder tropfiger rothbrauner Körper beobachten. Diese Reaction wurde bei *Rosa, Corylus Avellana, Drymis Winteri, Ligustrum vulgare, Ribes aureum* zu Beginn der warmen Jahreszeit, nämlich ungefähr Anfang Juni gemacht; andere Pflanzen wurden erst später in dieser Art untersucht.

Dass wir hier die von Sanio vorgeschlagene Gerbstoffreaction vor uns haben, bestätigt uns die Controlreaction mit Leimlösung. Gelatinelösung zu Flächenschnitten aus der oberen Blattseite von *Mespilus germanica* gebracht, verursachte alsbald die Entstehung eines deutlichen membranartigen Niederschlags von gerbsaurem Leim am Rand der Schnitte (August). Ferner erhielt ich im September bei Untersuchung der Blätter von *Drymis Winteri* einen erheblichen schmutzig gelblichen Niederschlag mit Gelatinelösung an den dicken Schnitträndern, welche zahlreiche verletzte Zellen darboten. An Blattflächenschnitten von *Salix fragilis* war ebenfalls (30. September) in Gelatinelösung deutlich ein membranartiger Niederschlag zu sehen. Besonders gut ist die Reaction mit Leimlösung an grünen Laubblättern der Rose zu beobachten. Bei der diesbezüglichen Untersuchung am 30. September traten an einem Schnittrand mit grosser Schnelligkeit zahlreiche sogenannte anorganische Zellen, d. h. Blasen aus gerbsaurem Leim auf. Abgesehen von Blättern wurde auch noch das Markgewebe von *Rosa* und die secundäre Rinde des Stammes von *Drymis* mit Leimlösung untersucht und ergaben Niederschläge; die Beobachtung am Stamm von *Drymis* datirt vom 4. Juli. Gelegentlich wurde endlich auch Eisenchlorid mit Erfolg zur Reaction benutzt.

Zur eigentlichen Untersuchung aber wendete ich regelmässig das saure chromsaure Kali in concentrirter Lösung an; es befanden sich in dem Reactionsgefäss, das die zu untersuchenden Pflanzenstücke sammt der Lösung enthielt, gewöhnlich noch ungelöste Krystalle des Salzes. Nach ein- bis mehrtägigem Einwirken des Reagens wurden die Schnitte angefertigt.

Eine deutliche Stärkereaction (Blaufärbung mit Jod) trat in den Palissadenzellen von *Rosa, Mespilus germanica, Salix pentandra* nicht ein; bei *Salix fragilis* beobachtete ich wenig oder keine Stärke in den Palissaden; bei *Drymis Winteri* trat etwas Stärkereaction ein.

Digitized by Google

Wir gehen von den Gerbstoff führenden typischen Assimilationszellen zur Betrachtung der sich anschliessenden Elemente des Blattgewebes über. Ich verweise zugleich auf die Figuren 1, 3 und 4.

Die Tanninreaction tritt in hervorragender Weise in den Gefässbündelscheiden auf.[1] Unsere Bilder zeigen uns, dass von einer lückenlosen mikrochemischen Verfolgung des Gerbstoffs in jener Region gesprochen werden muss, die uns durch HABERLANDT's[2] bekannte Arbeit zu genauerer Kenntniss kam. Man sieht auf dem Querschnitt der Bichromatpraeparate nicht bloss jedes Leitbündel umgeben von einem braunen Zellkranz, sondern auch die »zuleitenden« Zellen sind mit Tannin versehen. Ferner führen in grösseren Gefässbündeln zahlreiche Elemente des Leptoms und Hadroms Gerbstoff. Dieser letztere Umstand lässt, nebenbei bemerkt, die betreffenden Zellformen des Leptoms und Hadroms unter sich physiologisch gleichwerthig erscheinen. Instructive Bilder ähnlicher Art, wie das in Fig. 1 gegebene, welches von *Mespilus germanica* stammt, erhält man auch von *Quercus pedunculata, Rosa, Corylus Avellana.*

Trotz der Wahrscheinlichkeit einer wirklichen Wanderung des Gerbstoffs, welche sich aus diesem mikrochemischen und anatomischen Befund ergiebt, ist immer noch der Einwurf gerechtfertigt, dass der Gerbstoff eben überall da, wo er gefunden wurde, an Ort und Stelle entstanden sei, nicht aber von Zelle zu Zelle wandere. Zur Begründung der Behauptung nun, dass das Tannin wirklich wandere, stütze ich mich auf die im folgenden Paragraphen näher zu besprechenden Beobachtungen.

Es geht nämlich dem herbstlichen Abfall der Blätter eine mehr oder weniger ausgiebige Verminderung des Gerbstoffgehalts der Palissadenzellen voraus. Dass diese Abnahme aber eine Auswanderung in den Stamm bedeute, schliesse ich daraus, dass durch Unterbrechung oder Einschränkung der Bahn vermittels vollständiger Ringelung in der That eine Anhäufung von Gerbstoff im Blattgewebe herbeigeführt werden kann.

§. 2.

Betrachten wir also zuerst das Verhalten von Blättern, die sich zum Abfall anschicken, und zwar zunächst an *Quercus pedunculata.* Die Palissadenzellen des grünen Blattes zeigten etwa am 18. September auf dem Blattflächenschnitt nach längerer Behandlung mit saurem

[1] Vergl. hierüber auch WARMING, Bot. Centralbl. Bd. 16 S. 350.

[2] HABERLANDT, »Vergleichende Anatomie des assimilat. Gewebesystems«. PRINGSHEIM's Jahrb. Bd. XIII.

Digitized by Google

chromsauren Kali allgemein eine braunkörnige Masse in der Mitte jeder Zelle; ein Kranz von Chlorophyllkörnern umgab diese Substanz, und zwar so, dass das Chlorophyll sich nach innen ziemlich dicht an den braunen Körper anlegte. Deutlich zeigten auch die Blattquerschnitte diese bräunlichen Massen. Ein gleichzeitig untersuchtes, schon gelbes Blatt liess die Palissadenzellen fast entleert erscheinen; auch das Chlorophyll war ganz oder grossentheils verschwunden.

In Bezug auf den gegen den Winter hin abnehmenden Gerbstoffgehalt der Eichenblätter liegen übrigens bereits ältere Untersuchungen[1] vor. Nach Handtke (1863), so entnehme ich dem Citat, enthielten die Blätter des Frühlingstriebes der Stieleiche in 100 Theilen Trockensubstanz am 1. Juni 12.87 Theile Gerbsäure, am 9. Juli 9.40 Theile, am 5. August 7.43 Theile. Die Blätter der Zerreiche enthielten nach Oser (1875) im Mai 7.91, im November 5.14 Procent durchschnittlichen Gerbstoffgehalt im lufttrockenen Zustand.

Ein anderes Untersuchungsobject boten mir die Blätter von *Ribes aureum*. Im Sommer findet man in einer grösseren Anzahl von Palissadenzellen Gerbstoff. Am 24. September waren die meisten Blätter noch grün; es wurden jetzt ein grünes und mehrere gelbe Blätter vom Strauch abgenommen und die Reaction mit Kaliumbichromat gemacht. Im grünen Blatt waren auf dem Flächenschnitt in zahlreichen Palissaden tiefrothbraune Massen zu sehen, umgeben vom Kranz der Chlorophyllkörner. Hingegen zeigte ein gelbes Blatt in zerstreuten Palissadenzellen heller braun gefärbte Massen, also geringere Gerbstoffreaction.[2] Bei einem andern gelben Blatt blieb in den Palissadenzellen des untersuchten Flächenschnittes eine erhebliche Gerbstoffreaction so zu sagen ganz aus. Ferner erwiesen sich Grundgewebe und Leitbündel des Stiels am grünen Blatt als gerbstoffreich, während wenigstens in Grundgewebezellen des Stiels eines gelben Blattes Gerbstoffquantitäten beobachtet wurden, die man als zurückgebliebene Reste deuten konnte.

Nach Beobachtungen an *Mespilus germanica* und *Quercus pedunculata*, insbesondere an erstgenannter Pflanze, zeigen übrigens die herbstlich gefärbten Blätter verschiedene Abstufungen von starker bis zu schwacher Reaction, so dass es entschieden unrichtig wäre zu sagen, sobald ein Blatt am Baume gelb geworden, sei es gerbstoffarm. Im Allgemeinen folgere ich indess aus den obigen und ähnlichen Beobachtungen, dass der Gerbstoffgehalt der Palissadenzellen und des Blattgewebes überhaupt vor dem Abfall der Blätter durch Auswanderung in den Stamm

[1] S. Ebermayer, Physiologische Chemie der Pflanzen. S. 442, 443.

[2] Über diese Farbenscala vergleiche man E. Kutscher, Flora 1883. »Über die Verwendung der Gerbsäure im Stoffwechsel der Pflanze«.

Digitized by Google

eine Verminderung erfährt, die einer vollständigen Entleerung selten nahe kommt.

Vorsicht verlangt bei dieser Untersuchung der Umstand, dass in ausgetrockneten herbstlich gefärbten Blättern, wie sie z. B. bei der Eiche gewöhnlich angetroffen werden, der Gerbstoffgehalt schon deshalb ein geringer zu sein scheint, weil der Zellinhalt an die Wände zurückgezogen erscheint.

Ich komme in der Darlegung des anatomischen und mikrochemischen Befundes zu einem Fall, dessen bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit in meinen Figuren 3 und 4 hervortritt. Ein Blatt von *Salix fragilis* zeigt auf dem Querschnitt nach vorausgegangener Behandlung mit doppelt chromsaurem Kali einen ziemlich schroffen Gegensatz zwischen dem oberen und dem unteren der beiden hier vorhandenen Palissadenstockwerke; ähnlich verhält sich eine als *Salix pentandra* bestimmte Species und höchst wahrscheinlich auch beliebige andere einheimische Arten dieser Gattung. Der erwähnte Gegensatz spricht sich im Zellinhalt aus. Das obere Stockwerk ist gerbstoffreich, das zweite gerbstofffrei; so die allgemeine Regel bei den grünen Blättern. Für diese Localisirung fehlt mir zwar zur Zeit eine physiologische Deutung, doch dient dieses Object dazu, ein anderes Verhältniss, das in den Kreis unserer Betrachtung gehört, zu beleuchten. Dies soll in den folgenden Zeilen geschehen.

Von *Salix pentandra* war ein Zweig Ende Juni geringelt worden. Von diesem Zweig wurde am 8. August ein schon etwas gelblich grün aussehendes Blatt untersucht: die gelblich grüne Farbe deutete wohl auf baldigen Abfall. Hier war nun auch stellenweise das zweite Stockwerk der Palissaden in eigenthümlicher Weise durch Gerbstoffgehalt ausgezeichnet. Wo nämlich grössere Leitbündel das Blattgewebe durchzogen, da schlossen sich tanninführende assimilirende Zellen des ersten Stockwerks und Gefässbündelscheiden, die mit Gerbstoff versehen waren, unmittelbar an einander an (Fig. 3); denn das Leitbündel ist ja zwischen die Palissadenzellen gewissermaassen eingeschoben. Wo hingegen solche kleine Bündel im Blattgewebe verliefen, die das obere Stockwerk nicht erreichten, vielmehr durch die zweite Palissadenschicht von ihm getrennt waren, da fanden sich manchmal förmliche »Gerbstoffbrücken« (Fig. 4). Diese Brücken sind also durch gerbstofffführende Zellen, die im Niveau der zweiten Palissadenschicht liegen, hergestellt. Im November untersuchte ich auch noch Blätter von normalen (ungeringelten) Zweigen von *Salix fragilis*. Dieselben waren noch grün und nicht abgefallen. Auch in diesen fanden sich ähnliche Brücken. Ich glaube in diesem Vorkommniss einen auffälligen anatomischen Hinweis auf die Überführung des Gerbstoffs aus den

Digitized by Google

grünen Zellen in die Leitbündelelemente resp. ihre Parenchymscheiden erblicken zu sollen. Die besprochenen Brücken treten nach meiner Auffassung zur Zeit der lebhaftesten Wanderung in Function.

An diesen Fall müssen noch einige weitere Bemerkungen angeknüpft werden.

Localisirungen des Gerbstoffgehalts innerhalb des typischen Assimilationsgewebes finden sich auch bei anderen Pflanzen da und dort, jedoch in anderer Art, als beim Weidenblatt beschrieben wurde. Es sind nämlich bei manchen Pflanzen zerstreute Palissadenzellen durch Tanningehalt ausgezeichnet, während die nebenliegenden die Reaction nicht zeigen; dies beobachtete ich bei *Evonymus europaeus, Cinnamomum, Hedera Helix*. Aus diesem verschiedenen mikrochemischen Verhalten von Palissadenzellen, die man als physiologisch gleichwerthige Elemente zu betrachten pflegt, scheint zu folgen, dass es sich beim Assimilationsprocess oder, genauer gesprochen, bei den chemischen Vorgängen in den typischen Assimilationszellen um eine Arbeitstheilung handelt, der gemäss in den Elementen derselben Palissadenschicht — bei *Salix* in den respectiven Zellen der verschiedenen Stockwerke desselben Blattes — ungleichartige Stoffe entstehen.[1] Eine nähere Verfolgung dieses Gegenstandes habe ich bis jetzt nicht vorgenommen.

Für's Zweite möchte ich die Art der Gerbstoffvertheilung, die uns im Weidenblatt begegnete, als einen Hinweis darauf betrachten, dass es sich beim Vorkommen dieses Körpers im Assimilationssystem nicht um ein unbrauchbares Ausscheidungsproduct handelt. Es widerstrebt der physiologischen Auffassung, unnütze Excrete gerade in derjenigen Zelllage sich aufspeichern zu lassen, deren Elemente eine so günstige Lagerung für die Assimilationsthätigkeit besitzen. Es wird sich vielmehr die Ansicht Wigand's bestätigen, welcher Forscher bekanntlich schon vor längerer Zeit dem Gerbstoff eine wichtigere Rolle im Stoffwechsel zuschrieb, und Pfeffer's in diesem Sinne gehaltene Äusserung[2] enthält auch bereits eine Anerkennung der hier im Allgemeinen vertretenen Ansicht. Als fernere vorzügliche Objecte, geeignet zur Bekämpfung der Lehre, der Gerbstoff sei überall da, wo er auftrete, ein unnützes Material, möchte ich an dieser Stelle insbesondere bezeichnen: Blatt und Stamm von *Drymis Winteri*, Blätter von *Quercus pedunculata* und von *Mespilus germanica*.

Oben habe ich angegeben, man könne durch Entfernung eines Rindenringes eine Ansammlung von Gerbstoff in Blättern herbeiführen.

---

[1] Hierher gehören auch die von Heinricher beobachteten Idioblasten. »Über Eiweissstoffe führende Idioblasten bei einigen Cruciferen.« (Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. II. S. 463.

[2] Physiologie, S. 306 Bd. I.

Digitized by Google

Diesbezügliche Versuche machte ich an *Ligustrum vulgare,* sowie an *Mespilus germanica.* Die Ringelung geschah etwa am 8. August; die Untersuchung der betreffenden Blätter. die über der Ringelung sich befanden, erfolgte gegen Ende September. Besprechen wir zuerst den Fall von *Ligustrum.* Das Blatt von *Ligustrum vulgare* ist zwar überhaupt nicht sehr reich an Gerbstoff, doch zeigte sich, dass in den Palissadenzellen eines Blattes über der Ringelungsstelle eine intensivere Reaction eintrat, als in denjenigen des normalen Blattes.

In Folge der Ringelung wurden die Blätter zu frühzeitigerem Abfall gebracht. Diese Blätter zeigen vielfach schon makroskopisch eine rothbraune Färbung an grösseren Partien ihrer Oberseite. Man beobachtet Erythrophyll in den Zellen. Ähnliche Färbungen nehmen beim gewöhnlichen Laubfall auch viele normale Blätter von *Ligustrum* an. Doch ist hierbei Folgendes bemerkenswerth.

In den Ringelungsblättern trat das Erythrophyll vorzugsweise in den Palissadenzellen auf; bei jenen ähnlich gebräunten normalen Blättern dieser Pflanze aber, welche später beim gewöhnlichen Laubfall sich zeigten, war der rothe Farbstoff besonders in den oberen Epidermiszellen vertreten.

Gehen wir zu *Mespilus germanica* über. Auch hier zeichneten sich die Blätter des im August geringelten Zweiges Ende September schon äusserlich durch ihre eigenthümlich grünrothe Oberseite aus. Die grünen Blätter waren noch zahlreich, die herbstlich gelben Blätter noch nicht sehr häufig. Unsere Gerbstoffreaction ergab nun bei Blättern des geringelten Zweiges sehr massenhaft den braunen Körper. In den Palissadenzellen und Schwammgewebezellen dieses Blattes erfüllten die braunen Massen grösstentheils die Lumina. Die Chlorophyllkörner erschienen öfter wie zu einem zusammenhängenden Wandbeleg zusammengedrückt, oder zeigten sich in einzelnen Klumpen vertheilt. In dem normal grünen Blatt sieht man neben der auch hier beträchtlichen braunen Masse doch auch noch die Chlorophyllkörner einen geräumigen Theil des Zelllumens ausfüllen.

Die Deutung der bei *Ligustrum* und *Mespilus* beobachteten und soeben besprochenen Erscheinung möchte ich in folgender Weise geben. Das Vorhandensein grösserer Gerbstoffmengen im Assimilationsgewebe der Blätter von Zweigen, die sieben Wochen lang im Laufe der Vegetationsperiode geringelt waren, verglichen mit den Ende September noch grünen Blättern ungeringelter Zweige, legt den Schluss nahe, dass erstens durch die Rinde des Stammes eine Auswanderung des Gerbstoffs erfolgt: Unterbrechung (oder Einengung) der Bahn hemmt diese Wanderung oder staut sie. Für's Zweite ergiebt sich die Folgerung, dass in den Assimilationszellen auch die Bildungsstätte des

Digitized by Google

Gerbstoffs zu suchen ist. Denn nach einer Beobachtung an *Mespilus germanica* ist die Gerbstoffreaction, die man Ende September im Palissadengewebe des geringelten Zweiges beobachtet, so stark, wie sie Anfangs August in normalen Blättern nicht gesehen wird. Es hat sich also in den normalen Blättern, bei gleichzeitiger Auswanderung Gerbstoff gebildet, in den Ringelungsblättern dagegen bei gehemmter Auswanderung, daher die Anhäufung (Stauung) in letzteren.

Bevor ich zur Erörterung einiger einschlägiger Verhältnisse im Speicherungsgewebe übergehe, sei mir gestattet; über die Arbeit von H. Pick[1] eine Bemerkung hier einzufügen. Mit Recht hebt der Verfasser hervor (S. 284), dass das Vorhandensein von Gerbstoff in jungen Blättern keineswegs das Rothwerden unbedingt nothwendig macht. Diese Äusserung gilt aber auch von älteren Blättern und allen jenen zahlreichen Elementen der Leitbündel und des Speichergewebes, welche farblos sind und Tannin führen. Während für den genannten Autor der Gerbstoff vorzüglich als Erzeuger jenes rothen Farbstoffs Interesse hatte, welcher die Stärkewanderung befördert, ziehe ich hier den Gerbstoff als solchen in Betracht: nach meiner Auffassung wandert er so zu sagen um seiner selbst willen. Interessant musste mir auch die Angabe Pick's sein (S. 283 u. f.), dass man in Blättern von *Populus*-Arten, die nicht insolirt sind, das Verschwinden des Gerbstoffs bei der allmählichen Entwickelung der Blätter auf's Beste verfolgen könne. Diese Bemerkung streift natürlich den Gedanken, der mir bei vorliegender Untersuchung besonders vorschwebte, dass das Tannin nämlich am Assimilationsprocess betheiligt, bez. ein Product desselben sei.

§. 3.

Wenn ich im Folgenden einen Blick auf die Art des Vorkommens von Gerbstoff in der Ruheperiode werfe, betrete ich ein ziemlich bekanntes Gebiet.

Holzparenchym und Markstrahlen der *Dikotylen* fungiren bekanntlich in der Periode der Vegetationsruhe als Speicherungsgewebe; nebst der Markkrone, manchen anderen Markzellen und insbesondere zahlreichen Elementen der Rinde findet man die in Rede stehenden Gewebe mit Reservestoffen reichlichst erfüllt, und zwar ist nach den Untersuchungen mehrerer Autoren — ich nenne Wigand und Sanio — der Gerbstoff hierbei bald mehr bald weniger vertreten. An diese Thatsache er-

[1] Pick, »Über die Bedeutung des rothen Farbstoffes bei den Phanerogamen und die Beziehungen desselben zur Stärkewanderung«. Bot. Centralbl. Bd. 16, 1883.

Digitized by Google

innernd möchte ich zunächst nur noch einige analoge Fälle aus der Gruppe der Gefässkryptogamen anführen.

Die Untersuchung eines Blattstiels von *Cyrtomium falcatum* Ende December ergab nachstehendes Resultat. Die Kaliumbichromatreaction trat erstens in den zwischen und an den trachealen Elementen liegenden Zellen ein, zweitens in dem Zellkranz innerhalb der Schutzscheide und endlich in einzelnen Elementen mitten im Leptom.[1] Auch in der Wurzel von *Struthiopteris germanica* fand ich reichlich Gerbstoff in den Gefässbündeln. Nachträglich sei hier noch hinzugefügt, dass im Juli auch in den Assimilationszellen und der Epidermis des Blattes von *Struthiopteris germanica* eine deutliche Reaction mit saurem chromsaurem Kali eintrat, sowie in dem Gefässbündel des Fiederblattstiels. In einem *Marsilia*-Blattstiel endlich waren es bestimmte Rindenzellreihen, die sich durch die genannte Reaction hervorthaten; letztere Beobachtung wurde Ende Februar gemacht.

Zwei Fälle aus der Abtheilung der *Monokotylen* seien gleichfalls noch mitgetheilt. Im Blatt von *Scirpus natalensis* fand sich einerseits in manchen Zellen mitten aus dem grünen Gewebe Gerbstoffreaction, andererseits im Holzparenchym der Gefässbündel, ferner im Holzparenchym des Stengels von *Cyperus alternifolius*. (Beide Beobachtungen datiren aus der Winterzeit.)

Dass also Gerbstoff auch in den als Speichergewebe fungirenden Zellformen der Gefässbündel stark vertreten ist, unterliegt wohl keinem Zweifel.

§. 4.

Wenn wir im Obigen gesehen haben, dass zu den chemischen Verbindungen, die in den Stätten der Assimilation in charakteristischer Weise vorkommen, bei einer Anzahl von Pflanzen auch der Gerbstoff hinzuzufügen ist, so folgt daraus, dass der Eingangs dieser Mittheilung citirten Beobachtung PRINGSHEIM's an *Mesocarpus* eine grössere Tragweite zukommt. Die Klarstellung dieses Auftretens von Tannin im Assimilations-, Leitungs- und Speicherungsgewebe giebt mir zu folgender Schlusserwägung Veranlassung.

Der Gedanke WIGAND's, dass eine gewisse physiologische Wechselbeziehung zwischen Stärke und Gerbstoff bestehe, gestattet eventuell eine noch viel weiter gehende Durchführung, als dieser Autor ur-

[1] Das letztere Gewebe sammt dem Zellkranz innerhalb der Schutzscheide hat sein Analogon in den tanninführenden Elementen der secundären Rinde des *Dikotylen*-Stammes.

Digitized by Google

sprünglich im Auge hatte. Denn es ist jetzt thatsächlich die Frage nahe gerückt, ob sich die Analogie zwischen beiden Körpern in ihrer Eigenschaft als Reservestoffe nicht auch auf andere wichtige Functionen erstreckt. Dafür, dass Gerbstoff im Assimilationsprocess bei manchen Gewächsen als hauptsächliches näheres oder entfernteres Product entsteht, sprechen im Wesentlichen die in dieser Mittheilung enthaltenen Thatsachen. KUTSCHER's oben citirte Arbeit aber lieferte Beispiele für eine Verwendung des Gerbstoffes in wachsenden Geweben.

Bezüglich der Annahme, der Gerbstoff sei bei manchen Pflanzen als Assimilationsproduct zu betrachten, habe ich noch Folgendes zu bemerken. Nach meinen bisherigen Beobachtungen ist nicht anzunehmen, dass das Tannin, wie das mehrfach von der Stärke gilt, ebenfalls bei Dunkelheit auswandere; denn es ist mir nur in einigen wenigen Fällen gelungen, darauf hinweisende Versuchsergebnisse zu erhalten; bei Verdunkelung lebender Blätter wurde nur in einem Fall Fehlen des Gerbstoffes, ein anderes Mal geringere Reaction beobachtet; wieder andere Versuche schienen zu widersprechen. Die Auswanderungsbedingung eines Assimilationsproductes ist eine Sache für sich. Für den Beweis, dass der Gerbstoff in den Palissaden nur am Licht entstehe, mangelt mir zur Zeit noch eine sichere experimentelle Erfahrung.

Wenn nun nach dem gegenwärtigen Stand der Dinge die oben angedeutete dreifache Analogie zwischen Amylum und Gerbstoff wahrscheinlich ist, so ist ausser diesem für den Gerbstoff noch ein Weiteres rücksichtlich seiner physiologischen Rolle hinzuzufügen.

Aus anatomischen Gründen ist nämlich zu schliessen, dass dem Tannin eine Bedeutung für die Entstehung der Eiweissstoffe zukommt. Denn trotz jener Gleichwerthigkeit der im Leptom und im Hadrom vorkommenden Elemente, welche uns eben durch ihren Gerbstoffgehalt in die Augen springt, zeigt sich doch noch das im Eiweiss führenden Mestomtheil gelegene Gewebe der *Dikotylen* besonders reich an Tannin; man möchte dieses Gewebe manchmal als ein permanent Gerbstoff führendes System bezeichnen. Zur Illustration der anatomischen Verhältnisse, die hier in Rede stehen, mag auch meine Fig. 2 dienen, welche eine Partie aus der secundären Rinde von *Vitis vinifera* darstellt.

Die Bedeutung dieser Erscheinung liegt, wie bemerkt, meiner Ansicht nach darin, dass der Gerbstoff zur Bildung der Eiweissstoffe in naher Beziehung steht. Beim Studium dieser Beziehungen wird vermuthlich dann auch der oxalsaure Kalk ein Glied in der Kette des betreffenden chemischen Vorgangs darstellen. Andererseits drängte sich im Laufe der vorliegenden Untersuchung mir auch der Gedanke auf, dass bei der Zersetzung von Eiweisskörpern (das Plasma der

Digitized by Google

Chlorophyllkörner habe ich hier besonders im Auge) abermals Gerbstoff entstehe.

Endlich erweist sich der Gerbstoff in einer Reihe von Fällen als nutzloses, aus dem Stoffwechsel austretendes Product. Hierher sind natürlich die Gerbstoffpartien zu rechnen, die sich in den bereits abgefallenen Blättern befinden. In diese Kategorie gehört nach KUTSCHER's Untersuchungen ferner das Vorkommen der Gerbsäure bei *Ricinus*, *Phaseolus* u. s. w.[1]

Mit Beziehung auf das häufige Auftreten des Gerbstoffes in der Blattepidermis hat bereits WARMING[2] die Hypothese aufgestellt, dass dasselbe in Folge der Hygroskopicität der Säuren als Schutzmittel gegen Austrocknung, im Winter gegen die für die Vegetation besonders gefährlichen kalten, trockenen Winde diene, und endlich als Mittel zur schnellen Wiederherstellung des verlorenen Turgors. Auch meine eigenen Beobachtungen veranlassen mich, dieser physiologischen Deutung des im Hautgewebe vorkommenden Gerbstoffs mich anzuschliessen. So fand ich z. B. im März bei *Vinca minor* in der oberen Blattepidermis reichlich Gerbstoff; in den unterliegenden Palissadenzellen war nur schwache Reaction wahrzunehmen. Ferner ist mir nicht unwahrscheinlich, dass der Tanningehalt der oberen Palissadenschicht in den Blättern von *Salix fragilis* sowie in der Epidermis und den Palissaden von *Ligustrum* den Blättern dieser Pflanzen es ermöglicht, verhältnissmässig lang mit grüner Farbe am Stamm auszudauern.

Ob man nun aber berechtigt ist, eine ähnliche Bedeutung als Hauptfunction dem in den verschiedenen inneren Gewebesystemen vorkommenden Gerbstoff zuzuschreiben, diese Frage kann angesichts der Gesammtsumme der einschlägigen Erscheinungen zur Zeit nicht bejaht werden. Näheres über Verwendung des Tannins in wachsenden Geweben, bei der Athmung, bei der Eiweissbildung u. s. w. ist uns eben unbekannt.

Hier lag mir vor Allem daran, sein Auftreten in der eigentlichsten Stätte der Assimilation zu beleuchten. Es folgt gerade aus vorliegender Mittheilung, wie ungenügend unsere Kenntnisse über die in den Assimilationszellen sich vollziehenden chemischen Vorgänge sind.

---

[1] Flora 1883.

[2] »Beobachtungen über Pflanzen mit überwinternden Laubblättern«. Botan. Centralbl. Bd. 16 S. 350.

Digitized by Google

Figurenerklärung.

In sämmtlichen Figuren ist die Reaction auf Gerbstoff mit saurem chromsauren Kali durch die braun gefärbten Massen zu erkennen. Hier und da treten hellere Töne hervor, die auf schwächere Reaction deuten.

Fig. 1. *Mespilus germanica* (circa 350 Mal). Theil aus einem Blattquerschnitt. Gerbstoffreaction allenthalben, in den Gefässbündelscheiden besonders stark. Die Epidermis hat verschleimte, jetzt gequollene Innenwände (7. August).

Fig. 2. *Vitis vinifera* (335 Mal). Querschnittspartie aus der secundären Rinde des Stammes. Das Cambiform (nach Wilhelm) ist zum Theil mit Gerbstoff, zum Theil mit Stärke versehen. Zwei von den tangentialen Lagen mechanischer Elemente sind in der Figur sichtbar (März).

Fig. 3. *Salix pentandra* (circa 350 Mal). Theil aus dem Blattquerschnitt. Das obere der beiden Palissadenstockwerke führt normal Gerbstoff, das untere ist im Allgemeinen davon frei; die schattirten Inhaltsgebilde links am Hadrombeleg sind vermuthlich beides Krystallmassen, sicher der in der grösseren Zelle enthaltene Körper; unsicher ist die Natur des Inhalts der langen Zelle mehr nach links (8. August).

Fig. 4. *Salix pentandra* (circa 350 Mal). Eine »Gerbstoffbrücke« zwischen einem kleinen, mit Gerbstoff führender Scheide versehene Bündel und dem oberen Palissadenstockwerk (8. August).

Fig. 5. *Taxus baccata* (570 Mal). Aus der secundären Rinde eines mehrjährigen Zweiges. Im oberen Theil der Figur sieht man, dass die Gerbstoff führenden Elemente zwischen je zwei Siebröhren liegen. Die von Solms beschriebenen Zellen mit Krystall führenden Membranen sind gleichfalls sichtbar (14. März).

Fig. 6. *Cyrtomium falcatum* (730 Mal). Gefässbündelpartie aus dem Blattstiel im Querschnitt, rechts die Tannin führenden Zellen innerhalb der Schutzscheide, links ein Theil des trachealen Systems.

Digitized by Google

58. Über krankhaft veränderte Knochen alter Peruaner.

Von Rud. Virchow.

(Vorgetragen am 10. December; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. L]; — ausgegeben am 17. December.)

1. Multiple Exostosen.

Hr. Fr. Eugen Zschokke hat vor 40 Jahren in einer Würzburger Inaugural-Dissertation »Über eine merkwürdige, bisher unbekannte, krankhafte Veränderung an Menschenknochen aus Peru«, Aarau 1845, verschiedene Skeletknochen von Menschen beschrieben und abgebildet, welche er von Dr. J. J. v. Tschudi erhalten hatte. Über die Fundverhältnisse sagt er (S. XIII) Folgendes: »Er (v. Tschudi) fand diese Knochen im September 1841, als er bei Lurin, fünf Leguas südlich von Lima, mehrere Grabstätten der Indianer öffnete. Sie lagen in der Nähe der Ruinen des zur Zeit der Inkas so sehr berühmten Tempels der Pachacamac, jener Gottheit, welche die Peruaner als Erschafferin der Welt nächst der Sonne am meisten verehrten. Dr. v. Tschudi glaubt versichern zu können, dass die Gräber einer der frühesten Epochen der Regierung der Inkas angehören. Sowohl ihre Anordnung, als auch die sehr rohen Kunstproducte, die er in denselben fand, die durchaus in keinem Verhältniss zu denjenigen der letzten Zeit des Inkareiches stehen, lassen ihn mit Bestimmtheit annehmen, dass sie aus dem 13. Jahrhundert der christlichen Zeitrechnung stammen. — Merkwürdigerweise lagen diese krankhaft veränderten Knochen alle in einem kleinen Grabe abgesondert und gehörten drei verschiedenen Individuen an, die ungefähr zwei Fuss eines vom anderen entfernt gelegt worden waren. Die Skelete bestanden aus unzusammenhängenden Knochen, die Schädel waren zerschlagen.« Es heisst dann weiter, dass Dr. v. Tschudi aus Erzählungen der Indianer gehört habe, es kämen südlich von Lurin noch grosse Gräber vor, in welchen ähnlich veränderte Knochen angehäuft lägen. Hr. v. Tschudi habe daraus geschlossen, dass die alten Peruaner die Leichen derjenigen Individuen, welche an der, diese Knochenveränderungen bedingenden Krankheit zu Grunde gingen, alle in den nämlichen Gräbern, abgesondert von anderen Verstorbenen, beigesetzt hätten, etwa wie es neuerlich bei Cholera geschehen sei.

Digitized by Google

Hr. Zschokke fand, dass die Knochen Kindern von 6 — 10 Jahren angehört haben müssten, obwohl sie für ihre Grösse (Länge) einen unverhältnissmässig grossen Umfang besässen. Tiedemann habe deshalb die Ansicht ausgesprochen, sie möchten älteren, fast ausgewachsenen Personen angehört haben, die in einem zwergartigen Zustande geblieben seien. Ein Femur und eine Tibia, vielleicht auch ein Humerus und eine Fibula, dürften demselben Individuum anzurechnen sein. Die Mittelstücke der Röhrenknochen waren gesund, dagegen zeigten die Gelenkenden und deren nächste Umgebungen Wucherungen der diploetischen Substanz, schwammige Exostosen und schwammige keulenförmige Auswüchse. Am Os ilium befanden sich nur schwammige Exostosen. Nach der Angabe des Dr. v. Tschudi sei an den Schädelknochen nichts Abnormes zu bemerken gewesen; nur der rechte Gelenkfortsatz des einen Unterkiefers sei ganz in der Weise destruirt gewesen, wie die Gelenkköpfe der Röhrenknochen.

Es ist noch zu erwähnen, dass Hr. v. Bibra die chemische Analyse der einen Tibia vornahm und dabei weniger organische Substanz, dagegen etwas mehr phosphorsauren Kalk, als normal, fand. Mit dem freilich spärlichen Fett wurde eine kleine Menge Kalkseife ausgezogen.

Hr. Zschokke verglich nun die vorgefundenen Veränderungen mit anderen, aus Dyskrasien hervorgegangenen Abweichungen der Knochen, namentlich mit scrofulösen, arthritischen und syphilitischen, fand aber überall genügende Unterschiede und schloss daraus, dass hier eine bisher ganz unbekannte Knochenkrankheit vorliege.

Hr. v. Tschudi selbst ist neuerlich in der Einleitung zu seinem »Organismus der Khetšua-Sprache« Leipzig 1884, S. 58, auf diese Angelegenheit zurückgekommen; nach seiner Angabe hat er die Knochen 1839 gefunden und zwar in einem »vorinkaischen« Grabe der Provinz Lurin.

Vor Kurzem hatte er die grosse Freundlichkeit, mir die noch in seinem Besitze befindlichen Knochen zu erneuter Prüfung zuzusenden. Nachdem schon früher ein Oberschenkelknochen in die Göttinger Sammlung von Rud. Wagner übergegangen war (Zschokke S. XIV), sind mir jetzt fünf von diesen höchst werthvollen Objecten zur freien Verfügung zugekommen: ein Os humeri, ein Os femoris, eine Tibia, eine Fibula und ein Os ilium. Letzteres, sowie die Tibia gehören der linken, die übrigen Knochen der rechten Seite an. Die von Hrn. Zschokke (S. 4, Fig. II) beschriebene, rechte Ulna befindet sich nicht unter den mir zugesendeten Knochen. Letztere werden in die Knochensammlung des Pathologischen Instituts aufgenommen werden.

Digitized by Google

Sämmtliche Knochen haben das weisse gebleichte Ansehen, welches die Gebeine der Peruaner in den trockenen Sandschichten der Gräber so gewöhnlich zeigen. Allen fehlen die Epiphysen, woraus schon hervorgeht, dass die Ansicht Tiedemann's, die Knochen möchten fast ausgewachsenen Individuen angehört haben, nicht wohl annehmbar ist. Trotz ihrer beträchtlichen Dickenentwickelung stammen sie offenbar von sehr jugendlichen Personen.

Was nun die Art ihrer Veränderung betrifft, so kann nicht der mindeste Zweifel darüber bestehen, dass dieselbe in das Gebiet der sogenannten multiplen Exostosen zu setzen ist. Wenn dies sowohl Hrn. Zschokke, als den ausgezeichneten Anatomen und Pathologen, welche er zu Rathe zog, entgangen ist, so erklärt sich das aus dem Umstande, dass zu jener Zeit die Aufmerksamkeit auf diese höchst eigenthümliche Affection noch wenig fixirt war. Angaben darüber existirten genug, wie aus der von mir (Onkologie II S. 80) zusammengestellten Literatur hervorgeht. Aber erst sehr langsam ist es gelungen, die genetische Stellung dieser Art von Exostosen zu erkennen. In einer Arbeit »über die Entstehung des Enchondroma und seine Beziehungen zu der Ecchondrosis und Exostosis cartilaginea«, welche ich in der Sitzung vom 6. December 1873 las, habe ich den Nachweis geführt, dass zwischen der Exostosis multiplex und der Exostosis cartilaginea und wiederum zwischen diesen und dem Enchondroma alle möglichen Übergänge bestehen (Monatsberichte 1873 S. 765). Innerhalb des hier in Betracht kommenden Erfahrungskreises stellt sich für alle drei die gemeinsame Entstehungsweise heraus, dass während der Entwickelung der Knochen, am häufigsten in der Nähe der Epiphysen, einzelne Knorpelstücke aus der gemeinsamen Entwickelung ausscheiden, eine Zeit lang in ruhendem Zustande verharren und später eine selbstständige Weiterbildung, sei es zur Knorpelwucherung, sei es zu Knochen eingehen. Die multiplen Exostosen treten dabei in den mannichfaltigsten Formen auf, bald als grosse, zuweilen kuglige Auswüchse von spongiösem Knochenbau, bald als festere, zuweilen elfenbeinerne Knöpfe, bald als längere, gestielte, der Form nach sehnigen Apophysen gleichende Vorsprünge.

Bei der Ausführlichkeit, mit der Zschokke die peruanischen Kochen geschildert hat, ist es überflüssig, noch einmal dieselben durchzugehen. Einzelne Ungenauigkeiten, auch in den Abbildungen, sind allerdings vorhanden, aber sie haben keine so grosse Bedeutung, dass es nöthig wäre, sie zu corrigiren. Im Übrigen sind die charakteristischen Merkmale so augenfällig, dass die Diagnose sich sofort ergiebt. Nur das will ich besonders erwähnen, dass sowohl der Zahl, als der Grösse nach diese Exostosen so ungewöhnlich ausgebildet sind, dass nur wenige

Digitized by Google

der sonst bekannten Fälle damit verglichen werden können. Indess genügt ein Blick auf die von mir abgebildeten Röhrenknochen einer Unterextremität (Onkologie II S. 84 Fig. 120), um die Ähnlichkeit zu zeigen.

Es handelt sich hier also nicht um eine besondere Dyskrasie, wie Zschokke vermuthete, sondern um eine weit verbreitete Entwickelungsstörung im Skelet. Dass eine solche sich an den Gerippen von drei, neben einander bestatteten Kindern oder jungen Leuten gefunden hat, was man nach der bestimmten und ausführlich dargelegten Angabe des Hrn. v. Tschudi nicht bezweifeln kann, ist gegenüber der grossen Seltenheit dieser Affection in Europa sehr bemerkenswerth. Nachdem wir aber von der E. multiplex wissen, dass sie sowohl erblich, als bei Geschwistern vorkommt (Onkologie II. S. 87), so dürfte der Gedanke wohl näher liegen, dass in dem Grabe von Lurin mehrere, in gleicher Weise afficirte Glieder einer Familie bestattet worden sind.

2. Exostosen des knöchernen Gehörganges.

Zuerst scheint Seligmann[1] an Schädeln vom Titicaca-See die besondere Häufigkeit von Exostosen im äusseren Gehörgange beschrieben zu haben. Er soll sie unter sechs Fällen fünf Mal gefunden haben. Da er betonte, dass diese Schädel der langgestreckten Gruppe deformirter Cranien angehörten, sich dagegen bei anderen nicht fänden, so haben manche geglaubt, er habe die Entstehung der Exostosen in eine ursächliche Beziehung zu dem Deformationsvorgange bringen wollen.

Auch andere Beobachter haben die Häufigkeit der auriculären Exostosen bei den alten Peruanern bemerkt. Hr. Flower erwähnt in seinem Kataloge des Hunter'schen Museums[2] sechs Fälle, in denen der äussere Gehörgang bis zu einem mehr oder weniger hohen Grade mit Exostosen gefüllt war. Er spricht bald von Knochenauswüchsen (bony oder osseous growths), bald geradezu von Exostosen. Unter den sechs Schädeln ist gleichfalls einer (Nr. 1005) von Titicaca und zwar ein langgestreckter: sein Breitenindex beträgt 70.3. Derselbe ist der

---

[1] Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften in Wien. 1864. Nr. 8. S. 55. (Dieses Citat wird von verschiedenen, ganz zuverlässigen Autoren, wie H. Welcker, Barnard Davis, angegeben. In Wirklichkeit steht auf der citirten Seite nur eine ganz magere Angabe, dass Hr. Seligmann einen Vortrag über eine Sendung aus Peru gehalten habe.)

[2] Catalogue of the specimens illustrating the osteology and dentition of vertebrated animals, recent and extinct, contained in the Museum of the Royal College of Surgeons of England by W. H. Flower. London 1879. Part I. p. 155—175.

Digitized by Google

Angabe nach durch kreisförmige Einschnürung deformirt, so dass er einem Mikrocephalen von Tiflis gleicht; dabei ist zu erwähnen, dass das Stirnbein »Zeichen von Ulceration und Entzündung« zeigt. Die anderen fünf Schädel, darunter drei (Nr. 893, 895, 911) von Pasamayo nördlich von Callao und zwei (Nr. 999 und 1000) von Pisagua, sind jedoch sämmtlich brachycephal: ihr Index variirt von 81.8—90.8. Dabei werden die von Pisagua als abgeplattet (flattened) bezeichnet, die von Pasamayo scheinen occipitale Compression erlitten zu haben.

Unter den Peruanerschädeln seiner Sammlung erwähnt BARNARD DAVIS[1] drei und zwar sämmtlich von Quichuas mit Exostosen:

Nr. 31. Mann von etwa 60 Jahren, Index 85, a small nodular exostosis in the left meatus auditorius externus.

Nr 35. Mann von 35 Jahren, Index 90, both external auditory pores are closed as nearly as possible with exostotic nodules.

Nr. 36. Mann von etwa 35 Jahren, Index 96, greatly distorted by pressure behind. The left auditory foramen is almost closed by an exostosis.

Da diese Schädel durch den Consul T. J. HUTCHINSON besorgt waren, so dürften sie, wie die oben erwähnten, gleichfalls durch diesen Herrn eingesandten, wohl auch von Pasamayo stammen.

Meine eigenen Beobachtungen, welche die oben mitgetheilten Erfahrungen bestätigen, werde ich nachher mittheilen. Zunächst dürfte es nützlicher sein, die weitere Entwickelung der Streitfragen historisch zu verfolgen.

Der erste, welcher die Angelegenheit aufnahm, war Hr. H. WELCKER.[2] Er berichtete, dass auch ein »nicht geformter« Schädel eines Fuchsindianers vom Mississipi (Nr. 229 der Heidelberger Sammlung) Exostosen in den Gehörgängen besitze und dass unter neun, ihm von BARNARD DAVIS zugesendeten Schädeln von Marquesas-Insulanern, welche keine Spur von künstlicher Formung zeigten, zwei Ohrexostosen hätten (Nr. 784 und 593), der eine in sehr erheblicher Entwickelung. Er berief sich ferner auf die Berichte europäischer Ohrenärzte über ähnliche Vorkommnisse und lehnte den Gedanken des Hrn. SELIGMANN ab, als seien diese Exostosen etwas anderes, als die der Peruaner.

Hr. SELIGMANN[3] bemerkte darauf, dass er keineswegs behauptet habe, die Exostosen fänden sich nur an Peruanerschädeln; seine Meinung sei vielmehr die, dass es unter diesen nur die langgewickelten seien, an denen sie vorkommen. Auf der Innsbrucker Naturforscher-

[1] JOSEPH BARNARD DAVIS Supplement to Thesaurus craniorum. London 1875. p. 55—56.

[2] Archiv für Ohrenheilkunde. Würzburg 1864. Bd. I. S. 171. Taf. 2. Fig. 7—8.

[3] Geographisches Jahrbuch, herausgegeben von E. BEHM. Gotha 1866. Bd. I. S. 47*8

Digitized by Google

Versammlung[1] führte er das genauer aus, liess jedoch die Beziehung der Exostosen zu der »Umformung« des Schädels ganz fallen, weil einerseits die der Titicaca-Form ganz ähnlichen, sogenannten Avaren-Schädel in Europa, andererseits die so häufigen peruanischen Plattschädel sie nicht zeigten, obgleich bei den letzteren die Umstaltung weit gewaltsamer gewesen und der Porus externus dadurch oft schief gestellt oder schmäler gedrückt worden sei. Dagegen zog er die bei den Inka-Söhnen gebräuchliche Sitte an, ihnen im 17. Lebensjahre die Ohrläppchen zu durchstechen und das Loch durch Einlegen von Metallstiften so zu erweitern, dass darin eine Scheibe aus Gold oder Silber von der Grösse einer durchschnittenen Orange Platz hatte. Solche Personen habe man Orejones genannt. »Die Aufregung jener Prüfungszeit, die vergleichsweise späte Epoche der Operation und die Raschheit der Erweiterung führten einen pathologischen Process herbei, der die Knorpel und zuletzt den Knochen selbst in Mitleidenschaft zog.« Er schliesst daher, dass »alle Peruaner-Schädel der Titicaca-Form, welche diese Exostosen haben, Schädel männlicher, über 16 Jahre alter Individuen der vornehmen Kaste sein müssten.«

Diese Argumentation ist in keiner Richtung stichhaltig. Es giebt so viele Völker, bei welchen es Sitte ist, sich Löcher in die Ohrläppchen zu stechen und diese unendlich auszuweiten[2], dass die Exostosen der Gehörgänge eine viel weitere Verbreitung haben müssten, wenn die Proceduren bei und nach der Durchstechung einen so reizenden Einfluss auf die Nachbarschaft ausüben sollten, dass selbst die Knochen zur Bildung von Exostosen veranlasst würden. Hr. Welcker hat zwei Marquesas-Schädel aus der Sammlung von Barnard Davis angeführt; wie sich aus dem Katalog des Besitzers[3] selbst ergiebt, waren diese 2 oder genauer 3 (p. 321 Nr. 1132) aus einer Zahl von 30 ausgesucht. Der Ohrschmuck der Marquesaner aber ist sehr genau bekannt[4]: es sind meist Nägel von gar nicht besonders starker Art, die am Ende mit einer Zierscheibe besetzt sind und die durch das Loch hindurchgesteckt werden. Von irgend einer stärkeren Reizung, als durch manche indische oder europäische Ohrgehänge, kann hier wohl kaum die Rede sein.

---

[1] Tageblatt der 43. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Innsbruck. 1869. S. 175.

[2] Theodor Waitz Anthropologie der Naturvölker. Leipzig. 1872. VI. S. 27.

[3] Barnard Davis Thesaurus craniorum. p. 319—324.

[4] J. G. Wood The natural history of man. (Australia, New Zealand, Polynesia, etc.) London 1870. p. 386. J. D. E. Schmeltz und R. Krause Die ethnographisch-anthropologische Abtheilung des Museum Godeffroy. Hamburg 1881. S. 244. Taf. XXVI. Fig. 5, 6, 10.

Digitized by Google

Es mag hier übrigens beiläufig erwähnt sein, dass unter 140 Kanaken-Schädeln von den Sandwich-Inseln in derselben Sammlung[1] bei fünf gleichfalls Exostosen, jedoch meist nur einseitig, ebenso ein Loyalitäts-Insulaner[2] und endlich ein auf der Via Latina ausgegrabener Römerschädel[3] dieser Sammlung mit doppelseitigen Exostosen verzeichnet sind.

Noch viel mehr entscheidend ist die Thatsache, dass die heutigen Ohrenärzte in Europa nicht wenige Fälle, auch der doppelseitigen Exostosen, finden. Obwohl Toynbee[4] noch im Jahre 1850 annahm, dass dieselben gar nicht beschrieben seien, so gab es doch schon seit Autenrieth einzelne Angaben. Neuerlich sind derartige Fälle oft genug beschrieben worden[5] und es dürfte wohl keine Art von Ursachen geben, sei es mechanische, sei es dyskrasische, auf welche nicht mit bald mehr, bald weniger Bestimmtheit die Entstehung dieser Knochenauswüchse bezogen worden wäre. Aber soweit meine Kenntniss reicht, ist nirgends eine mechanische Verletzung des Ohrläppchens als Ursache nachgewiesen worden.

Die von Hrn. Seligmann aufgestellte Hypothese beruhte aber noch auf der anderen Voraussetzung, dass die Exostosen nur bei peruanischen Schädeln mit künstlicher Verlängerung vorkämen. Wie aus der obigen Zusammenstellung hervorgeht, ist seitdem nur ein weiterer Titicaca-Schädel ähnlicher Art bekannt geworden, der aus dem Hunter'schen Museum, und dieser ist einer unter fünf. Fast alle anderen exostotischen Peruaner-Schädel sind künstlich verkürzt, mit abgeplattetem Hinterkopf, also gerade von der Art, welche Hr. Seligmann als plebejische perhorrescirte. Dahin gehören 5 aus dem Hunter'schen Museum, 3 aus der Sammlung Barnard Davis und 18 aus der, im Augenblick meiner Obhut unterstellten Sammlung der HH. Reiss und Stübel, — also im ganzen 26 Schädel.

Die Schädel der Sammlung Reiss-Stübel stammen sämmtlich aus Gräbern von Ancon. Die besondere, sei es einfach, sei es schief brachycephale Form der dort gefundenen Schädel habe ich vor Kurzem

---

[1] B. Davis l. c. p. 327 (Nr. 8), 337 (Nr. 97, 98), 339 (Nr. 107), 341 (Nr. 126).
[2] l. c. p. 309 (Nr. 1).
[3] l. c. p. 91 (Nr. 13).
[4] Transactions of the Pathol. Society. London. Vol. II, p. 270.
[5] J. M. G. Itard Traité des maladies de l'oreille et de l'audition. Paris 1842. I. p. 282. Will. R. Wilde Practische Bemerkungen über Ohren-Heilkunde aus dem Engl. von E. v. Haselberg. Göttingen 1855, S. 241. v. Tröltsch Die Krankheiten des Ohres. Würzb. 1862. S. 73. Josef Gruber Lehrbuch der Ohrenheilkunde. Wien 1870. S. 412. Delstanche fils Contribution à l'étude des tumeurs osseuses du conduit auditif externe. Mémoires couronnés, publ. par l'Acad. Roy. de Méd. de Belgique. Bruxelles 1878.

Digitized by Google

geschildert[1]; die stattgehabten Verdrückungen haben hauptsächlich Abflachungen von oben und Abplattungen oder Schiefheiten von hinten her, selten Niederdrückungen der Stirn bewirkt. Daher ist der äussere Gehörgang häufig sehr erheblich in Mitleidenschaft gezogen: statt eines gerundeten Canals zeigt er eine verdrückte Lichtung, die zuweilen geradezu säbelscheidenartig aussieht. Dabei ist sie verengt und gewöhnlich schief von oben und vorn nach unten und hinten gerichtet. Wie weit der Druck des Gelenkfortsatzes vom Unterkiefer dazu mitgewirkt hat, ist schwer auszumachen; jedenfalls hat es den Anschein, als ob gerade an dieser Stelle dem von hinten her wirkenden Druck Widerstand geleistet worden wäre.

Unter 134, einigermaassen von den mumificirten Weichtheilen befreiten Schädeln von Ancon zähle ich, wie gesagt, achtzehn mit Gehörgangs-Exostosen.[2] Soweit sich erkennen lässt, sind darunter auch weibliche (z. B. Nr. 120, A 8 und A 9). Die meisten der Schädel sind etwas, wenige stark deformirt; manche jedoch sehen ganz normal aus. Gerade die am stärksten verdrückten Schädel der Sammlung haben freie Gehörgänge. Eine unmittelbare Verbindung zwischen Exostose und Deformation muss also jedenfalls abgewiesen werden; eine mittelbare lässt sich, wie ich nachher ausführen werde, allenfalls als möglich zugestehen. Ein Paar Mal zeigt die Umgebung des äusseren Ohrloches Veränderungen, welche auf Störungen von aussen her bezogen werden können. So sieht man bei einem Schädel (A 6) mit vollem Hinterhaupt und sehr starker Knochenwucherung in dem Gehörgange, am oberen und hinteren Umfange des Ohrloches eine breite diffuse Zone im Zustande einer gewissen Sklerose; bei einem anderen (A. 3), der sehr wenig verdrückt ist, aber auch nur schwache Exostosen hat, zeigt die Oberfläche des Warzenfortsatzes und der obere Umfang des Ohrloches eine ausgedehnte Hyperostose mit einzelnen, fast cariös aussehenden Vertiefungen. Ich möchte jedoch auf diese Erscheinung weniger Gewicht legen, weil gerade sehr ausgezeichnete Fälle von Exostosen nicht die mindeste Veränderung dieser Art darbieten und weil ausserdem diffuse Hyperostosen und Sklerosen der äusseren Schädelfläche bei den Schädeln von Ancon sehr gewöhnlich sind. So zeigt gerade der letztgenannte Schädel eine so starke Hyperostose der vorderen Fontanellgegend, dass die Stelle in Form einer rautenförmigen Anschwellung über die Oberfläche hervorspringt.

---

[1] W. Reiss und A. Stübel Das Todtenfeld von Ancon in Peru. Ein Beitrag zur Kenntniss der Kultur und Industrie des Inca-Reiches. Berlin. Lief. 13. Taf. 107 — 16.

[2] Es sind dies Nr. 120 (vergl. Atlas Taf. 30, Fig. 9), 1548, 1553, 1555, 1581, 1622, 1642, 1647, sowie die von mir mit A 1 — 10 bezeichneten Exemplare.

Digitized by Google

Es liegt um so weniger Veranlassung vor, diese Betrachtungen weiter zu verfolgen, als es mir gelungen ist, die localen Beziehungen der Exostosen an den Schädeln von Ancon in so bestimmter Weise zu fixiren, dass über den Hergang der Bildung kein Zweifel mehr bestehen kann. Schon unsere Ohrenärzte haben die auffällige Thatsache von der doppelseitigen, symmetrischen Entwickelung vieler dieser Exostosen wohl erkannt. Hr. Moos[1] schloss aus dem Umstande, dass die Geschwülste in drei von ihm betrachteten Fällen jedesmal auf beiden Seiten den gleichen Sitz hatten, nämlich an der oberen Wand des Gehörganges, ganz nahe am Trommelfell, dass ihrer Bildung die gleiche Ursache zu Grunde liegen müsse, und er nahm als solche irritative Vorgänge an, welche zu der Zeit einträten, wo der Trommelfellring mit der Schläfenschuppe verwächst. So konnte er sie mit dem von mir erörterten Stachelbecken in Parallele stellen. Hr. Delstanche[2] geht noch einen Schritt weiter; er schliesst aus der Heredität mancher symmetrischer Exostosen auch auf die Heredität der Ohrexostosen, ohne jedoch ein einziges Beispiel dafür beizubringen.

Die Angaben der Autoren über den gewöhnlichen Sitz der Exostosen sind widersprechende. Während einige sie in der Nähe des Trommelfells, andere mehr nach aussen entstehen lassen, setzt sie ein so sicherer Beobachter, wie Toynbee, gerade in die Mitte zwischen Trommelfell und äussere Mündung. Nach meinen Beobachtungen ist es bei den Peruanern Regel, dass sie die äussere Hälfte des knöchernen Gehörganges einnehmen. Die meisten sitzen noch ganz im Kanal des Gehörganges, so dass sie bei stärkerer Entwickelung die Lichtung bis fast zu vollständiger Verschliessung erfüllen. Zuweilen sitzen sie jedoch auch ganz vorn im Anfange des Kanals, so dass sie aus demselben nach aussen hervorwachsen. An einem der Schädel von Ancon (Nr. 1642) steht jederseits eine gestielte Exostose mit einem kugelförmigen Ende aus dem Ohrloche hervor. Im hintersten Abschnitte des Kanals habe ich auch nicht ein einziges Mal eine Exostose gefunden. In dem einzigen Fall (A 1), wo ich eine Zersägung des Schädels vornahm, weil die Gehörgänge nach aussen hin ganz und gar mit wulstigen Auswüchsen erfüllt sind, zeigten sich hinter der fast ganz verschlossenen Stelle der Kanal wieder offen, die Trommelhöhle frei und die Gehörknöchelchen ganz zart.

Viel wichtiger, als die oberflächliche oder tiefe Lage, ist die Feststellung des eigentlichen Ausgangspunktes der Geschwulstbildung. Dieses ist ausnahmslos einer der Ränder der Pars tympanica

[1] Archiv für Augen- und Ohrenheilkunde von Knapp und Moos. 1871. II. 1. S. 113.
[2] Delstanche l. c. p. 14.

Digitized by Google

des Schläfenbeins. Dieser Theil, welcher als ein unabhängiges Gebilde aus dem Annulus tympanicus des Neugeborenen hervorwächst, bildet in der Regel bei dem Erwachsenen einen nach oben offenen Halbkanal, welcher die untere Wand des Gehörganges darstellt. Er hat somit einen vorderen und einen hinteren Rand, welche beide nach oben gerichtet sind und sich bald mehr, bald weniger innig an die benachbarten Knochentheile der Pars squamosa und Pars petrosa anlegen und im günstigsten Falle mit denselben verschmelzen. Aber auch in diesem Falle bleibt sehr oft der alte Rand noch als ein schwacher Absatz oder Vorsprung bestehen. Anderemal dagegen ist die Verschmelzung eine unvollständige: nicht nur treten die Ränder stärker hervor, sondern es bleiben auch feine Spalten zwischen ihnen und den Nachbarknochen. Gerade bei den Peruanern ist diese unvollständige Vereinigung ungemein häufig und die Pars tympanica sieht aus wie eine dütenförmig eingefaltete Platte, welche scheinbar lose in den Gehörgang eingeschoben ist. Ja, nicht selten sind die Ränder derselben geradezu nach innen vorgebogen.

Diese Ränder sind es, von welchen die Bildung der Exostosen ausgeht. Am häufigsten ist es der hintere, nicht selten der vordere Rand, aber auch doppelte Exostosen werden oft genug gesehen. Wie Toynbee ganz richtig angab, sitzt eine hinten, die andere vorn, der ersteren gerade gegenüber, und die hintere pflegt dann die grössere zu sein. Im Ganzen befinden sie sich daher näher an der oberen Wand, aber genau genommen sitzen sie weder an der oberen, noch an der unteren, sondern vielmehr an der Seitenwand, hier jedoch häufiger nach oben, seltener nach unten, je nachdem die Ränder der Pars tympanica höher oder tiefer endigen. Der Hergang ist der, dass der Rand sich anfangs verdickt, dann mehr und mehr anschwillt und sich allmählich geschwulstartig auftreibt. Die Oberfläche der Auftreibung ist sehr verschieden, zuweilen ganz glatt, manchmal höckerig, wulstig, ja durch tiefe Einschnitte abgetheilt. Auch kommen neben einander an demselben Rande mehrere Exostosen vor, welche zusammen ein knolliges Aussehen darbieten. Die Structur erscheint äusserlich stets sehr dicht, sklerotisch oder elfenbeinern, jedoch entspricht der innere Bau diesem Aussehen nicht vollkommen.

Wenn man erwägt, dass die bezeichneten Randstellen den Punkten entsprechen, wo der knorpelige Gehörgang sich an den knöchernen anschliesst, so liegt der Gedanke sehr nahe, dass diese auriculären Exostosen der Exostosis cartilaginea und der Exostosis multiplex der Extremitäten- und der platten Knochen verwandt seien. Es sind eben excessive Wucherungen an Stellen, welche zur Ossification schreiten. Ob sie gleichfalls aus Knorpelwucherung hervorgehen,

Digitized by Google

wird erst durch Untersuchungen frischer Fälle zu ergründen sein. Aber die Thatsache, dass sie auf irritativen Störungen der normalen Knochenentwickelung beruhen, darf wohl nunmehr als feststehend angesehen werden.

Bis jetzt liegen keine Beobachtungen vor, durch welche die Coexistenz von auriculären Exostosen mit multiplen Exostosen des Skelets dargethan ist. Auch die Peruaner lassen uns darüber im Zweifel. Leider besitzen wir kein Skelet, welches zu einem der mit Gehörgangs-Exostosen behafteten Schädel gehört hat; ebenso fehlen die Schädel zu den mit multiplen Exostosen versehenen Knochen von Lurin. Die Angaben des Hrn. v. Tschudi,[1] dass der rechte Gelenkfortsatz des einen Unterkiefers ganz in der Weise destruirt war, wie die Gelenkköpfe der Röhrenknochen, könnte als eine Art von Beweis betrachtet werden, dass der krankhafte Process bis auf den Schädel übergegriffen hat. Nur einmal ist eine Combination eines solchen Zustandes des Unterkiefers mit Ohrexostosen constatirt worden: an dem Schädel eines Mannes von Ohivao, einer der Marquesas-Inseln, fanden sich knotige Exostosen der Gehörgänge und zugleich eine Exostose an der vorderen Seite des linken Gelenkfortsatzes des Unterkiefers.[2] Hoffentlich werden künftige Beobachter in Peru den Skeletknochen grössere Aufmerksamkeit schenken, als es bisher der Fall war; bei einiger Sorgfalt dürfte es sehr leicht sein, das Dunkel zu zerstreuen, welches über dieser interessanten Affection ruht.

Nicht ganz ohne Bedeutung ist es vielleicht, dass in dem sogenannten Os Incae, welches ich früher einmal in der Akademie besprochen habe,[3] eine andere Störung der Ossification bei Peruanern hervortritt, welche einen benachbarten Knochen betrifft. Unter den mit Ohrexostosen versehenen Schädeln von Ancon ist nur ein einziger (A 10), welcher ein Os Incae und zugleich eine Rima zygomatica posterior besitzt.

Wenn ich endlich zum Schlusse noch einmal auf die Frage zurückkomme, ob die künstliche Deformation einen Einfluss auf die Entstehung der Exostosen haben könne, so geschieht es, weil ich trotz Allem die Möglichkeit anerkennen muss, dass durch die Verdrückung und Verschiebung der Schädelknochen die Verwachsung der Pars tympanica erschwert oder geradezu verhindert, und so eine Prädisposition zu der Veränderung der Ränder dieses Knochentheils

---

[1] Zschokke a. a. O. S. 16.

[2] Barnard Davis Thesaurus craniorum p. 321 (Nr. 1).

[3] Virchow Über einige Merkmale niederer Menschenrassen am Schädel. Gelesen am 7. Januar 1875. (Abhandl. der K. Akademie der Wissenschaften 1875.) S. 60 ff.

Digitized by Google

gegeben werden könne. Ich glaube jedoch Thatsachen genug beigebracht zu haben, aus welchen hervorgeht, dass die Wirklichkeit der eben bezeichneten Möglichkeit wenig entspricht, und es scheint mir also, dass man vorläufig die künstliche Deformation eben so sehr aus der Reihe der Ursachen der Gehörgangs-Exostosen streichen muss, wie ich durch meine frühere Arbeit ihre Bedeutung für die Entstehung des Os Incae widerlegt habe.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

NAMENREGISTER.

Albrecht, Prof. Dr., Paul, in Brüssel, über die im Laufe der phylogenetischen Entwickelung entstandene, angeborene Spalte des Brustbeinhandgriffes der Brüllaffen. 167—183.

Berendt, G., Prof. in Berlin, über das Tertiär im Bereiche der Mark Brandenburg. 523—545.

du Bois-Reymond, E., Bericht über die Humboldt-Stiftung. 103—105.

———————, Erwiderung auf Schulze's Antrittsrede. 316—319.

———————, lebende Zitterrochen in Berlin. Zweite Mitth. 355—414.

Braun, F., Prof. in Karlsruhe, über die Thermoelektricität geschmolzener Metalle. 143—152.

Burmeister, H., Berichtigung zu Coelodon. 287—293.

Chun, Carl, Prof. in Königsberg i. Pr., über die cyklische Entwickelung der Siphonophoren. Zweite Mitth. 263—281.

Fritsch, Gustav, Prof. in Berlin, über die Organisation des Gymnarchus niloticus. 61—71.

Fuchs, über den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabeln. 1—8.

Hausmaninger, V., in Graz, über die Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Körper. 23—36.

Hellmann, G., Dr. in Berlin, über gewisse Gesetzmässigkeiten im Wechsel der Witterung aufeinanderfolgender Jahreszeiten. 93—102.

Himstedt, F., Prof. in Preiburg i. B., eine Bestimmung des Ohms. 415—419.

Hölder, O., Dr., über eine neue hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function durch die Fourier'sche Reihe. 223—238.

Hofmann, über die Sulfocyanursäure. 481—492.

————, über das Amin des Pentamethylbenzols. 493—500.

————, über die Einwirkung des Ammoniaks und der Amine auf den Sulfocyanursäuremethyläther und das Cyanurchlorid. Normale alkylirte Melamine. 565—592.

————, über die den Alkylcyanamiden entstammenden alkylirten Isomelamine und über die Constitution des Melamins und der Cyanursäure. 593—614.

von Ihering, Herm., Dr. in Rio-Janeiro, über die Fortpflanzung der Gürtelthiere. 643—645.

Kirchhoff, G., zur Theorie der Gleichgewichtsvertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln. 615—621.

Koganeï, J., Dr. in Berlin, über den Bau der Iris. 47—48.

*Kronecker, Bemerkung zu Hrn. Ernst Schering's Mittheilung über den dritten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. 59—60.

———————, die absolut kleinsten Reste reeller Grössen. 209—222. 637—641.

———————, über das Dirichlet'sche Integral. 329—353.

———————, über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel. 501—522.

———————, zur Theorie der elliptischen Functionen. 421—444.

———————, über den Cauchy'schen Satz. 445—447.

Kundt, über die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichts im Eisen. 647—656.

Digitized by Google

Landolt, über die Zeitdauer der Reaction zwischen Jodsäure und schwefliger Säure. 107—142.

Lendenfeld, R. von, Dr. in Sydney, über das Nerven- und Muskelsystem der Hornschwämme. 623—628.

Mendelssohn, Mor., Dr., z. Zt. in Paris, Untersuchungen über Reflexe. 49—53.

Müller-Erzbach, W., Dr. in Bremen, über die Dissociation wasserhaltiger Salze und daraus abgeleitete Folgerungen über die Constitution der Salzbestandtheile. 201—208.

Noetling, Fritz, Prof. in Königsberg i. Pr., über Crustaceen aus dem Tertiär Aegyptens. 239—252.

———, vorläufiger Bericht über die geognostische Beschaffenheit des Ost-Jordan-Landes. 467—468.

Rammelsberg, über die Oxyde des Mangans und Urans. 39—46.

———, über die Gruppe des Skapoliths. 295—313.

Röntgen, W. C., Prof. in Giessen, über die elektromagnetische Wirkung der dielektrischen Polarisation. 89—92.

*Roth, über die von Hrn. Dr. Paul Güssfeldt in Chile gesammelten Gesteine. 283—285.

Rüdorff, Fr., Prof. Dr. zu Charlottenburg, über die Löslichkeit von Salzgemischen. 185—200.

Schering, Ernst, zum dritten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste. 55—61.

Schneider, R., Dr. in Berlin, der unterirdische Gammarus von Clausthal. (*G. pulex, var. subterraneus.*) 677—693.

Schulze, Antrittsrede. 315—316.

———, über das Verhältniss der Spongien zu den Choanoflagellaten. 75—87.

Schwendener, einige Beobachtungen an Milchsaftgefässen. 153—166.

———, über Scheitelwachsthum und Blattstellungen. 547—563.

Siemens, über die von Hrn. Fritts in New York endeckte elektromotorische Wirkung des beleuchteten Selens. 73—74.

Steiner, Is., Dr. in Heidelberg, die Lehre von den Zwangsbewegungen des Frosches. 253—261.

Virchow, über die Verbreitung des blonden und des brünetten Typus in Mitteleuropa. 13—21.

———, über krankhaft veränderte Knochen alter Peruaner. 717—728.

Weber, H. F., Prof. in Zürich, über das Wärmeleitungsvermögen der tropfbaren Flüssigkeiten. 469—475.

Weber, Leonh., Prof. in Breslau, über einen Differential-Erd-Inductor. 695—703.

Websky, über die Vanadinsäure enthaltenden Bleierze aus der Provinz Cordoba (R. A.) 37—38.

Weierstrass, über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer rellen Veränderlichen. 321—327. 449—465.

———, zu Lindemann's Abhandlung: »Über die Ludolph'sche Zahl«. 657—675.

Westermaier, M., Dr., zur physiologischen Bedeutung des Gerbstoffes in den Pflanzen. 705—716.

Wiebe, H. F., in Berlin, über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Nachwirkungs-Erscheinungen bei Thermometern. 629—636.

Wien, W., Dr. in Berlin, über den Einfluss der ponderablen Theile auf das gebeugte Licht. 477—479.

Wilsing, J., Dr. in Potsdam, über die Anwendung des Pendels zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde. 9—11.

Digitized by Google

SACHREGISTER.

Astronomie. — J. Wilsing, über die Anwendung des Pendels zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde. 9—11.

Berichte über akademische und mit der Akademie verbundene Unternehmungen: Humboldt-Stiftung. 103—105.

Blonder und brünetter Typus in Mitteleuropa, über denselben, von Virchow. 13—21.

Botanik: Schwendener, einige Beobachtungen an Milchsaftgefässen. 153—166. — Derselbe, über Scheitelwachsthum und Blattstellungen. 547—563. — M. Westermaier, zur physiologischen Bedeutung des Gerbstoffes in den Pflanzen. 705—716.

Brüllaffen, über die im Laufe der phylogenetischen Entwickelung entstandene, angeborene Spalte des Brustbeinhandgriffes derselben, von P. Albrecht. 167—183.

Cauchy'scher Satz, über denselben, von Kronecker. 445—447.

Chemie: Hofmann, über das Amin des Pentamethylbenzols. 493—500. — Derselbe, über die Sulfocyanursäure. 481—492. — Derselbe, über die Einwirkung des Ammoniaks und der Amine auf den Sulfocyanursäuremethylaether und das Cyanurchlorid. Normale alkylirte Melamine. 565—592. — Derselbe, über die den Alkylcyanamiden entstammenden alkylirten Isomelamine und über die Constitution des Melamins und der Cyanursäure. 593—614. — Landolt, über die Zeitdauer der Reaction zwischen Jodsäure und schwefliger Säure. 107—142. — W. Müller-Erzbach, die Dissociation wasserhaltiger Salze und daraus abgeleitete Folgerungen über die Constitution der Salzbestandtheile. 201—208. — Rammelsberg, über die Oxyde des Mangans und Urans. 39—46. — Fr. Rüdorff, über die Löslichkeit von Salzgemischen. 185—200. — Websky, über die Vanadinsäure enthaltenden Bleierze aus der Provinz Cordoba. 37—38.

Chile, über die von Dr. Paul Güssfeldt daselbst gesammelten Gesteine, von Roth. 283—285.

Coelodon, Berichtigung dazu von Burmeister. 287—293.

Crustaceen, über solche aus dem Tertiär Aegyptens, von F. Noetling. 239—252.

Dichtigkeit, mittlere der Erde, s. Pendel.

Differential-Erd-Inductor, über einen solchen, von Leonh. Weber. 695—703.

Differentialgleichungen, zwischen complexen Variabeln, über den Charakter der Integrale derselben, von Fuchs. 1—8.

Dirichlet'sches Integral, über dasselbe von Kronecker. 329—353.

Elektricität, zur Theorie der Gleichgewichtsvertheilung derselben auf zwei leitenden Kugeln, von G. Kirchhoff. 615—621.

Elliptische Functionen, zur Theorie derselben, von Kronecker. 421—444.

Ethnographie: Virchow, über die Verbreitung des blonden und des brünetten Typus in Mitteleuropa. 13—21.

Flüssigkeiten, tropfbare, über das Wärmeleitungsvermögen derselben, von H. F. Weber. 469—475.

Fourier'sche Reihe, über eine neue hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function durch dieselbe, von O. Hölder. 223—238.

Digitized by Google

Function, willkürliche einer reellen Veränderlichen, über die analytische Darstellbarkeit solcher, von Weierstrass. 321—327. 449—465.

Gammarus, der unterirdische von Clausthal *(G. pulex, var. subterraneus)*, von R. Schneider. 677—693.

Geologie: G. Berendt, über das Tertiär im Bereiche der Mark Brandenburg. 523—545. — F. Noetling, über die geognostische Beschaffenheit des Ost-Jordan-Landes. 467—468.

Gerbstoff, zur physiologischen Bedeutung desselben in den Pflanzen, von M. Westermaier. 705—716.

Gürtelthiere, über die Fortpflanzung derselben, von H. von Jhering. 643—645.

Gymnarchus niloticus, über die Organisation desselben, von G. Fritsch. 61—71.

Hornschwämme, über das Nerven- und Muskelsystem derselben, von R. von Lendenfeld. 623—628.

Humboldt-Stiftung. 103—105.

Integration, partielle, über eine bei Anwendung derselben nützliche Formel, von Kronecker. 501—522.

Jodsäure, über die Zeitdauer der Reaction zwischen derselben und schwefliger Säure, von Landolt. 107—142.

Iris, über den Bau derselben, von J. Koganei. 47—48.

Isomelamine, alkylirte, über die den Alkylcyanamiden entstammenden und über die Constitution des Melamins und der Cyanursäure, von Hofmann. 593—614.

Licht, gebeugtes, über den Einfluss der ponderablen Theile auf dasselbe, von W. Wien. 477—479.

Ludolph'sche Zahl, zu Lindemann's Abhandlung über dieselbe, von Weierstrass. 657—675.

Mangan, über die Oxyde desselben und des Urans, von Rammelsberg. 295—313.

Mathematik: Fuchs, über den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabeln. 1—8. — O. Hölder, über eine neue hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function durch die Fourier'sche Reihe. 223—238. — Kronecker, die absolut kleinsten Reste reeller Grössen. 209—222. 637—641. — Derselbe, über das Dirichlet'sche Integral. 329—353. — Derselbe, über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel. 501—522. — Derselbe, zur Theorie der elliptischen Functionen. 421—444. — Derselbe, über den Cauchy'schen Satz. 445—447. — Schering, zum dritten Gauss'schen Beweise des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste. 55—61. — Bemerkungen hierzu von Kronecker. 59—60. — Weierstrass, über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. 321—327. 449—465. — Derselbe, zu Lindemann's Abhandlung: »Über die Ludolph'sche Zahl.« 657—675.

Meteorologie: G. Hellmann, über gewisse Gesetzmässigkeiten im Wechsel der Witterung aufeinanderfolgender Jahreszeiten. 93—102.

Milchsaftgefässe, einige Beobachtungen an solchen, von Schwendener. 153—166.

Mineralogie: Rammelsberg, über die Gruppe des Skapoliths. 295—313. — Roth, über die von Dr. Paul Güssfeldt in Chile gesammelten Gesteine. 283—285. — Websky, über die Vanadinsäure enthaltenden Bleierze aus der Provinz Cordoba (Argentina). 37—38.

Ohm, über eine Bestimmung desselben, von F. Himstedt. 415—419.

Ost-Jordan-Land, über die geognostische Beschaffenheit desselben, von F. Noetling. 467—468.

Palaeontologie: H. Burmeister, Berichtigung zu Coelodon. 287—293. — F. Noetling, über Crustaceen aus dem Tertiär Aegyptens. 239—252.

Digitized by Google

Pendel, über die Anwendung desselben zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde, von J. Wilsing. 9—11.

Pentamethylbenzol, über das Amin desselben, von Hofmann. 493—500.

Peruaner, alte, über krankhaft veränderte Knochen derselben, von Virchow. 717—728.

Physik: F. Braun, über die Thermoelektricität geschmolzener Metalle. 143—152. — V. Hausmaninger, zur Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Körper. 23—36. — F. Himstedt, eine Bestimmung des Ohms. 415—419. — G. Kirchhoff, zur Theorie der Gleichgewichtsvertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln. 615—621. — Kundt, über die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes im Eisen. 647—656. — W. C. Röntgen, Versuche über die elektromagnetische Wirkung der diëlektrischen Polarisation. 89—92. — Siemens, über die von Hrn. Fritts in New York entdeckte elektromotorische Wirkung des beleuchtenden Selens. 73—74. — H. F. Weber, das Wärmeleitungsvermögen der tropfbaren Flüssigkeiten. 469—475. — L. Weber, Mittheilung über einen Differential-Erd-Inductor. 695—703. — H. F. Wiebe, über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Nachwirkungs-Erscheinungen bei Thermometern. 629—636 — W. Wien, über den Einfluss der ponderablen Theile auf das gebeugte Licht. 477—479. — J. Wilsing, über die Anwendung des Pendels zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde. 9—11.

Physiologie und Anatomie: J. Koganeï, Untersuchungen über den Bau der Iris. 47—48. — Mor. Mendelsohn, Untersuchungen über Reflexe. 49—53. — Is. Steiner, die Lehre von den Zwangsbewegungen des Frosches. 253—261. — Virchow, über krankhaft veränderte Knochen alter Peruaner. 717—728. Vergl. Zoologie.

Polarisation, diëlektrische, über die elektromagnetische Wirkung derselben, von W. C. Röntgen. 89—92.

Polarisationsebene des Lichts, über die elektromagnetische Drehung desselben im Eisen, von Kundt. 647—656.

Reciprocitätsgesetz, zum dritten Gauss'schen Beweis desselben für die quadratischen Reste, von Schering. 55—61.

Reflexe, Untersuchungen über solche, von Mor. Mendelssohn. 49—53.

Reste, die absolut kleinsten reeller Grössen, von Kronecker. 209—222. 637—641.

Salze, wasserhaltige, über die Dissociation derselben und daraus abgeleitete Folgerungen über die Constitution der Salzbestandtheile, von W. Müller-Erzbach. 201—208.

Salzgemische, über die Löslichkeit von solchen, von Fr. Rüdorff. 185—200.

Scheitelwachsthum und Blattstellungen, von Schwendener. 547—563.

Selen, beleuchtetes, über die von Hrn. Fritts in New York entdeckte elektromotorische Wirkung desselben, von Siemens. 73—74.

Siphonophoren, über die cyklische Entwickelung derselben, von C. Chun. 263—281.

Skapolith, über die Gruppe desselben, von Rammelsberg. 295—313.

Spongien, über das Verhältniss derselben zu den Choanoflagellaten, von Schulze. 75—87.

Stoss cylindrischer Körper, longitudinaler, über die Theorie desselben, von V. Hausmaninger. 23—36.

Sulfocyanursäure, über dieselbe, von Hofmann. 481—492.

Sulfocyanursäuremethyläther, über die Einwirkung des Ammoniaks und der Amine auf denselben und das Cyanurchlorid. Normale alkylirte Melamine, von Hofmann. 565—592.

Tertiär im Bereiche der Mark Brandenburg, über dasselbe, von G. Berendt. 523—545.

Digitized by Google

Thermoelektricität geschmolzener Metalle, über dieselbe von F. Braun. 143—152.

Thermometer, über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Nachwirkungs-Erscheinungen bei denselben, von H. F. Wiebe. 629—636.

Vanadinsäure, über die solche enthaltenden Bleierze aus der Prov. Cordoba (Argentina) von Websky. 37—38.

Witterung aufeinanderfolgender Jahreszeiten, über gewisse Gesetzmässigkeiten im Wechsel derselben, von G. Hellmann. 93—102.

Zitterrochen, lebende in Berlin, zweite Mittheilung über solche, von du Bois-Reymond. 355—414.

Zoologie: P. Albrecht, über die im Laufe der phylogenetischen Entwickelung entstandene, angeborene Spalte des Brustbeinhandgriffes der Brüllaffen. 167—183. — du Bois-Reymond, lebende Zitterrochen in Berlin. 355—414. — C. Chun, über die cyklische Entwickelung der Siphonophoren. 263—281. — G. Fritsch, zur Organisation des Gymnarchus niloticus. 61—71. — H. v. Jhering, über die Fortpflanzung der Gürtelthiere. 643—645. — R. v. Lendenfeld, Beitrag zur Kenntniss des Nerven- und Muskelsystems der Hornschwämme. 623—628. — R. Schneider, der unterirdische Gammarus von Clausthal. 677—693. — Schulze, über das Verhältniss der Spongien zu den Choanoflagellaten. 75—87.

Zwangsbewegungen, die Lehre von den — des Frosches, von Is. Steiner. 253—261.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google

INHALTSVERZEICHNISS.

		Seite
54.	WEIERSTRASS: Zu LINDEMANN's Abhandlung: »Über die LUDOLPH'sche Zahl«	657
55.	SCHNEIDER: Der unterirdische Gammarus von Clausthal (*G. pulex, var. subterraneus)* (hierzu Taf. VII)	677
56.	LEONH. WEBER: Mittheilung über einen Differential-Erd-Inductor	695
57.	WESTERMAIER: Zur physiologischen Bedeutung des Gerbstoffes in den Pflanzen (hierzu Taf. VIII)	705
58.	VIRCHOW: Über krankhaft veränderte Knochen alter Peruaner	717

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE
aus den Jahren 1883, 1884 und 1885.

In Commission in FERD. DÜMMLER'S Verlagsbuchhandlung.)

CHRADER:	Gedächtnissrede auf JUSTUS OLSHAUSEN	*M.* 1.00
LAGEN:	Geschwindigkeit des strömenden Wassers in verschiedenen Tiefen, untersucht nach den von BRÜNINGS ausgeführten Messungen	» 4.00
OBLER:	Die altvenezianische Übersetzung der Sprüche des Dionysius Cato	» 3.50
ICHLER:	Beiträge zur Morphologie und Systematik der Marantaceen	» 6.30
RONECKER:	Über bilineare Formen von vier Variabeln	» 2.50
CHRADER:	Zur Frage nach dem Ursprunge der altbabylonischen Cultur	» 3.00
OBLER:	Über das Buch des Uguçon da Laodho	» 5.00
ILLMANN:	Über die Regierung, insbesondere die Kirchenordnung des Königs Zar'a-Jacob	» 5.00
HOOF-BLUMER:	Die Münzen der Dynastie von Pergamon	» 5.00
OTH:	Beiträge zur Petrographie plutonischer Gesteine. IV.	» 7.50
IRCHOW:	Über alte Schädel von Assos und Cypern	» 5.00
IEDEMANN:	Über die Bestimmung des Ohm	» 4.50
IELS:	Über die Berliner Fragmente der Ἀθηναίων πολιτεία des Aristoteles	» 4.00
HRADER:	Die Keilinschriften am Eingange der Quellengrotte des Sebeneh-Su	» 3.00
UDER:	Über die von S. M. S. Gazelle auf der Reise um die Erde 1874—1876 gesammelten Isopoden	» 2.50
ARSHALL:	Agilardiella radiata	» 1.50
ABBE:	Über das Wachsthum des Verdickungsringes und der jungen Holzzellen in seiner Abhängigkeit von Druckwirkungen	» 4.50
UDER:	Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—1876 gesammelten Asteriden und Euryaliden	» 4.50
EUDENTHAL:	Die durch Averroes erhaltenen Fragmente Alexander's zur Metaphysik des Aristoteles	» 3.00
HN:	Der Tempel des Dionysos zu Pergamon	» 1,50
RSCHFELD, G.:	Paphlagonische Felsengräber	» 6.00
HWEINFURTH:	Alte Baureste und hieroglyphische Inschriften im Uadi Gasûs. Mit Bemerkungen von A. ERMAN	» 2.80

gister für die Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie zu Berlin vom Jahre 1874 bis 1881 *M.* 3.00

Digitized by Google

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu B wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus d Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN
DER
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissensc in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern od fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch dem Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in M heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschafte Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen »Sit berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zuse zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu

---

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissensch Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämlich
die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,
" " " Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,
" " " October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Fert des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1885 nicht zugekommen sein sollten, werden hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamation Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1886 angebracht wer

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchhändleris zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gos in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE
DER
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAF
ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGE
AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN
DER
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungs oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften v der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten, zu Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der Buchhandlung in Verbindung setzen.

Digitized by Google

Fig. 1.

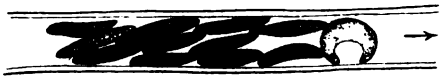


Fig. 2. (500)

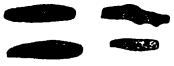


Fig. 3. (500)

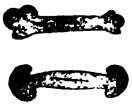


Fig. 4. (210)

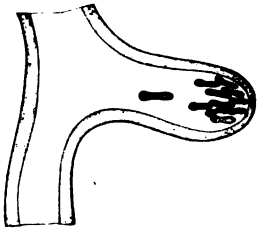


Fig. 5. (250)

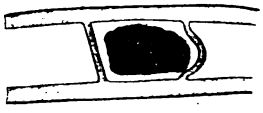


Fig. 6. (130)

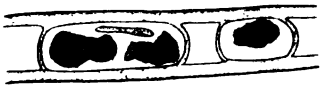


Fig. 10. (250)

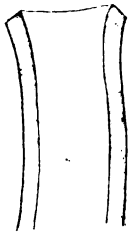


Fig. 8. (250)

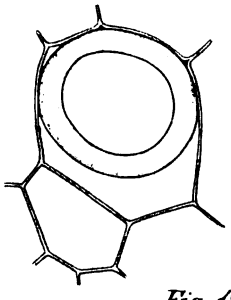


Fig. 9. (250)

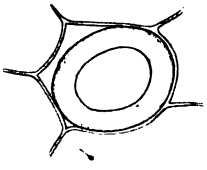


Fig. 7. (250)

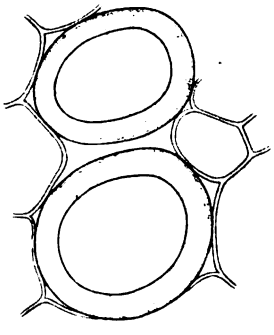


Fig. 12. (700)

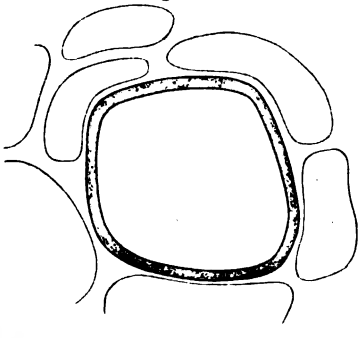


Fig. 11. (340)

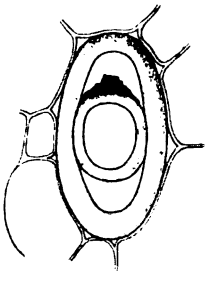


Fig. 13. (600)

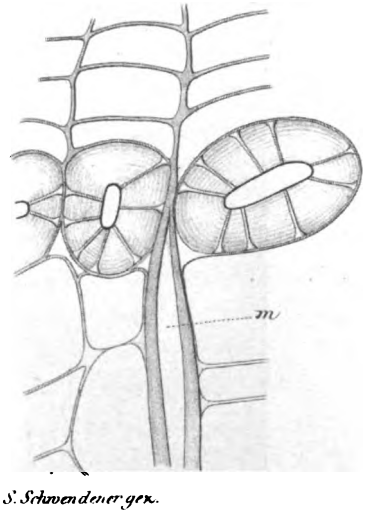
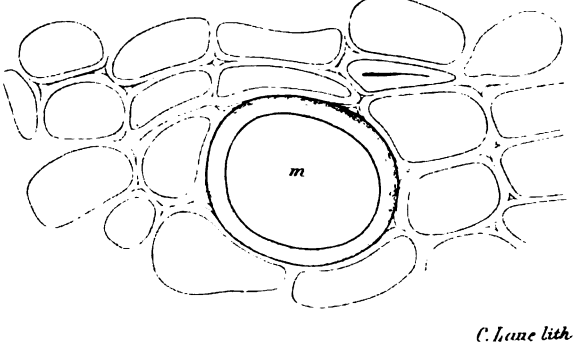


Fig. 14. (700)



S. Schwendener gez. C. Lane lith.

Schwendener: Milchsaftgefässe.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 6.

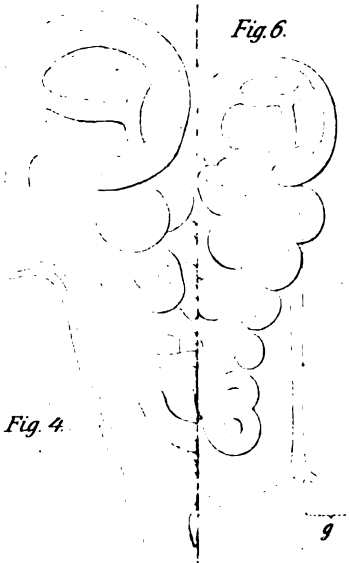


Fig. 4.

Fig. 8.

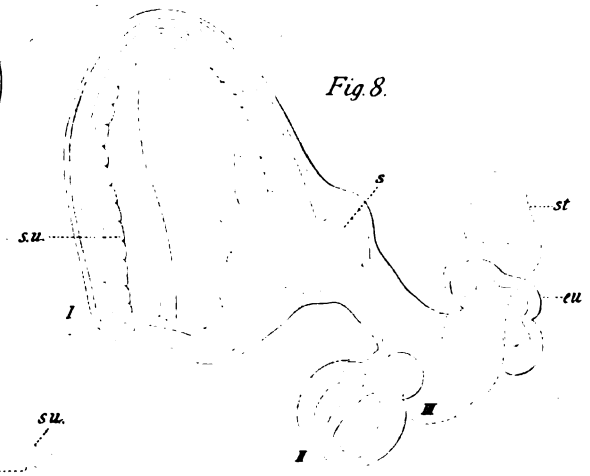


Fig. 7.

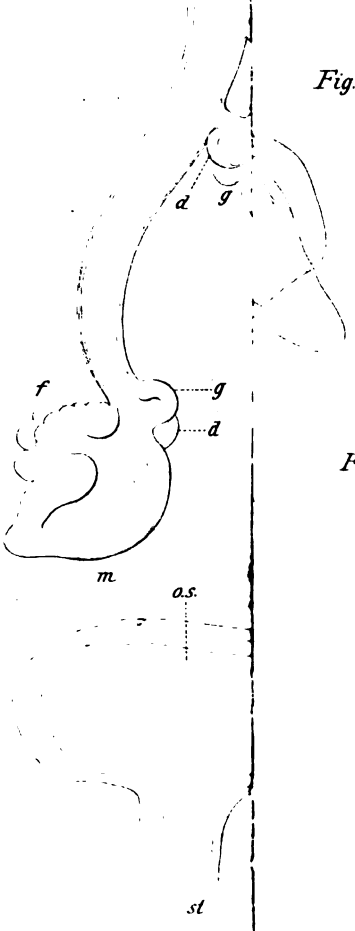
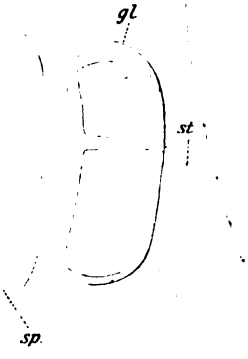


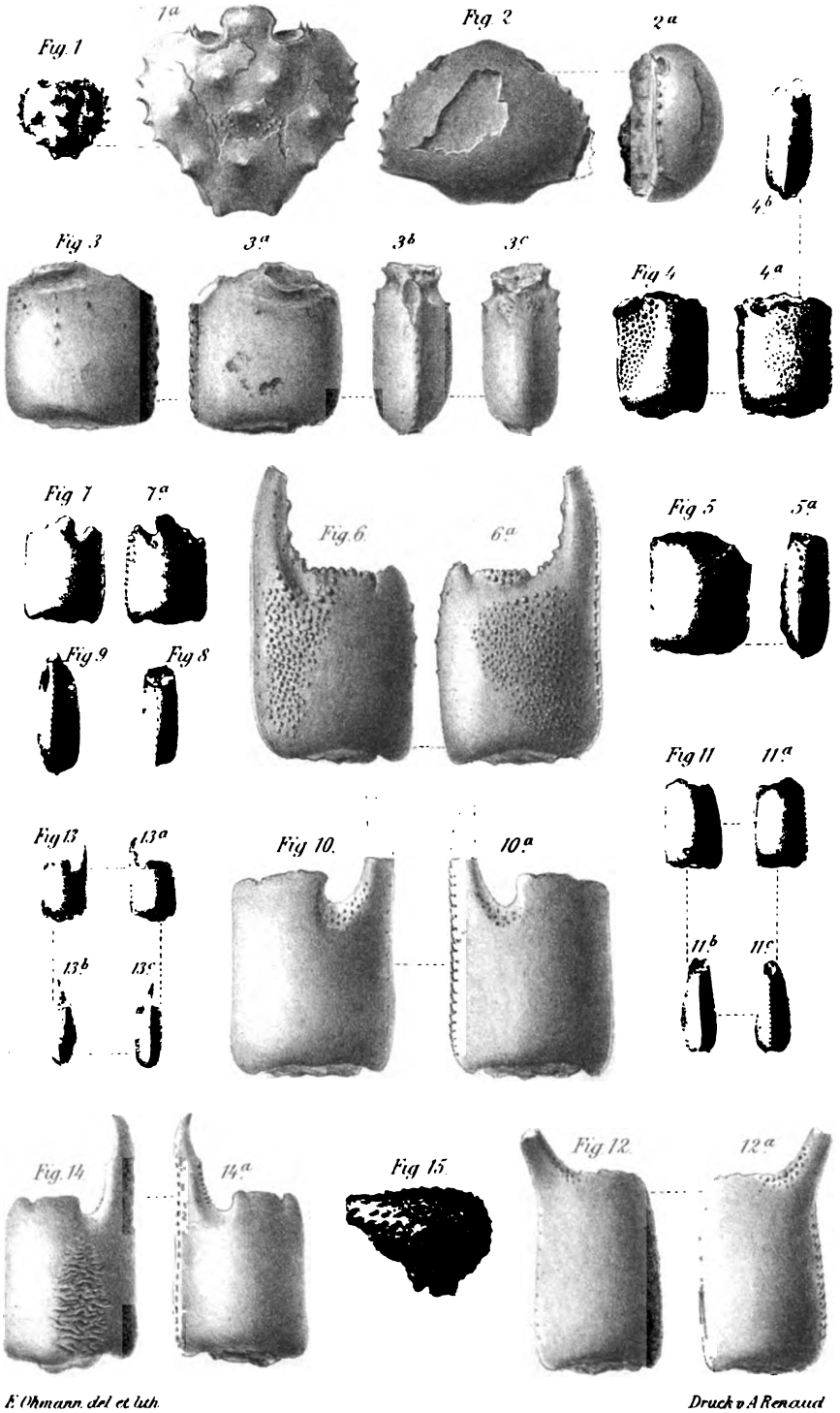
Fig. 11.

Fig. 13.



Digitized by Google

Digitized by Google

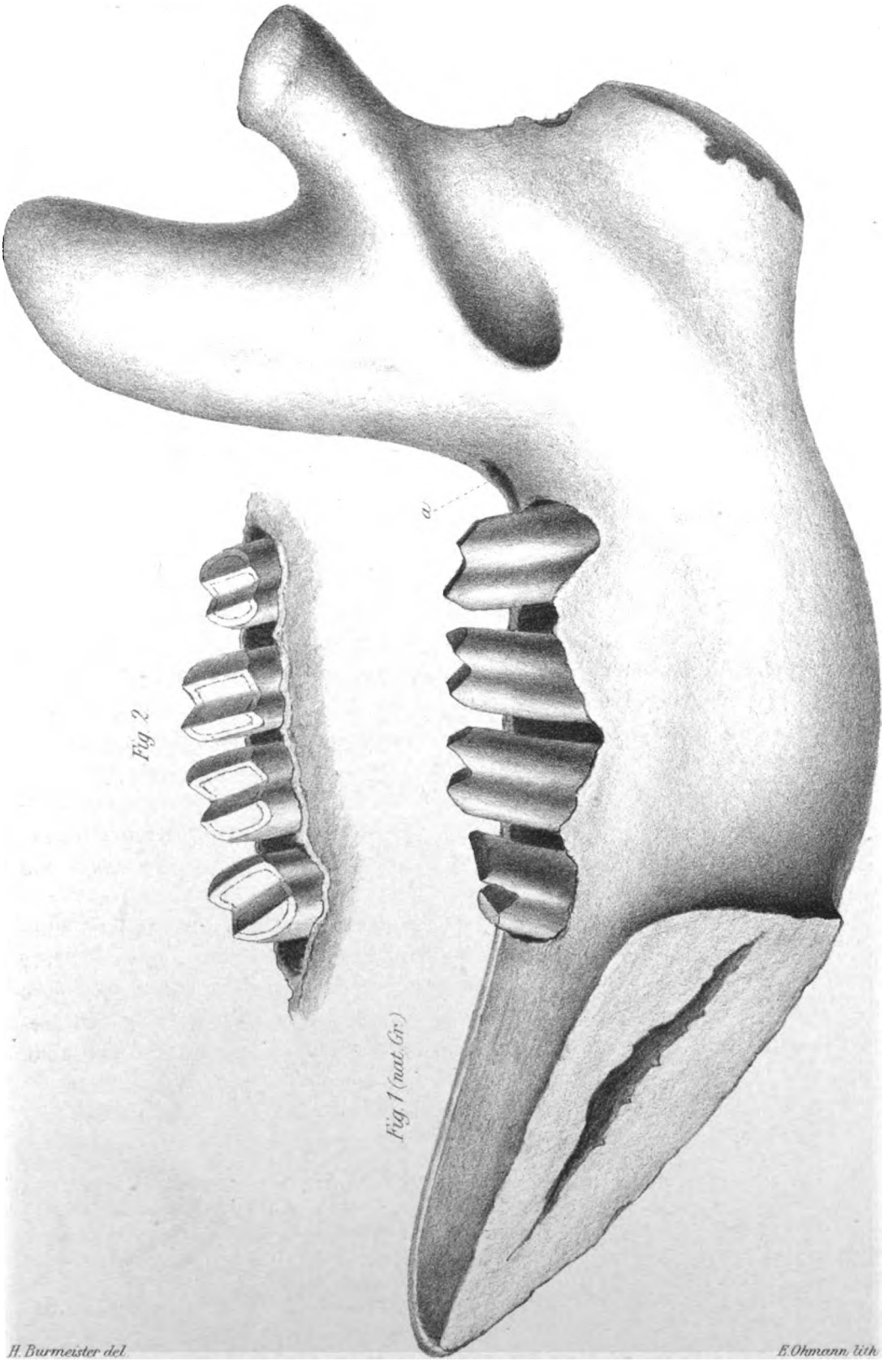


F. Ohmann del et lith. Druck v. A. Renaud

F. Noetling: Über Crustaceen aus dem Tertiär Aegyptens.

Digitized by Google

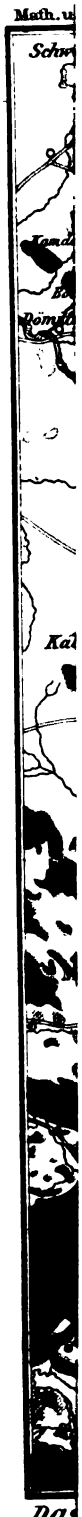
Digitized by Google



H Burmeister: Berichtigung zu Coelodon.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

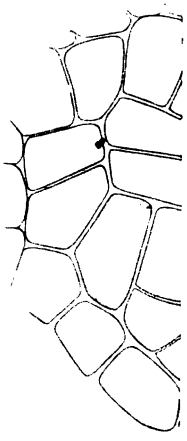


Fig. 5.

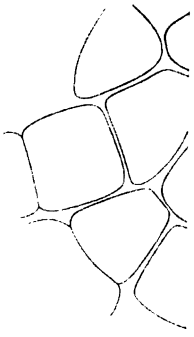
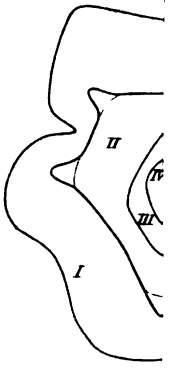


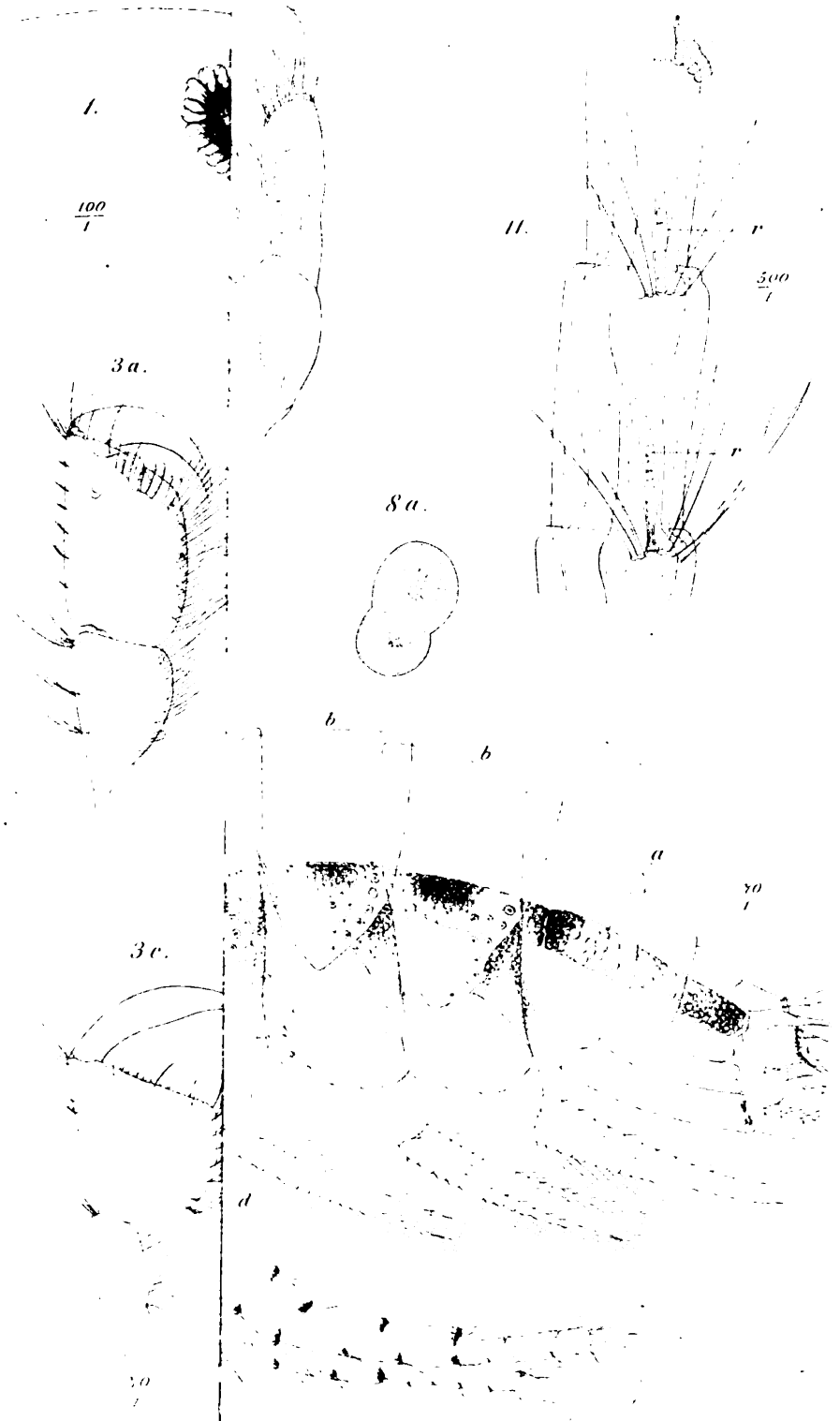
Fig.



Schwendener del.

Digitized by Google

Digitized by Google

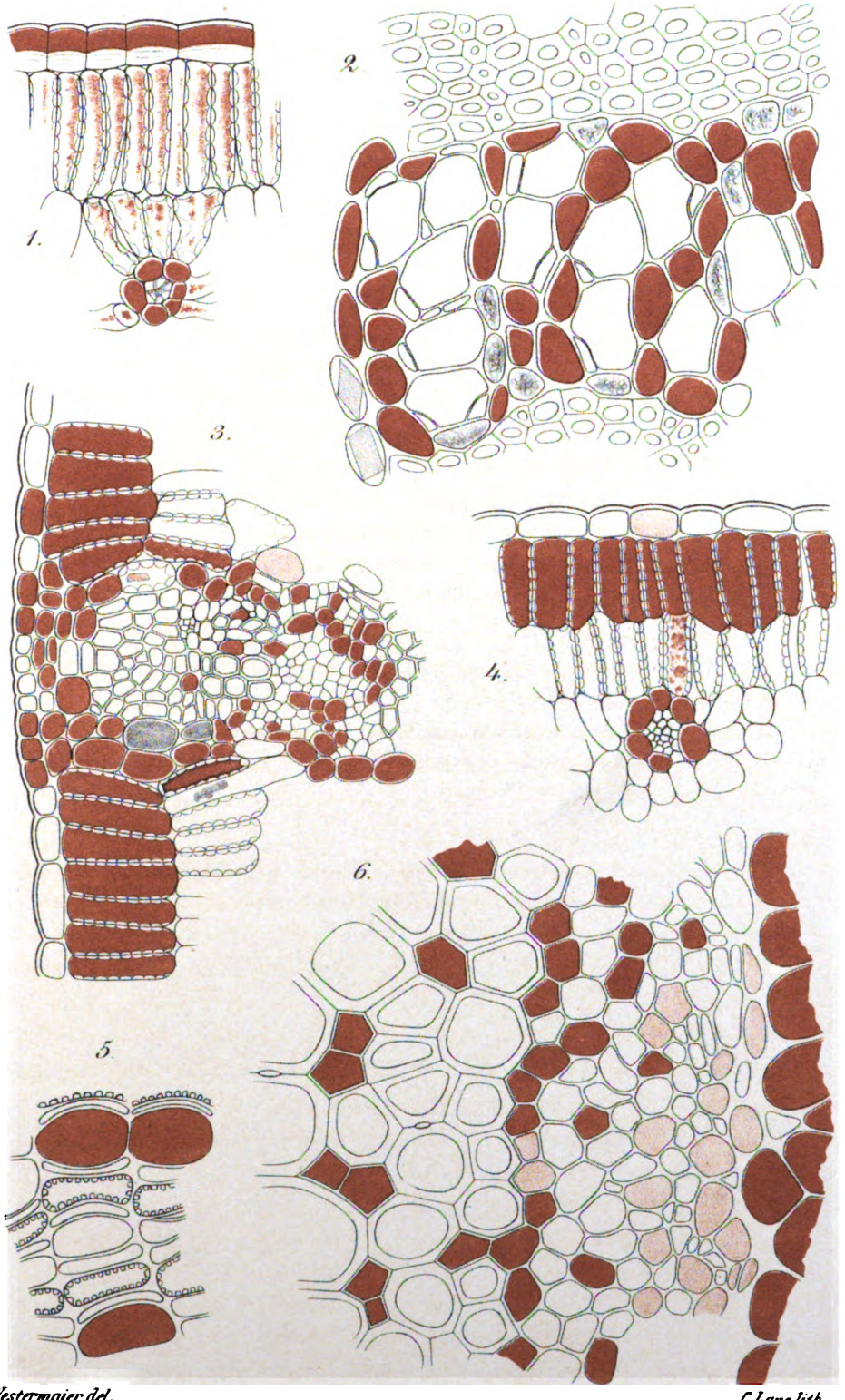


Autor del

E. Duval lith.

Digitized by Google

Digitized by Google



Westermaier del. C. Lang lith.

Westermaier: Bedeutung des Gerbstoffes.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

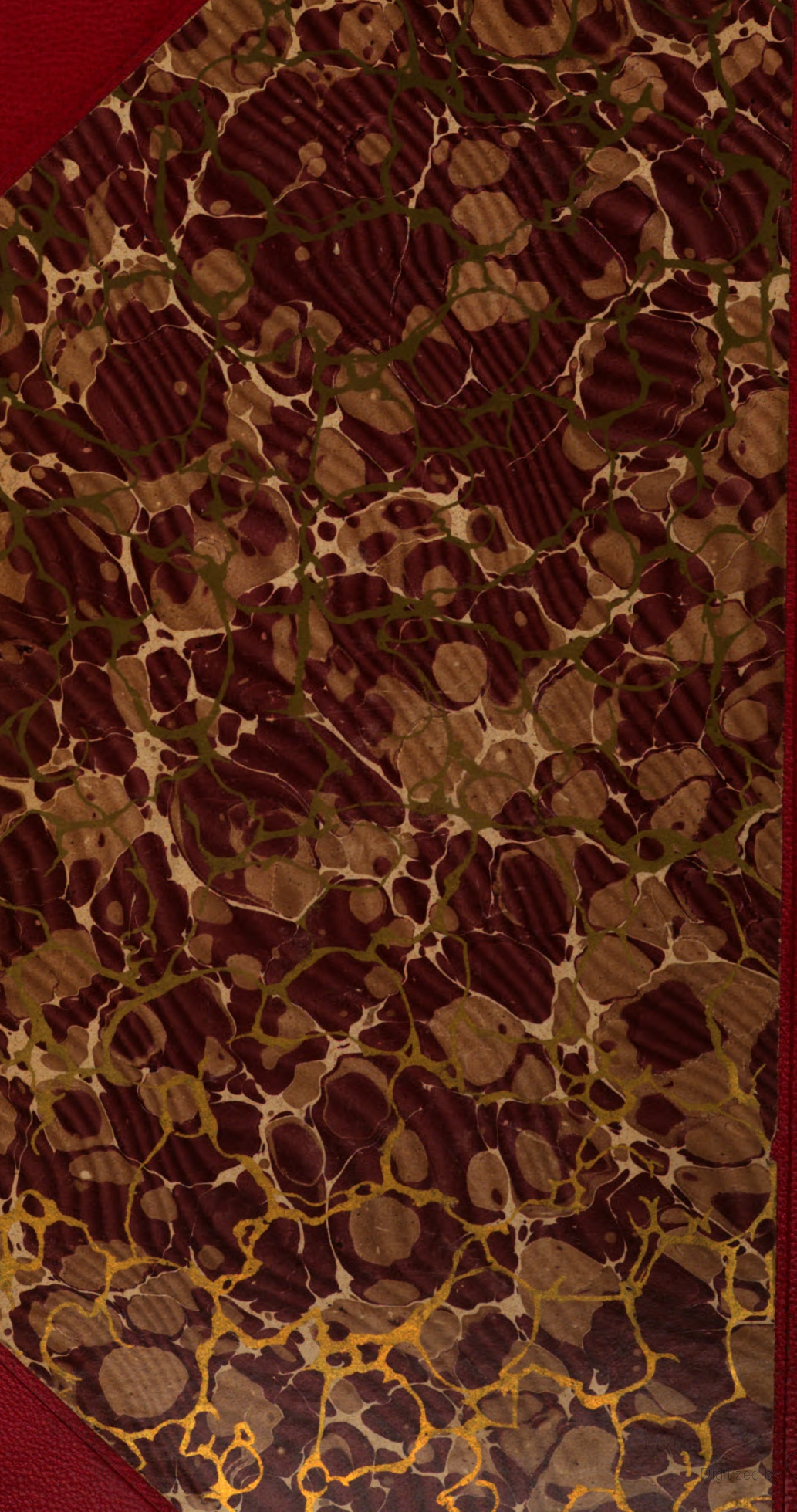
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

3 2044 106 219 900

Digitized by Google


Digitized by Google